

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMINTULUI

GH. BUZDUGAN

M. BLUMENFELD

A. BELEȘ

I. CONSTANTINESCU

C. MITESCU

V. COSAC

R. VOINEA

C. VOICU

**culegere de
probleme din
REZISTENȚA
MATERIALELOR**



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

PREFATĂ

Culegerea de probleme din Rezistența materialelor apare în a VIII-a ediție, îmbunătățită față de precedentele. Ea este, în mare măsură, rezultatul experienței didactice a catedrei de Rezistența materialelor de la Institutul politehnic din București.

Împărțită în 20 de capitole, lucrarea acoperă întreaga problematică a cursului complet de Rezistența materialelor cu specific de inginerie mecanică.

Noua ediție are îmbunătățiri substanțiale față de precedentele: s-au introdus probleme noi, având un pronunțat caracter aplicativ, aproape la toate capitolele; s-a adăugat un capitol cu probleme recapitulative, de complexitate mai mare, care ajută la formarea și dezvoltarea capacității de sinteză; textul este pus de acord cu ultimele modificări ale Standardelor de Stat din domeniul rezistenței materialelor și construcției de mașini, cu terminologia și simbolurile respective (Anexa I).

Având conținutul îmbogățit și actualizat, lucrarea corespunde noii programe analitice a cursului, înscriindu-se și mai mult pe linia orientării învățământului superior de integrare cu cercetarea și producția.

AUTORII,

Redactor: Nicolae Alexandru
Tehnoredactor: Veleovici Constantina
Grafician: Ștefănescu Viorica

INTINDERE ȘI COMPRESIUNE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Formulele de dimensionare și de verificare a unei bare prismatice solicitate la întindere sau la compresiune, precum și a unui fir solicitat la întindere sint :

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a}, \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_{ef}}, \quad (1.2)$$

$$N_{cap} = A_{ef} \cdot \sigma_a. \quad (1.3)$$

2. Deformația axială a unei bare solicitate la întindere sau la compresiune este :

$$\Delta l = \epsilon l = \frac{Nl}{EA}. \quad (1.4)$$

3. Energia sau lucrul mecanic de deformare la întindere sau compresiune este :

— energia specifică (pe unitatea de volum) :

$$U_1 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\epsilon^2}{2}, \quad (1.5)$$

— energia elementară :

$$dU = U_1 \, dV = U_1 A \, dx = \frac{N^2 dx}{2EA}, \quad (1.6)$$

— energia totală :

$$U = \int_V dU = \int \frac{N^2 dx}{2EA}. \quad (1.7)$$

4. Dacă se ține seama și de greutatea proprie a materialului din care este confecționată bara prismatică, formulele (1.1), (1.2), (1.4) devin :

— pentru verificare :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \gamma l; \quad (1.8)$$

— pentru dimensionare :

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a - \gamma l} \quad (1.9)$$

— pentru calculul deformației :

$$\Delta l = \frac{\left(N + \frac{G}{2}\right) l}{EA} = \frac{\left(N + \frac{\gamma A l}{2}\right) l}{EA} \quad (1.10)$$

5. Într-o bară formată din două materiale care în orice secțiune au ariile A_1 și A_2 și care se consideră solidarizate astfel încât să se deformeze în mod egal, eforturile unitare se distribuie conform relațiilor :

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1} \quad (1.11)$$

6. Efortul unitar produs într-o bară omogenă prismatică, supusă unei variații de temperatură $\Delta t = t_1 - t_0$, în cazul când lungirea sau scurtarea este împiedicată, are expresia :

$$\sigma = E\alpha(t_1 - t_0), \quad (1.12)$$

α fiind coeficientul de dilatare termică liniară.

7. Când o bară este slăbită prin găuri, creștături etc., se disting :

- o secțiune netă A_n , la care s-a ținut seama de slăbiri;
- o secțiune brută A_b , la care nu s-a ținut seama de reducerile de secțiune.

3. Firele sînt corpuri elastice care au una din dimensiuni foarte mare față de celelalte două, deosebindu-se de bare prin aceea că nu preiau decît eforturi de întindere.

Calculul firelor se poate face în două ipoteze :

Ipoteza I. Se consideră greutatea proprie q a firului uniform repartizată pe proiecția orizontală a acestuia. În acest caz, firul ia forma unei parabole (Fig. 1.a).

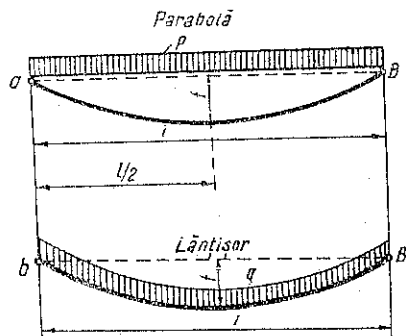


Fig. 1

Ipoteza a II-a. Se consideră greutatea proprie q a firului uniform repartizată pe lungimea firului (așa cum este în realitate). În acest caz, firul ia forma unui lăntișor (Fig. 1. b).

În cazurile practice, pentru deschideri pînă la 500 m, prima ipoteză de calcul dă valori foarte apropiate de realitate, fiind mai comodă din punctul de vedere al calculului.

9. În cele ce urmează se dă numai prima metodă de calcul, pentru fire cu reazeme la același nivel. Se notează cu p sarcina pe unitatea de lungime din proiecția orizontală a firului. Ecuația parabolei este :

$$y = \frac{px^2}{2H} \quad (1.13)$$

Originea axelor de coordonate este în punctul cel mai de jos al parabolei. H este proiecția orizontală a forței de întindere în fir ; pentru sarcini verticale, ea este constantă.

Săgeata maximă are loc pentru $x = \frac{l}{2}$ (Fig. 1, a). Mărimea săgeții maxime este :

$$f = \frac{pl^2}{8H} \quad (1.14)$$

Proiecția orizontală a forței de întindere în fir, în funcție de săgeata maximă, este :

$$H = \frac{pl^2}{8f} \quad (1.15)$$

Lungimea s a firului întins este dată de relația :

$$s = l + \int_0^{\frac{l}{2}} y'^2 dx = l + \frac{p^2 l^3}{24 H^2}, \quad (1.16)$$

în care l este distanța dintre reazemele firului (deschiderea) așezate la același nivel.

Diferența dintre lungimea firului și deschiderea sa este :

$$s - l = \frac{8}{3} \frac{f^2}{l} = \frac{p^2 l^3}{24 H^2} \quad (1.17)$$

Firul se deformează sub acțiunea greutății proprii. Diferența δ dintre lungimea s_0 a firului înainte de montare și deschiderea l , pentru ca săgeata să fie egală cu f , rezultă din ecuația :

$$f^3 - \frac{3l}{8} \delta f - \frac{3\gamma l^4}{64E} = 0, \quad (1.18)$$

de unde :

$$\delta = \frac{f^3 - \frac{3\gamma l^4}{64E}}{\frac{3}{8}lf}, \quad (1.19)$$

în care γ este greutatea specifică a materialului firului.

10. În practică este necesar să se determine forța de întindere din momentul montajului astfel ca în condițiile cele mai grele din timpul iernii să nu se depășească rezistența admisibilă a materialului firului. Se notează :

- P_1 — sarcina care acționează asupra firului în momentul montajului;
- P_0 — sarcina care acționează asupra firului în timpul iernii;
- s_1 — lungimea firului în momentul montajului;
- s_0 — lungimea firului în timpul iernii;
- t_1 — temperatura firului în momentul montajului;
- t_0 — temperatura firului în timpul iernii;
- α — coeficientul de dilatare termică liniară a materialului firului;
- H_1 — proiecția pe orizontală a forței de întindere în momentul montajului;
- H_0 — proiecția pe orizontală a forței de întindere în timpul iernii.

Forța de întindere din momentul montajului se determină din ecuația :

$$\frac{l^2}{24} \left(\frac{P_1^2}{E_1^2} - \frac{P_0^2}{E_0^2} \right) = \alpha(t_1 - t_0) + \frac{H_1 - H_0}{EA} \quad (1.20)$$

Mărimea H_1 se citește pe un *dinamometru*. Dacă pe șantier nu se găsește acest aparat de măsură, calculul se poate face în funcție de săgeți. Notînd cu :

- f_1 — săgeata firului în momentul montajului;
- f_0 — săgeata firului în timpul iernii,

se obține ecuația :

$$f_1^3 - \frac{3}{8} \left[\frac{1}{24} \frac{\gamma^2 l^2}{\sigma_1^2} + \alpha(t_1 - t_0) - \frac{\sigma_1}{E} \right] l^2 f_1 - \frac{3}{64} \frac{\gamma l^4}{E} = 0, \quad (1.21)$$

în care σ_1 este efortul unitar normal în fir la montaj.

Ecuația (1.21) se rezolvă prin încercări. În relațiile de mai sus p_1 este greutatea proprie a firului, măsurată în daN/cm sau daN/m.

Pentru p_0 se prevăd două situații critice în care se face calculul :

- la temperatura $t_0 = -30^\circ\text{C}$, luînd $p_0 = p_1$;
- la temperatura $t_0 = -5^\circ\text{C}$, luînd ca sarcină p_0 greutatea proprie a firului plus efectul poleiului și al vîntului, pentru care se dau indicații mai departe.

11. Dacă firul cu săgeată inițială f_0 suportă o suprasarcină dată de polei sau o altă suprasarcină uniform distribuită, săgeata totală f_2 se determină cu ajutorul ecuației :

$$f_2^3 + \left[\frac{3}{64} \frac{p_0 l^4}{EA f_0} - f_0^2 \right] f_2 - \frac{3}{64} \frac{(p_0 + p_s) l^4}{EA} = 0; \quad (1.22)$$

- f_0 este săgeata firului înainte de încărcarea cu suprasarcină;
- p_s — greutatea suprasarcinii (pe unitatea de lungime);
- A — secțiunea firului fără suprasarcină.

Suprasarcina dată de polei poate fi calculată empiric :

$$p_s = 0,18 \sqrt{d}. \quad (1.23)$$

Cînd formula se aplică la conductori monofilari, d reprezintă diametrul firului, în mm, rezultatul fiind dat în daN/m, iar în cazul cablurilor alcătuite din mănunchiuri de fire :

$$d = 1,3 \sqrt{A}, \quad (1.24)$$

în care A este secțiunea totală a firelor, în mm².

Pentru ambele verificări (la -30°C și -5°C) trebuie să rezulte un coeficient de siguranță față de rezistența de rupere de cel puțin 2 pentru conductori funie și 2,5 pentru conductori masivi.

Formulele de mai sus, fiind omogene, sînt valabile, în orice sistem de unități. Se pot lua de exemplu : A în mm², E în daN/mm², l în m, p_1 și p_0 în daN/m.

B. PROBLEMĂ REZOLVATE

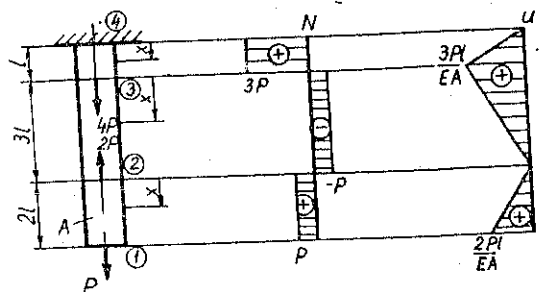
1.1. La cele trei bare de oțel din figurile 1.1, a , b , c se dau : $l = 0,3$ m, $A = 5$ cm², $P = 1500$ daN. Se cere : a) să se traseze diagramele de variație a forței axiale în lungul barelor ; b) să se verifice barele, știind că $\sigma_a = 1000$ daN/cm² ; c) să se calculeze deformația totală a barelor ; d) să se traseze diagramele de variație a deplasărilor în lungul barelor.

Rezolvare. Pentru bara din figura 1.1, a :

a) Diagrama de variație a forței axiale în lungul barei este redată în figura 1.1, d .

$$b) \sigma_{ef} = \frac{3P}{A} = \frac{3 \cdot 1500}{5} = 900 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

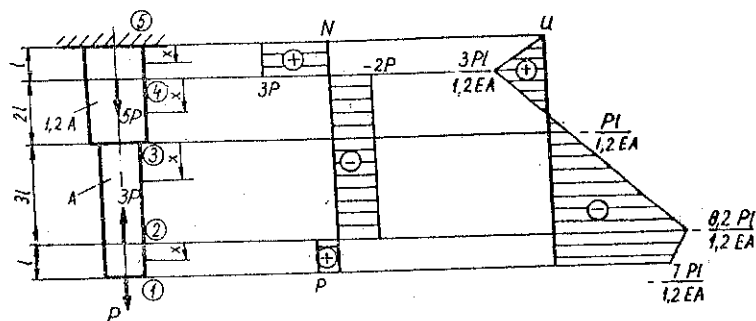
$$c) \Delta l = \frac{P \cdot 2l}{EA} - \frac{P3l}{EA} + \frac{3Pl}{EA} = \frac{2 \cdot 1500 \cdot 30}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 5} = 0,00857 \text{ cm}.$$



a

d

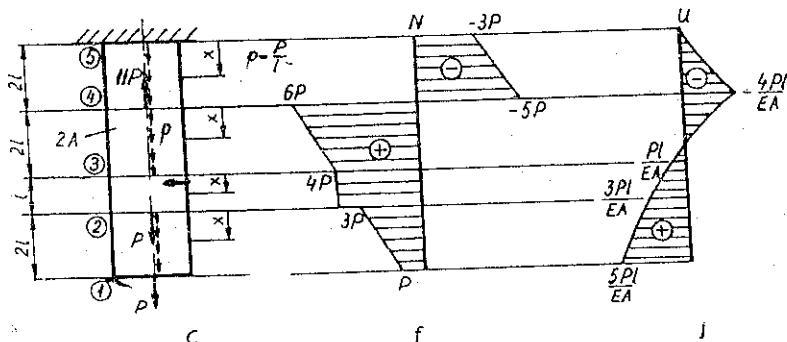
g



b

e

h



c

f

i

Fig. 1.1

d) Pentru trasarea diagramei de variație a deplasării în lungul axei barei, se calculează deplasările în secțiunile 4, 3, 2, 1:

$$u_4 = 0; \quad u_3 = \int_0^l \frac{3P}{EA} dx = \frac{3Pl}{EA}$$

$$u_2 = u_3 + \int_0^{2l} \frac{-P}{EA} dx = 0,$$

$$u_1 = u_2 + \int_0^{2l} \frac{P}{EA} dx = \frac{2Pl}{EA}$$

Diagrama de variație a deplasării în lungul axei barei este redată în figura 1.1, g.

Pentru bara din figura 1.1, b:

a) Diagrama de variație a forței axiale în lungul barei este redată în figura 1.1, e.

b) Eforturile unitare normale σ se calculează:

— pe intervalul 3—2:

$$\sigma_{ef} = -\frac{2P}{A} = -\frac{2 \cdot 1500}{5} = -600 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a;$$

— pe intervalul 3—4:

$$\sigma_{ef} = \frac{3P}{1,2A} = \frac{3 \cdot 1500}{1,2 \cdot 5} = 750 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

$$\begin{aligned} c) \Delta l &= \frac{Pl}{EA} - \frac{2P \cdot 3l}{EA} - \frac{2P \cdot 2l}{E \cdot 1,2A} + \frac{3Pl}{E \cdot 1,2A} = -\frac{7}{1,2} \frac{Pl}{EA} = \\ &= \frac{-7 \cdot 1500 \cdot 30}{1,2 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 5} = -0,025 \text{ cm.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) u_5 &= 0; \quad u_4 = u_5 + \int_0^l \frac{3P}{1,2EA} dx = \frac{3}{1,2} \frac{Pl}{EA}, \\ u_3 &= u_4 + \int_0^{2l} \frac{-2P}{1,2EA} dx = -\frac{Pl}{1,2EA}, \\ u_2 &= u_3 + \int_0^{2l} \frac{-2P}{EA} dx = -\frac{8,2P}{1,2EA}, \\ u_1 &= u_2 + \int_0^l \frac{P}{EA} dx = -\frac{7}{1,2} \frac{Pl}{EA} \end{aligned}$$

Diagrama de variație a deplasării este reprezentată în figura 1.1, h.
Pentru bara din figura 1.1, c:

a) Diagrama de variație a forței axiale în lungul barei este redată în figura 1.1, f.

$$b) \sigma_{ef} = \frac{6P}{2A} = \frac{6 \cdot 1500}{2 \cdot 5} = 900 \text{ daN/cm}^2.$$

$$c) \Delta l = \int_0^{2l} \frac{(-3P - px) dx}{E \cdot 2A} + \int_0^{2l} \frac{(6P - px) dx}{E \cdot 2A} + \int_0^l \frac{4P dx}{E \cdot 2A} + \int_0^{2l} \frac{(3P - px) dx}{E \cdot 2A} = \frac{5Pl}{EA} = \frac{5 \cdot 1500 \cdot 30}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 5} = 0,0214 \text{ cm}.$$

$$d) u_5 = 0,$$

$$u_4 = \int_0^{2l} \frac{(-3P - px) dx}{E \cdot 2A} = -\frac{4Pl}{EA},$$

$$u_3 = u_4 + \int_0^{2l} \frac{(6P - px) dx}{E \cdot 2A} = \frac{Pl}{EA},$$

$$u_2 = u_3 + \int_0^l \frac{4P dx}{E \cdot 2A} = \frac{3Pl}{EA},$$

$$u_1 = u_2 + \int_0^{2l} \frac{(3P - px) dx}{E \cdot 2A} = \frac{5Pl}{EA}.$$

Diagrama de variație a deplasării este reprezentată în figura 1.1, i.

1.2. O bară de oțel, cu secțiunea constantă și lungimea $l = 600 \text{ mm}$, se lungeste, sub acțiunea unei forțe, cu $0,6 \text{ mm}$. Să se calculeze această forță, știind că volumul barei este de 360 cm^3 .

$$\text{Rezolvare.} \quad \Delta l = \frac{Nl}{AE} = \frac{Nl^2}{AlE} = \frac{Nl^2}{VE},$$

$$N = \frac{VE \cdot \Delta l}{l^2} = \frac{360 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,06}{3 \cdot 600} = 12 \cdot 600 \text{ daN}.$$

1.3. O bară din OL 37, avind diametrul de 7 mm , este solicitată la întindere. Se cere:

a) să se calculeze forța N necesară pentru a produce o alungire de $0,017\%$;

b) să se arate care este, în acest caz, coeficientul de siguranță efectiv;
c) care este forța necesară pentru a produce ruperea barei?

$$\text{Rezolvare.} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA},$$

$$N = \varepsilon EA = \frac{0,017}{100} \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 0,7^2}{4} = 137 \text{ daN},$$

$$\sigma_{ef} = E\varepsilon = 2,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,017}{100} = 357 \text{ daN/cm}^2,$$

$$c = \frac{\sigma_r}{\sigma_{ef}} = \frac{3 \cdot 700}{357} = 10,3,$$

$$N_r = \sigma_r A_{ef} = 3 \cdot 700 \cdot \frac{\pi \cdot 0,7^2}{4} = 1 \cdot 420 \text{ daN}.$$

1.4. O piesă de greutate G este ridicată cu ajutorul a trei cabluri de oțel, ca în figura 1.4. Fiecare cablu este format din șase toroane de câte 61 fire cu diametrul $d = 1 \text{ mm}$ (STAS 1353-71), avind $\sigma_a = 1500 \text{ daN/cm}^2$.

Să se calculeze greutatea maximă a piesei care poate fi ridicată.

Rezolvare. Scriind ecuațiile de echilibru, rezultă:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N.$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$3N \cos \alpha = G;$$

Condiția de rezistență:

$$N_{cap} = \sigma_a \cdot A_{ef} = 1500 \cdot 6 \cdot 61 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} =$$

$$= 4310 \text{ daN},$$

$$G = 3 \cdot 4310 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 11 \cdot 565 \text{ daN}.$$

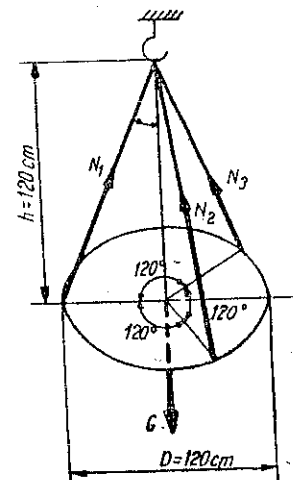


Fig. 1.4

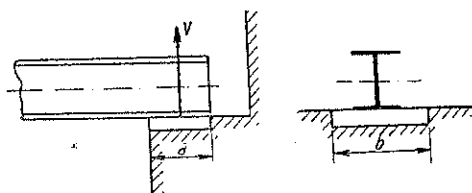


Fig. 1.5

$$A_{nec} = \frac{V}{\sigma_a} = \frac{6000}{7} = a \cdot b; \quad b = \frac{A_{nec}}{a} = \frac{6000}{7 \cdot 35} = 24,5 \text{ cm.}$$

Lățimea profilului I 30 fiind de 12,5 cm (anexa 9), este necesară o placă de reazem între profil și zid care să aibă lățimea $b = 24,5$ cm.

1.6. Capacul cilindrului unui motor este fixat prin $n = 6$ buloane. Diametrul interior al cilindrului este $D = 250$ mm, iar presiunea maximă în cilindru $p_{max} = 20$ daN/cm². Să se calculeze diametrul buloanelor, luând $\sigma_a = 600$ daN/cm².

Rezolvare. Suprafața fundului cilindrului A are valoarea:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 25^2}{4} = 490 \text{ cm}^2.$$

Forța maximă care apasă pe capac este:

$$N = A \cdot p_{max} = 490 \cdot 20 = 9800 \text{ daN.}$$

Secțiunea totală necesară pentru buloane este:

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{9800}{600} = 16,3 \text{ cm}^2.$$

Secțiunea unui bulon va fi:

$$A_{1nec} = \frac{A_{nec}}{n} = \frac{16,3}{6} = 2,72 \text{ cm}^2.$$

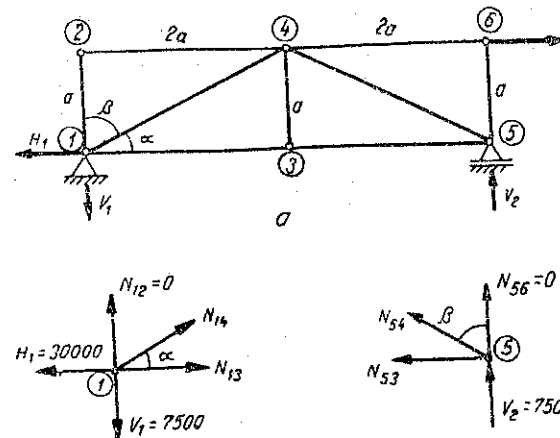
Corespunde un bulon M24 cu secțiunea:

$$A_{ef} = 3,089 \text{ cm}^2.$$

1.7. Să se dimensioneze barele grinzii cu zăbrele din figura 1.7, făcută din oțel, cu $\sigma_a = 1400$ daN/cm². Toate barele au secțiune circulară. Se dă forța $P = 30000$ daN. Să se precizeze care sînt bare de rezistență și care servesc numai ca bare de legătură.

Rezolvare. $H_1 = P = 30000$ daN; $V_1 = V_2 = \frac{P}{4} = 7500$ daN

$$\alpha = 26^\circ 34'; \quad \beta = 63^\circ 26'.$$



b

Fig. 1.7

Din condițiile de echilibru ale nodurilor 2, 3 și 6 rezultă $N_{21} = 0$, $N_{34} = 0$, $N_{56} = 0$ și $N_{65} = 0$. Pentru celelalte eforturi, conform schițelor din figura 1.7, b, rezultă:

$$N_{14} = \frac{7500}{\cos 63^\circ 26'} = 16770 \text{ daN};$$

$$N_{13} = H_1 - N_{14} \cos \alpha = 30000 - 16770 \cos 26^\circ 34' = 15000 \text{ daN,}$$

$$N_{54} \cos 63^\circ 26' + 7500 = 0; \quad N_{54} = -16770 \text{ daN.}$$

Mărimile eforturilor care se produc în fiecare bară și ariile secțiunilor sînt date în tabelul 1.7. Se observă că barele 3-4 și 5-6 servesc numai ca bare de legătură pentru menținerea stabilității, iar barele 1-2 și 2-4 sînt inutile.

Tabelul 1.7

Bara	N	N [daN]	A [cm ²]	σ_{nec} [cm]	σ_{ef} [mm]
1-2	0	0	—	—	—
1-3	0,499 P	15000	10,714	3,69	37
1-4	0,559 P	16770	11,978	3,9	39
2-4	0	0	—	—	—
3-4	0	0	—	—	—
3-5	0,499 P	15000	10,714	3,69	37
4-5	-0,559 P	-16770	11,978	3,9	39
4-6	P	30000	21,428	5,22	53
5-6	0	0	—	—	—

1.8. Să se verifice efortul unitar produs în diagonală unei grinzi cu zăbrele ca în figura 1.8 compusă din două corniere LI 75 × 100 × 7 (anexa 7), prinsă de guseu cu trei nituri de diametru 23 mm, știind că $N = 300$ kN.

Rezolvare. Secțiunea periculoasă este în dreptul primei găuri de nit:

$$A_b = 11,9 \cdot 2 = 23,8 \text{ cm}^2;$$

$$A_n = 23,8 - 0,7 \cdot 2,3 \cdot 2 = 20,58 \text{ cm}^2;$$

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_n} = \frac{30\,000}{20,58} = 1\,457 \text{ daN/cm}^2.$$

1.9. Secțiunea unei tijă de piston, slăbită prin pană, are forma din figura 1.9. Să se dimensioneze tija pentru o forță $N = 100$ kN, luând $\sigma_a = 800$ daN/cm².

Rezolvare.

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} = \frac{10\,000}{800} = 12,5 \text{ cm}^2; \quad A = \frac{\pi d^2}{4} - d \frac{d}{4} = 12,5;$$

$$d^2 = \frac{4 \cdot 12,5}{2,14} = 23,4 \text{ cm}^2; \quad d = 4,83 \text{ cm};$$

se alege: $d = 50$ mm. (Anexa 2)

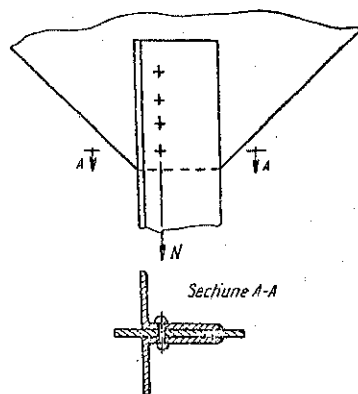


Fig. 1.8

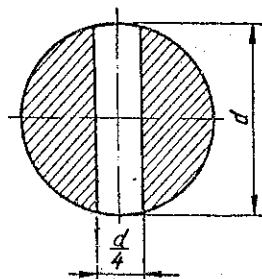


Fig. 1.9

1.10. Să se verifice la întindere o piesă de oțel având forma și dimensiunile din figura 1.10, dacă $P = 5\,000$ daN. Se va neglija efectul de concentrare al găurilor și al variației de secțiune. Cotele sînt date în milimetri.

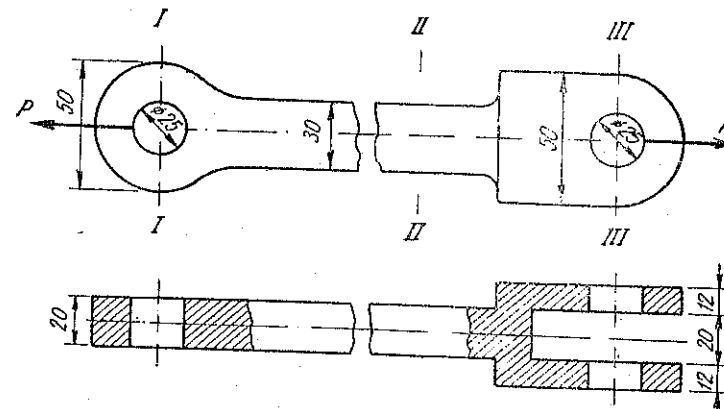


Fig. 1.10

Rezolvare. Se face verificarea în secțiunile I, II, III.

$$\sigma_I = \frac{5\,000}{(5 - 2,5) \cdot 2} = 1\,000 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_{II} = \frac{5\,000}{3 \cdot 2} = 833 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{III} = \frac{5\,000}{2(5 - 2,5) \cdot 1,2} = 833 \text{ daN/cm}^2.$$

Secțiunea I este cea mai solicitată.

1.11. Un ochi de macara, cu forma și dimensiunile principale indicate în figura 1.11, este încărcat cu sarcina $Q = 500$ kN. Să se dimensioneze eclisele E care formează brațele AB și AC ale ochiului de macara, luând $\sigma_a = 800$ daN/cm².

Rezolvare. Conform figurii 1.11, c:

$$Q = 2S \cos \alpha; \quad \tan \alpha = \frac{300}{750} = 0,4;$$

$$\alpha = 21^\circ 48'; \quad \cos \alpha = 0,9285;$$

$$S = \frac{Q}{2 \cos \alpha} = \frac{500}{2 \cdot 0,9285} = 269 \text{ kN}.$$

Brațul AB este format din două eclise de secțiune totală 2 bh.

$$A_{nec} = \frac{S}{\sigma_a} = \frac{26\,900}{800} = 33,6 \text{ cm}^2;$$

$$A_{nec} = 2bh = 33,6 \text{ cm}^2;$$

$$bh = \frac{33,6}{2} = 16,8 \text{ cm}^2.$$

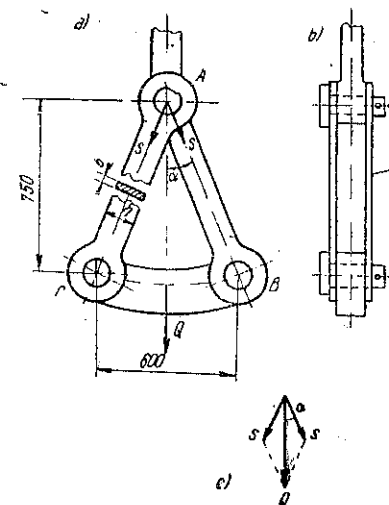


Fig. 1.11

Pentru determinarea dimensiunilor b și h se alege ca raport între ele $h = 4b$.

$$bh = b \cdot 4b = 4b^2 = 16,8;$$

$$b = \sqrt{\frac{16,8}{4}} = 2,05 \text{ cm}; \quad h = 4b = 8,20 \text{ cm}.$$

Se rotunjesc dimensiunile la milimetri întregi:

$$b = 21 \text{ mm}; \quad h = 82 \text{ mm}.$$

$$A_{ef} = 2bh = 2 \cdot 2,1 \cdot 8,2 = 34,4 \text{ cm}^2;$$

$$\sigma_{ef} = \frac{S}{A_{ef}} = \frac{26\,900}{34,4} = 782 \text{ daN/cm}^2.$$

1.12. O bară de oțel de lungime $l = 1 \text{ m}$, cu secțiune circulară, de diametru $D = 40 \text{ mm}$, este subțiată pe o lungime $l_1 = 20 \text{ cm}$ la diametrul $d = 20 \text{ mm}$. Știind că $\sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2$, se cere: a) să se determine efortul axial de întindere capabil; b) să se calculeze energia de deformare acumulată de bară; c) ce procent din energia totală de deformare se acumulează în porțiunea de bară subțiată?

Rezolvare. a) Ariile secțiunilor transversale:

$$A_1 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ cm}^2; \quad A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ cm}^2.$$

Secțiunea minimă ($A_2 = 3,14 \text{ cm}^2$) determină efortul axial de întindere capabil:

$$N_{cap} = A_2 \cdot \sigma_a = 3,14 \cdot 1\,400 = 4\,400 \text{ daN}.$$

b) Energia de deformare acumulată de bară se calculează cu formula (1.7):

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{N^2 dx}{EA} = \frac{1}{2} \frac{N^2(l-l_1)}{EA_1} + \frac{1}{2} \frac{N^2 l_1}{EA_2}.$$

Se obține:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\,400^2 \cdot 80}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 12,56} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\,400^2 \cdot 20}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 3,14} = 29,3 + 29,3 = 58,6 \text{ daN} \cdot \text{cm}.$$

c) Energia de deformare acumulată de porțiunea subțiată a barei reprezintă:

$$\frac{29,3}{58,6} \cdot 100 = 50\% \text{ din energia totală}.$$

Deși porțiunea subțiată reprezintă numai a 5-a parte din lungimea barei, ea acumulează jumătate din energia totală de deformare a barei.

1.13. Sistemul din figura 1.13, format din două bare de oțel: AB cu secțiunea $A_1 = 2 \text{ cm}^2$ și lungimea $l_1 = 5 \text{ cm}$ și CB cu secțiunea $A_2 = 1 \text{ cm}^2$ și lungimea $l_2 = 8,66 \text{ m}$, articulate în A , B și C , este solicitat de forța $P = 2\,000 \text{ daN}$. Să se verifice barele și să se calculeze deplasarea pe verticală și pe orizontală a punctului B .

Rezolvare. N_1 și N_2 sint eforturile în cele două bare. Din ecuațiile de proiecții:

$$N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ = P; \quad N_1 \sin 30^\circ - N_2 \sin 60^\circ = 0,$$

rezultă:

$$N_1 = P \cos 30^\circ = 2\,000 \cdot 0,866 = 1\,730 \text{ daN},$$

$$N_2 = P \sin 30^\circ = 2\,000 \cdot 0,5 = 1\,000 \text{ daN}.$$

Eforturile unitare în cele două bare sint:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{1\,730}{2} = 865 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{1\,000}{1} = 1\,000 \text{ daN/cm}^2.$$

Barele se vor deforma cu Δl_1 , respectiv Δl_2 .

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{A_1 E} = \frac{1\,730 \cdot 500}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2} = 0,206 \text{ cm},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{A_2 E} = \frac{1\,000 \cdot 866}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1} = 0,413 \text{ cm}.$$

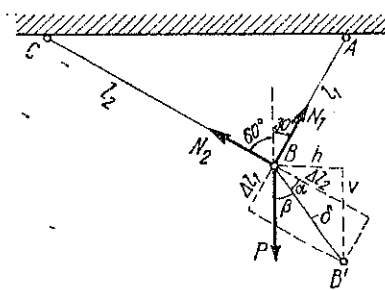


Fig. 1.13

Deplasarea totală $\overline{BB'} = \delta$:

$$\delta = \sqrt{\Delta l_1^2 + \Delta l_2^2} = \sqrt{0,206^2 + 0,413^2} = 0,462 \text{ cm},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{0,206}{0,413} = 0,5; \quad \alpha = 26^\circ 30';$$

$$\beta = 60^\circ - \alpha = 60^\circ - 26^\circ 30' = 33^\circ 30'.$$

Deplasările pe orizontală și pe verticală:

$$h = \delta \sin 33^\circ 30' = 0,462 \cdot 0,551 = 0,255 \text{ cm},$$

$$v = \delta \cos 33^\circ 30' = 0,462 \cdot 0,833 = 0,385 \text{ cm}.$$

1.14. Un profil I 40, lung de 15 m, este așezat orizontal pe sol (avind coeficientul de frecare $\mu = 0,45$) și este tras de la o extremitate cu forța N (Fig. 1.14).

Se cere: a) Să se determine valoarea limită a forței N până la care profilul nu se mișcă; b) Să se calculeze deformația datorită acestei forțe; c) Să se determine variația eforturilor unitare în lungul piesei.

Rezolvare. a). Datorită masei profilului, solul dezvoltă reacțiuni uniform repartizate, $p = 92,6 \text{ daN/m}$ (anexa 9). La o tendință de mișcare acestea produc o serie de forțe de frecare. Pe o lungime dx , forța de frecare elementară este $dF = \mu p \cdot dx$, unde $p \cdot dx$ este reacțiunea solului. Forța totală este:

$$N = \int_0^l dF = \int_0^l \mu p dx = \mu p \int_0^l dx = \mu pl = 0,45 \cdot 92,6 \cdot 15 = 625 \text{ daN}.$$

b) Lungirea unui element infinit mic dx este:

$$\Delta dx = \epsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx,$$

σ_x fiind efortul unitar într-o secțiune la distanța x de capăt. Forța axială, efortul unitar și deformația în secțiunea x , sînt:

$$N_x = \mu p x; \quad \sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{\mu p x}{A}; \quad \Delta dx = \frac{\mu p x}{A E} dx.$$

Deformația totală este

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \frac{\mu p x}{A E} dx = \frac{\mu p l^2}{2 A E} = \frac{N l}{2 A E} = \frac{625 \cdot 1500}{2 \cdot 118,2 \cdot 10^6} = 0,0019 \text{ cm}.$$

c) Efortul unitar variază liniar cu x , fiind zero cînd $x = 0$ și avînd valoarea maximă pentru $x = l$:

$$\sigma_{max} = \frac{\mu p l}{A} = \frac{N}{A} = \frac{625}{118} = 5,30 \text{ daN/cm}^2.$$

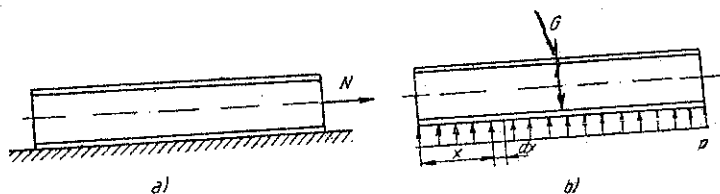


Fig. 1.14

1.15. Să se calculeze lungirea unui trunchi de con suspendat vertical, ca în figura 1.15 și solicitat la întindere cu o forță P . Se va neglija greutatea proprie.

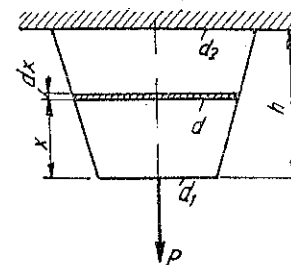


Fig. 1.15

Rezolvare. $\Delta dx = \epsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx;$

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi d^2/4}; \quad \Delta dx = \frac{P}{E \pi d^2/4} dx,$$

$$\Delta l = \int_0^h \Delta dx = \frac{4P}{E\pi} \int_0^h \frac{dx}{d^2} = \frac{4P}{E\pi} \int_0^h \frac{dx}{d^2}.$$

Diametrul d la distanța x este:

$$d = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{h} x.$$

Se obține:

$$\Delta l = \frac{4P}{E\pi} \int_0^h \frac{dx}{\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{h} x\right)^2} = \frac{4P}{E\pi} \cdot \frac{h}{d_2 - d_1} \left[\frac{-1}{d_1 + \frac{d_2 - d_1}{h} x} \right]_0^h = \frac{4Ph}{\pi d_1 d_2 E}.$$

1.16. O tijă de oțel de lungime $l = 100 \text{ m}$ este suspendată vertical ca în figura 1.16. Se cere:

a) să se dimensioneze tija, de secțiune circulară, solicitată de forța $P = 100 \text{ kN}$, aplicată în capătul liber, ținînd seama de greutatea proprie, materialul avînd $\sigma_a = 800 \text{ daN/cm}^2$;

b) să se determine deplasarea punctului B, aflat la distanța $l/3$ de la capătul de jos.

Rezolvare. a) Se aplică formula (1.9):

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_a - \gamma l} = \frac{10\,000}{800 - \frac{7,8}{1000} \cdot 10\,000} = 13,85 \text{ cm}^2,$$

$$\frac{\pi d^2}{4} = 13,85 \text{ cm}^2; \quad d = 4,2 \text{ cm}.$$

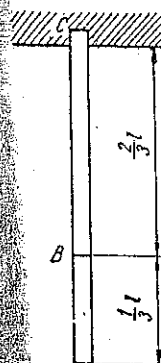


Fig. 1.16

b) Deplasarea punctului B este egală cu lungirea porțiunii BC:

$$\begin{aligned}\delta_B = \Delta_{BC} &= \frac{\left(P + \gamma A \frac{l}{3}\right) \frac{2}{3} l}{EA} + \frac{\gamma A \frac{2l}{3} \cdot \frac{2l}{6}}{EA} = \\ &= \frac{2}{3} \frac{Pl}{EA} + \frac{4}{9} \frac{\gamma l^2}{E} = \frac{2}{3} \frac{l}{E} \left(\frac{P}{A} + \frac{2}{3} \gamma l\right) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{10\,000}{2,1 \cdot 10^6} \left(\frac{10\,000}{13,85} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7,8}{1000} \cdot 10\,000\right) = 2,457 \text{ cm.}\end{aligned}$$

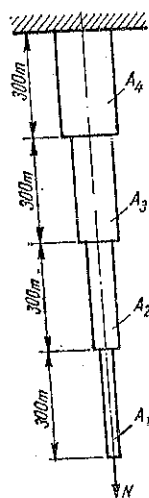


Fig. 1.17

1.17. Să se determine secțiunile unei tije de oțel (Fig. 1.17) lungă de 1 200 m, compusă din patru porțiuni care înlocuiesc bara de egală rezistență, supusă unei sarcini de întindere $N = 25 \text{ kN}$, precum și lungirea sa totală. Se dă $\sigma_a = 700 \text{ daN/cm}^2$ și $\gamma = 7,8 \text{ daN/dm}^3$.

Rezolvare. Aplicind formula (1.9), se găsește:

$$A_{1\text{ nec}} = \frac{N}{\sigma_a - \gamma l_1} = \frac{2\,500}{700 - 7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 30\,000} = 5,37 \text{ cm}^2$$

$$A_{2\text{ nec}} = \frac{N + A_1 \gamma l_1}{\sigma_a - \gamma l_2} = \frac{2\,500 + 1\,250}{466} = 8,05 \text{ cm}^2,$$

$$A_{3\text{ nec}} = \frac{3\,750 + 1\,880}{466} = 12,05 \text{ cm}^2,$$

$$A_{4\text{ nec}} = \frac{5\,630 + 2\,820}{466} = 18,13 \text{ cm}^2.$$

Din formula (1.10):

$$\Delta l_1 = \frac{1}{E} \left(\frac{N}{A} + \frac{\gamma l_1}{2}\right) l_1 = \frac{3 \cdot 10^4}{2,1 \cdot 10^6} \left[\frac{2\,500}{5,37} + \frac{7,8 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 3 \cdot 10^4\right] = 8,33 \text{ cm.}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_4 = \Delta l_1; \quad \Delta l = \Sigma \Delta l_i = 33,32 \text{ cm}$$

1.18. Un stîlp prismatic de zidărie, construit ca în figura 1.18, este solicitat la compresie cu forța $P = 270 \text{ kN}$. Înălțimea stîlpului este $l = 12 \text{ m}$. Dacă se dă $\gamma = 1\,600 \text{ daN/m}^3$ și $\sigma_a = 10 \text{ daN/cm}^2$ se cere să se determine volumul stîlpului și să se compare cu un stîlp solicitat identic în secțiunea periculoasă, dar de secțiune constantă.

Rezolvare. Se aplică formula (1.9):

$$A_{1\text{ nec}} = \frac{P}{\sigma_a - \gamma \frac{l}{2}} = \frac{27\,000}{10 - 1\,600 \cdot 10^{-6} \cdot 600} \approx 3\,000 \text{ cm}^2,$$

$$V_1 = 0,3 \cdot 6 = 1,800 \text{ m}^3;$$

$$G_1 = 1,800 \cdot 1\,600 = 2\,880 \text{ daN},$$

$$A_{2\text{ nec}} = \frac{P + G_1}{\sigma_a - \gamma \frac{l}{2}} = \frac{27\,000 + 2\,880}{10 - 1\,600 \cdot 10^{-6} \cdot 600} = 3\,310 \text{ cm}^2,$$

$$V_2 = 0,331 \cdot 6 = 1,986 \text{ m}^3; \quad G_2 = 1,986 \cdot 1\,600 = 3\,180 \text{ daN},$$

$$V = 1,800 + 1,986 = 3,786 \text{ m}^3.$$

În cazul stîlpului de secțiune constantă:

$$V = \frac{Pl}{\sigma_a - \gamma l} = \frac{27\,000 \cdot 12}{100\,000 - 1\,600 \cdot 12} = 4,000 \text{ m}^3.$$

Această soluție este neeconomică, deoarece cere cu 5% mai multă zidărie.

1.19. Un stîlp de fontă A, cu secțiunea inelară, este încărcat cu o forță axială $N = 250 \text{ kN}$ și se sprijină ca în figura 1.19. Între cele două diametre există relația $d = 0,8 D$. La baza stîlpului se află o placă de fontă B, cu baza un pătrat de latură a , care are rolul de a mări suprafața prin care fonta apasă pe beton, pentru a nu se depăși rezistența admisibilă a betonului. La rîndul său, fundația de beton C are o secțiune mai mare, un pătrat de latură b , spre a nu se depăși rezistența admisibilă a terenului. Se cere să se dimensioneze secțiunea stîlpului, suprafața bazei plăcii B și secțiunea fundației C, ținînd seamă și de greutatea proprie. Se dau: $h = 5 \text{ m}$, $c = a/2$, $e = b/2$,

$$\sigma_{a\text{ fontă}} = 700 \text{ daN/cm}^2, \quad \sigma_{a\text{ beton}} = 45 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{a\text{ teren}} = 3 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\gamma_{\text{fontă}} = 7,25 \text{ daN/dm}^3, \text{ (Anexa 3).}$$

$$\gamma_{\text{beton}} = 2\,200 \text{ daN/m}^3. \text{ (Anexa 3).}$$

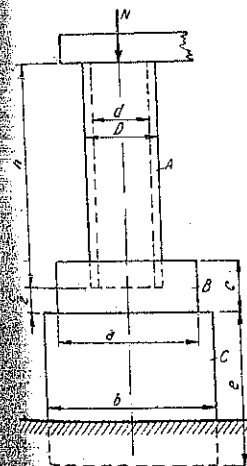


Fig. 1.19

Rezolvare. Se dimensionează stîlpul de fontă:

$$A'_{\text{neo}} = \frac{N}{\sigma_a - \gamma_{\text{fontă}} h} = \frac{25\,000}{700 - \frac{7,25}{1\,000} \cdot 500} = 35,9 \text{ cm}^2.$$

Influența greutății proprii este neglijabilă.

$$A' = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} [D^2 - (0,8D)^2] = 35,9 \text{ cm}^2.$$

Se obține:

$$D = 11,3 \text{ cm}$$

sau, cu valori rotunjite:

$$D = 11,5 \text{ cm}; \quad d = 0,8 D = 9,2 \text{ cm}.$$

Greutatea stîlpului este:

$$G_A = \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right) \gamma h = \left(\frac{\pi \cdot 11,5^2}{4} - \frac{\pi \cdot 9,2^2}{4} \right) \frac{7,25}{1\,000} \cdot 500 = 136 \text{ daN}.$$

Placa de fontă se dimensionează aproximind greutatea ei la $G_B = 50 \text{ daN}$; rezultă:

$$A''_{\text{neo}} = \frac{N + G_A + G_B}{\sigma_a \text{ beton}} = \frac{25\,000 + 136 + 50}{45} = 560 \text{ cm}^2;$$

$$a^2 = 560 \text{ cm}^2; \quad a = 23,7 \text{ cm}.$$

Se ia:

$$a = 24 \text{ cm}; \quad c = \frac{a}{2} = 12 \text{ cm}.$$

Greutatea reală a plăcii B este:

$$G_B = a^2 c \gamma_{\text{fontă}} = 24^2 \cdot 12 \cdot \frac{7,25}{1\,000} = 50 \text{ daN},$$

ceea ce corespunde cu aproximația făcută.

Pentru secțiunea fundației de beton, ținind seama de greutatea proprie, rezultă:

$$A'''_{\text{neo}} = \frac{N}{\sigma_a - \gamma e} = \frac{N + G_A + G_B}{\sigma_a - \gamma_{\text{beton}} e} = \frac{25\,000 + 136 + 50}{3 - 2,2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{b}{2}} = b^2,$$

de unde:

$$1,1 \cdot 10^{-3} b^3 - 3b^2 + 25\,186 = 0.$$

Prin încercări rezultă $b = 93 \text{ cm}$ sau aproximind:

$$b = 95 \text{ cm}; \quad e = 48 \text{ cm}.$$

$$G_C = 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,48 \cdot 2\,200 = 955 \text{ daN}.$$

$$\sigma_{ef} = \frac{N + G_A + G_B + G_C}{b^2} = \frac{25\,000 + 136 + 50 + 955}{95^2} = 2,9 \text{ daN/cm}^2 < 3 \text{ daN/cm}^2.$$

1.20. Un cablu de cupru, cu inima de oțel, este solicitat la întindere cu o forță $N = 1\,800 \text{ daN}$. Secțiunea de cupru este de $1,256 \text{ cm}^2$, realizată prin 10 fire cu diametrul de 4 mm . Să se determine secțiunea inimii de oțel, luind $\sigma_{a \text{ oțel}} = 1\,200 \text{ daN/cm}^2$ și să se verifice efortul unitar efectiv în firele de cupru. Se dau $E_{\text{oțel}} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$ și $E_{\text{cu}} = 1,15 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Se aplică relația (1.11) sub forma:

$$A_{\text{oțel}} = \frac{N}{\sigma_{a \text{ oțel}}} - A_{\text{cu}} \frac{E_{\text{cu}}}{E_{\text{oțel}}} = \frac{1\,800}{1\,200} - 1,256 \cdot \frac{1,15 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^6} = 0,82 \text{ cm}^2,$$

$$\sigma_{\text{cu}} = \frac{N}{A_{\text{cu}} + A_{\text{oțel}} \frac{E_{\text{oțel}}}{E_{\text{cu}}}} = \frac{1\,800}{1,256 + 0,82 \cdot \frac{2,1 \cdot 10^6}{1,15 \cdot 10^6}} = 653 \text{ daN/cm}^2.$$

1.21. Un stîlp de beton armat, de înălțime $l = 5 \text{ m}$, este supus unei forțe de compresiune $N = 400 \text{ kN}$. Să se dimensioneze stîlpul prin metoda rezistențelor admisibile și să se determine eforturile unitare din beton și oțel (fier) dacă se dau $A_f/A_b = 0,01$; $E_f/E_b = 15$; $\sigma_b = 40 \text{ daN/cm}^2$. Să se calculeze scurtarea stîlpului Δl , sub acțiunea sarcinii.

Rezolvare. Pentru ca betonul și oțelul să lucreze solidar, trebuie ca materialele să aibă deformații egale:

$$\Delta l = \frac{N_f l}{A_f E_f} = \frac{N_b l}{A_b E_b}; \quad \frac{N_f}{A_f E_f} = \frac{N_b}{A_b E_b} = \frac{N_f + N_b}{A_f E_f + A_b E_b} = \frac{N}{A_f E_f + E_b A_b},$$

$$N_b = \frac{N}{1 + \frac{A_f E_f}{A_b E_b}}.$$

Se notează: $\varphi = A_f/A_b$ și $n = E_f/E_b$,

$$N_b = \frac{N}{1 + \varphi n}; \quad \sigma_b = \frac{N_b}{A_b} = \frac{N}{(1 + \varphi n) A_b}; \quad A_b = \frac{N}{(1 + \varphi n) \sigma_b}.$$

La fel:

$$N_f = \frac{N}{1 + \frac{E_b A_b}{E_f A_f}}; \quad \sigma_f = \frac{N_f}{A_f} = \frac{N}{\left(1 + \frac{1}{\varphi n}\right) A_f}$$

În cazul aplicației numerice:

$$A_b = \frac{N}{(1 + \varphi n) \sigma_b} = \frac{40\,000}{(1 + 0,01 \cdot 15) 40} = 870 \text{ cm}^2$$

Din motive constructive, se alege:

$$A_b = 30 \cdot 30 = 900 \text{ cm}^2; \quad A_f = 0,01 \cdot 900 = 9 \text{ cm}^2$$

Se iau patru bare de oțel, cu diametrul $d = 18 \text{ mm}$:

$$A_f = 10,18 \text{ cm}^2$$

Verificarea eforturilor unitare:

$$\sigma_b = \frac{N}{\left(1 + \frac{A_f \cdot E_f}{A_b \cdot E_b}\right) A_b} = \frac{40\,000}{\left(1 + \frac{10,18}{900} \cdot 15\right) 900} = 38 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_f = \frac{N}{\left(1 + \frac{A_b \cdot E_b}{A_f \cdot E_f}\right) A_f} = \frac{40\,000}{\left(1 + \frac{900}{10,18} \cdot \frac{1}{15}\right) 10,18} = 570 \text{ daN/cm}^2$$

$$\Delta l = \frac{\sigma_b l}{E_b} = \frac{38 \cdot 500}{140\,000} = 0,136 \text{ cm}$$

1.22. La bara din oțel, cu secțiunea $A_2 = 2,77 A_1$, articulată la ambele capete, solicitată prin forțele din figura 1.22, se cere: a) să se calculeze reacțiunile din articulații; b) să se construiască diagrama forțelor axiale; c) să se dimensioneze bara cu secțiune circulară, luând $\sigma_t = 900 \text{ daN/cm}^2$ (Anexa 13); d) să se calculeze deplasarea punctului de aplicație al forțelor P_2 .

Rezolvare. a) Ecuația de proiecții:

$$H_1 - 2\,000 + 2 \cdot 4\,000 \cos 60^\circ - H_2 = 0; \quad H_1 - H_2 + 2\,000 = 0$$

Ținând seama că deformarea totală a barei este nulă rezultă:

$$\frac{H_1 \cdot 0,4}{EA_1} + \frac{(H_1 - 2\,000) \cdot 0,5}{EA_1} + \frac{(H_1 - 2\,000) \cdot 0,5}{E \cdot 2,77 A_1} + \frac{\left(H_1 - 2\,000 + 2 \cdot 4\,000 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot 0,6}{E \cdot 2,77 A_1} = 0,$$

$$H_1 = 715 \text{ daN}; \quad H_2 = 2\,715 \text{ daN}$$

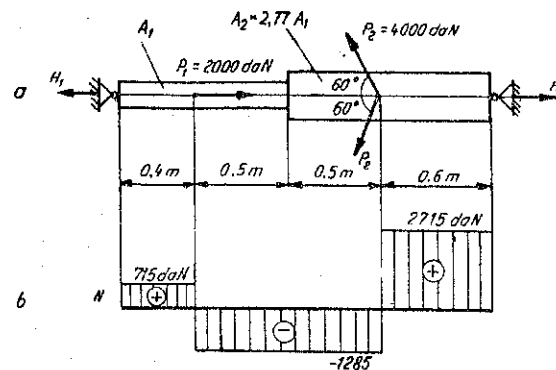


Fig. 1.22

b) Diagrama de forțe axiale este reprezentată în figura 1.22, b.

$$c) A_{\text{rec1}} = \frac{1\,285}{900} = 1,427 \text{ cm}^2; \quad \frac{\pi d_1^2}{4} = 1,427; \quad d_1 = 1,34 \text{ cm}$$

Se rotunjește la valoarea $d_1 = 1,4 \text{ cm}$.

$$A_2 = 2,77 A_1 = 2,77 \cdot 1,54 = 4,26 \text{ cm}^2; \quad d_2 = 2,33 \text{ cm}$$

$$d) \Delta l = \frac{2\,715 \cdot 60}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 4,26} = 0,018 \text{ cm}$$

Deplasarea este spre stînga.

1.23. O bară de secțiune variabilă (Fig. 1.23) formată din trei porțiuni de lungimi egale l , avînd secțiunea A pe porțiunile BC și DE și $2A$ pe porțiunea CD , este rezemată în capetele B și E . Să se afle cele două reacțiuni V_B și V_E date de greutatea proprie a barei, γ fiind greutatea specifică a materialului.

Rezolvare.

$$V_B + V_E = Al\gamma + 2Al\gamma + Al\gamma = 4Al\gamma$$

Dacă nu ar exista reazemul E , bara s-ar lungi cu:

$$\Delta' = \Delta_{BC} + \Delta_{CD} + \Delta_{DE}$$

$$\Delta_{DE} = \frac{\gamma l^2}{2E}; \quad \Delta_{CD} = \frac{\gamma l^2}{2E} + \frac{(Al\gamma)l}{2EA} = \frac{\gamma l^2}{E};$$

$$\Delta_{BC} = \frac{\gamma l^2}{2E} + \frac{(Al\gamma + 2Al\gamma)l}{EA} = \frac{7\gamma l^2}{2E};$$

$$\Delta' = \frac{\gamma l^2}{2E} + \frac{\gamma l^2}{E} + \frac{7\gamma l^2}{2E} = \frac{5\gamma l^2}{E}$$

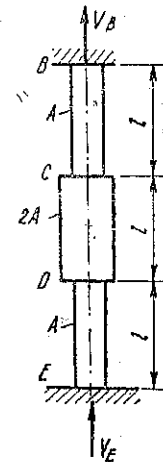


Fig. 1.23

Reacțiunea V_E produce o deformare de sens contrar :

$$\Delta'' = \frac{V_E l}{EA} + \frac{V_E l}{2EA} + \frac{V_E l}{EA} = \frac{5V_E l}{2EA}$$

Deformațiile Δ' și Δ'' sint egale :

$$\frac{5\gamma l^2}{E} = \frac{5V_E l}{2EA}; \quad V_E = 2Al\gamma; \quad V_E = 4Al\gamma - V_E = 2Al\gamma.$$

1.24. O bară de oțel, cu secțiune în trepte, este solicitată de o forță P , ca în figura 1.24, a.

a) Știind că între capătul de jos al barei și reazemul inferior este un spațiu $\delta = 1,5$ mm, să se găsească la ce valoare a forței P , capătul barei atinge reazemul de jos. b) Să se determine efortul unitar maxim care se produce în bară cînd forța P atinge valoarea $P' = 60\,000$ daN. Se dă $A = 15$ cm². Se neglijează greutatea proprie a barei.

Rezolvare. a) Porțiunea $l_2 + l_3$ este solicitată la întindere, iar porțiunea l_1 nu este solicitată :

$$\delta = \frac{Pl_2}{3EA} + \frac{Pl_3}{4EA}$$

$$P = \frac{\delta \cdot EA}{\frac{l_2}{3} + \frac{l_3}{4}} = \frac{0,15 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 15}{\frac{210}{3} + \frac{160}{4}} = 42\,950 \text{ daN.}$$

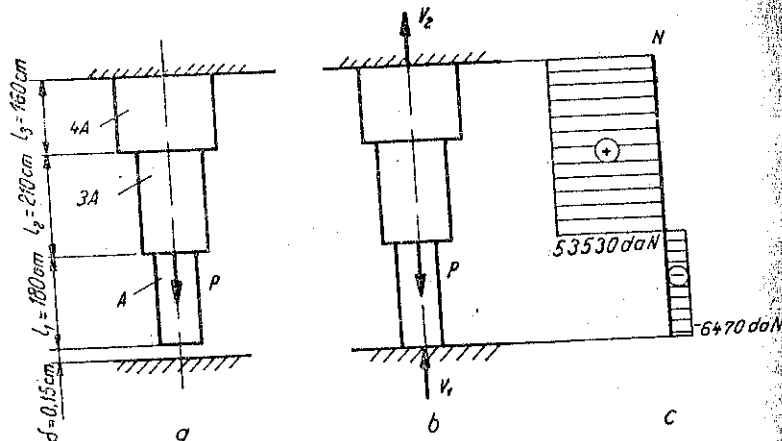


Fig. 1.24

b) Deoarece $P' > P$, capătul de jos al barei atinge reazemul inferior, deci problema devine static nedeterminată. Ecuația de proiecții dă :

$$V_1 + V_2 = P'$$

Suma deformațiilor porțiunii $l_2 + l_3$, datorită forței axiale V_2 și porțiunii l_1 , datorită forței axiale $V_2 - P'$, trebuie să fie egală cu spațiul δ :

$$\frac{V_2 l_3}{4EA} + \frac{V_2 l_2}{3EA} + \frac{(V_2 - P') l_1}{EA} = \delta,$$

$$V_2 = \frac{\delta EA + P' l_1}{\frac{l_3}{4} + \frac{l_2}{3} + l_1} = \frac{0,15 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 15 + 60\,000 \cdot 180}{\frac{160}{4} + \frac{210}{3} + 180} = 53\,530 \text{ daN,}$$

$$V_1 = 60\,000 - 53\,530 = 6\,470 \text{ daN.}$$

$$\sigma_{max} = \frac{V_2}{3A} = \frac{53\,530}{3 \cdot 15} = 1\,189 \text{ daN/cm}^2.$$

1.25. Pentru bara din figura 1.25 să se calculeze deplasarea secțiunii 3-3. Să se calculeze energia de deformare, acumulată de bară. Aplicație numerică pentru : $P = 2\,000$ daN ;

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2; \quad A_1 = 3 \text{ cm}^2;$$

$$A_2 = 1,5 \text{ cm}^2; \quad a = 20 \text{ cm.}$$

Rezolvare. $V_2 = V_1 + P$,

$$\frac{V_1 a}{EA_2} + \frac{(V_1 - P) 2a}{EA_2} + \frac{(V_1 - P) a}{EA_1} + \frac{(V_1 + 2P) a}{EA_1} + \frac{(V_1 + P) a}{EA_1} = 0,$$

$$V_1 = \frac{2P \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right)}{3 \left(\frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_1} \right)}, \quad V_2 = \frac{P \left(\frac{5}{A_2} + \frac{1}{A_1} \right)}{3 \left(\frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_1} \right)}.$$

Cu datele numerice :

$$V_1 = \frac{2 \cdot 2\,000 \left(\frac{1}{1,5} - \frac{1}{3} \right)}{3 \left(\frac{1}{1,5} + \frac{1}{3} \right)} = 444 \text{ daN,} \quad V_2 = \frac{2\,000 \left(\frac{5}{1,5} + \frac{1}{3} \right)}{3 \left(\frac{1}{1,5} + \frac{1}{3} \right)} = 2\,444 \text{ daN.}$$

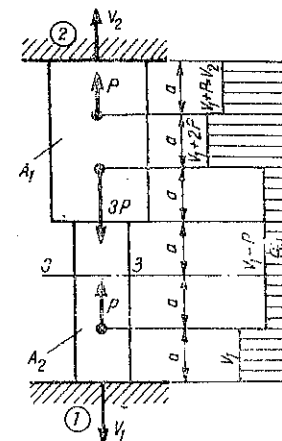


Fig. 1.25

Deplasarea secțiunii 3-3 va fi:

$$\delta_3 = \frac{V_1 a}{EA_2} + \frac{(V_1 - P) a}{EA_2} = \frac{a(2V_1 - P)}{EA_2} = \frac{(2 \cdot 444 - 2000) 20}{2 \cdot 10^6 \cdot 1,5} = 7,41 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

Energia de deformare:

$$U = \frac{V_1^2 a}{2EA_2} + \frac{(V_1 - P)^2 2a}{2EA_2} + \frac{(V_1 - P)^2 a}{2EA_1} + \frac{(V_1 + 2P)^2 a}{2EA_1} + \frac{(V_1 + P)^2 a}{2EA_1} =$$

$$= \frac{a}{2EA_2} [V_1^2 + 2(V_1 - P)^2] + \frac{a}{2EA_1} [(V_1 - P)^2 + (V_1 + 2P)^2 + (V_1 + P)^2].$$

Cu datele numerice:

$$U = \frac{20}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1,5} [444^2 + 2 \cdot 1556^2] + \frac{20}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3} [1556^2 + 4444^2 + 2444^2] = 63,75 \text{ daN cm.}$$

1.26. Un bulon de oțel M24 strânge o țevă de aluminiu ca în figura 1.26. Piulița este înșurubată pînă cînd rondeața atinge țeava, după care se mai strânge piulița cu încă un sfert de tură. Se cere să se calculeze efortul unitar produs în bulon și în țevă, știind că pasul filetelui este $p = 0,75 \text{ mm}$ și $E_{Al} = 0,7 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$.

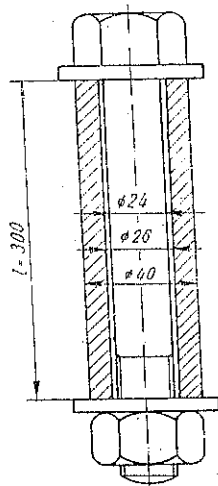


Fig. 1.26

Rezolvare. Prin strângerea piuliței, bulonul se lungeste, iar țeava se comprimă. Suma deformațiilor celor două piese reprezintă deplasarea de un sfert de pas a piuliței. Notînd cu N forța care apare prin strângere, se poate scrie relația:

$$\frac{Nl}{E_{Al} A_{Al}} + \frac{Nl}{E_{Ol} A_{Ol}} = \frac{p}{4}, \quad N = \frac{p}{4l} \cdot \frac{E_{Ol} A_{Ol}}{1 + \frac{E_{Ol} A_{Ol}}{E_{Al} A_{Al}}}$$

$$N = \frac{0,075}{4 \cdot 30} \cdot \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 4,52}{1 + \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 4,52}{0,7 \cdot 10^6 \cdot 7,25}} = 2066 \text{ daN,}$$

$$\sigma_{Ol} = \frac{N}{A_{Ol}} = \frac{2066}{4,52} = 457 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{Al} = \frac{N}{A_{Al}} = \frac{2066}{7,25} = 285 \text{ daN/cm}^2.$$

1.27. Să se calculeze eforturile unitare în barele sistemului din figura 1.27, grinda orizontală fiind presupusă rigidă.

Rezolvare. Ecuațiile de echilibru ale grinzii 1-2-3 sînt:

— ecuația de proiecții pe verticală

$$T_1 \cos 45^\circ + T_2 \cos 45^\circ + T_3 \cos 60^\circ = P;$$

— ecuația de proiecții pe orizontală

$$T_1 \cos 45^\circ - T_2 \cos 45^\circ + T_3 \cos 30^\circ = 0;$$

— ecuația de momente în raport cu 2

$$5T_1 \cos 45^\circ - 3P = 0.$$

Se obține:

$$T_1 = \frac{3\sqrt{2}}{5} P = \frac{3\sqrt{2}}{5} 20000 = 17000 \text{ daN};$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot P}{5\sqrt{2}} \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right) = \frac{2 \cdot 20000}{5\sqrt{2}} \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right) = 13400 \text{ daN};$$

$$T_3 = - \frac{2P}{5(1 + \sqrt{3})} = - \frac{2 \cdot 20000}{5(1 + \sqrt{3})} = -2940 \text{ daN.}$$

Eforturile unitare sînt:

$$\sigma_1 = \frac{17000}{19,63} = 866 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = \frac{13400}{14,2} = 944 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_3 = - \frac{2940}{18,3} = -160 \text{ daN/cm}^2.$$

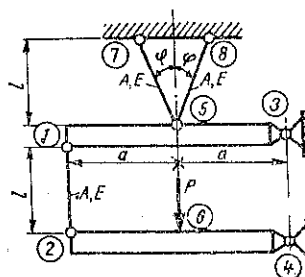


Fig. 1.28

1.28. Să se calculeze pentru sistemul din figura 1.28 deplasările pe verticală ale punctelor 2 și 6, barele 1-3 și 2-4 fiind considerate rigide.

Rezolvare. Echilibrul barei 2-4 arată că în bara verticală 1-2 acționează o forță verticală $P/2$. Echilibrul barei 1-3 duce la concluzia că rezultanta forțelor din barele înclinate 5-7 și 5-8 este o forță verticală P , aplicată în punctul 5.

Barele 7-5, 8-5 sînt solicate de cîte o forță de întindere egală cu $\frac{P}{2 \cos \varphi}$.

Lungirile barelor 7-5, 8-5 sînt egale cu :

$$\frac{P}{2 \cos \varphi} \cdot \frac{l}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{EA} = \frac{Pl}{2EA \cos^2 \varphi}.$$

Deplasările pe verticală ale punctelor 5, 1, 2 și 6 sînt :

$$\delta_5 = \frac{Pl}{2EA \cos^3 \varphi}; \quad \delta_1 = \frac{Pl}{EA \cos^3 \varphi};$$

$$\delta_2 = \frac{Pl}{EA \cos^3 \varphi} + \frac{Pl}{2EA} = \frac{Pl}{EA} \left(\frac{1}{\cos^3 \varphi} + 1 \right); \quad \delta_6 = \frac{Pl}{2EA} \left(\frac{1}{\cos^3 \varphi} + 1 \right).$$

1.29. Două bare AB și BC , identice, cu secțiunea A și cu lungimea $AB = BC = l$, așezate în prelungire și orizontal, ca în figura 1.29, sînt articulate în punctul B . Să se dimensioneze barele de oțel, cu $\sigma_a = 1\,000$ daN/cm², dacă în punctul B se aplică o forță verticală $P = 1\,000$ daN.

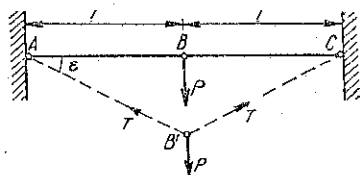


Fig. 1.29

Rezolvare. Se studiază deformația datorită forței P . Ecuația de proiecții pe verticală pentru forțele din punctul B' este :

$$2T \sin \varepsilon = P; \quad \sin \varepsilon = \frac{BB'}{AB'}.$$

Notînd cu Δl lungirea barei AB , se poate scrie :

$$\overline{AB'} = l + \Delta l = l + \frac{Tl}{EA} = l + \frac{\sigma l}{E} = l \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right),$$

$$\overline{BB'} = \sqrt{\overline{AB'}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{l^2 \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right)^2 - l^2} = \frac{l}{E} \sqrt{\sigma(2E + \sigma)},$$

$$\sin \varepsilon = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = \frac{\frac{l}{E} \sqrt{\sigma(2E + \sigma)}}{l \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right)} = \frac{\sqrt{\sigma(2E + \sigma)}}{E + \sigma},$$

$$2T \frac{\sqrt{\sigma(2E + \sigma)}}{E + \sigma} = P; \quad \frac{2\sigma \sqrt{\sigma(2E + \sigma)}}{E + \sigma} A = P; \quad A_{nec} = \frac{P(E + \sigma_a)}{2\sigma_a \sqrt{\sigma_a(2E + \sigma_a)}}.$$

σ_a fiind neglijabil pe lângă E , se poate obține o relație simplificată :

$$A_{nec} = \frac{PE}{2\sigma_a \sqrt{2\sigma_a E}} = \frac{P\sqrt{E}}{2,82\sigma_a \sqrt{\sigma_a}}.$$

În cazul aplicației numerice, rezultă :

$$A_{nec} = \frac{1\,000 \sqrt{2,1 \cdot 10^6}}{2,82 \cdot 1\,000 \cdot \sqrt{1\,000}} = 16,25 \text{ cm}^2,$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 16,25}{\pi}} = 4,45 \text{ cm}; \quad d \approx 45 \text{ mm}.$$

1.30. O greutate $P = 100$ kN este legată de o bară rigidă și suspendată prin trei fire de oțel cu lungimile egale și secțiunile $A_1 = 5$ cm², $A_2 = 8$ cm² și $A_3 = 3$ cm², așezate ca în figura 1.30. Să se afle eforturile în fire.

Rezolvare. $T_1 + T_2 + T_3 = P,$

$$T_1 a = T_3 a; \quad T_1 = T_3.$$

Lungirile celor trei fire :

$$\Delta l_1 = \frac{T_1 l}{A_1 E}; \quad \Delta l_2 = \frac{T_2 l}{A_2 E}; \quad \Delta l_3 = \frac{T_3 l}{A_3 E}.$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + a \tan \alpha; \quad \Delta l_3 = \Delta l_1 + 2a \tan \alpha,$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{a},$$

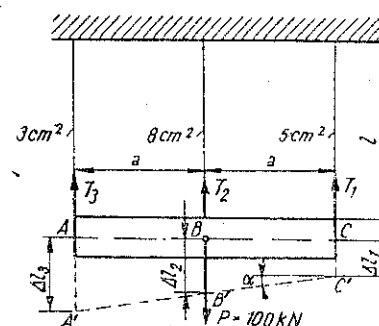


Fig. 1.30

apoi, înlocuind, rezultă :

$$\Delta l_3 = \Delta l_1 + 2a \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{a} \text{ sau } \Delta l_3 - 2\Delta l_2 + \Delta l_1 = 0,$$

$$\frac{T_3 l}{A_3 E} - \frac{2T_2 l}{A_2 E} + \frac{T_1 l}{A_1 E} = 0, \quad \frac{T_3}{3} - \frac{T_2}{4} + \frac{T_1}{5} = 0.$$

Rezolvînd ecuațiile, rezultă :

$$T_1 = T_3 = 0,242 P = 24,2 \text{ kN}; \quad T_2 = 0,516 P = 51,6 \text{ kN}.$$

1.31. O grindă rigidă AB , avînd greutatea G , este suspendată de tavan cu ajutorul a trei bare de oțel cu secțiuni egale. La montaj se constată că barele laterale au lungimea $l_1 = 2,5$ m, iar bara din mijloc, din

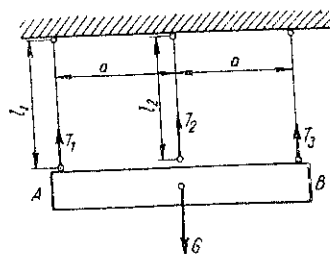


Fig. 1.31

cauza unei erori de execuție, este mai scurtă cu $\Delta l = 2,5 \text{ mm}$. Bara se montează totuși forțat. Să se găsească efortul unitar produs în cele trei bare, dacă se dau $G = 3000 \text{ daN}$ și $A = 4 \text{ cm}^2$. Să se compare valorile obținute cu eforturile unitare care ar lua naștere dacă cele trei bare ar avea aceeași lungime (Fig. 1.31).

Rezolvare.

$$T_1 = T_3, \quad 2T_1 + T_2 = G. \quad (1)$$

După deformarea barelor, grinda AB rămâne tot orizontală, deci lungimile celor trei bare deformate trebuie să fie egale. Notînd cu Δl_1 deformația barelor laterale și cu Δl_2 pe a celei mijlocii se poate scrie:

$$l_1 + \Delta l_1 = l_2 + \Delta l_2, \quad \frac{T_2 l_2}{EA} - \frac{T_1 l_1}{EA} = \Delta l, \quad (2)$$

$$\text{unde } \Delta l = l_1 - l_2.$$

Din ecuațiile (1) și (2) se obține, cu simplificarea $l_1 \approx l_2 \approx l$:

$$T_1 = \frac{Gl - \Delta l \cdot EA}{3l} = \frac{G}{3} - \frac{\Delta l \cdot EA}{3l}, \quad (3)$$

$$T_2 = \frac{Gl + 2\Delta l \cdot EA}{3l} = \frac{G}{3} + \frac{2\Delta l \cdot EA}{3l}, \quad (4)$$

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A} = \frac{G}{3A} - \frac{\Delta l \cdot E}{3l}, \quad \sigma_2 = \frac{T_2}{A} = \frac{G}{3A} + \frac{2\Delta l \cdot E}{3l}. \quad (5)$$

Cu datele numerice, se obține:

$$\sigma_1 = \frac{3000}{3 \cdot 4} - \frac{0,25 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{3 \cdot 250} = -450 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{3000}{3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{3 \cdot 250} = 1650 \text{ daN/cm}^2.$$

Barele exterioare sînt comprimate, iar cea din mijloc, întinsă. Cînd barele sînt executate corect, $l_1 = l_2$, deci $\Delta l = 0$. Din formulele (5) rezultă:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{G}{3A} = \frac{3000}{3 \cdot 4} = 250 \text{ daN/cm}^2.$$

1.32. Două sisteme de bare, ca în figura 1.32, fiecare format din trei bare de oțel de aceeași secțiune $A = 1 \text{ cm}^2$, trebuie asamblate forțat dacă există jocul $\delta = 1 \text{ mm}$. Să se determine eforturile care se produc în bare după ce s-a executat montajul forțat. Se cunosc:

$$\alpha = 60^\circ, \quad \beta = 30^\circ.$$

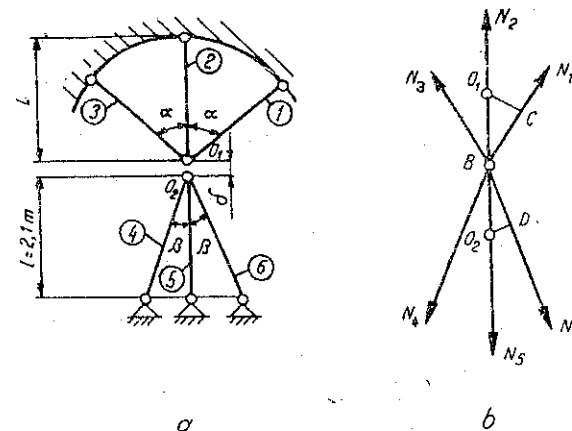


Fig. 1.32

Rezolvare. Conform figurii 1.32, b, după montaj punctele O_1 și O_2 ajung în B:

$$BC = \frac{N_1 l}{EA}, \quad O_1 B = \frac{N_2 l}{EA}, \quad BC = O_1 B \cos \alpha, \quad \frac{N_1 l}{EA} = \frac{N_2 l}{EA} \cos \alpha; \quad N_1 = N_2 \cos \alpha. \quad (1)$$

$$BD = \frac{N_6 l \cos \beta}{EA}, \quad O_2 B = \frac{N_5 l}{EA}, \quad BD = O_2 B \cos \beta, \quad \frac{N_6 l}{EA \cos \beta} = \frac{N_5 l}{EA} \cos \beta; \quad N_6 = N_5 \cos^2 \beta. \quad (2)$$

$$\begin{cases} N_1 = N_3; & N_4 = N_6, \\ N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha - N_4 \cos \beta - N_5 - N_6 \cos \beta = 0, \\ 2N_1 \cos \alpha + N_2 - 2N_6 \cos \beta - N_5 = 0, \\ N_1 = N_2 \cos \alpha, \\ N_6 = N_5 \cos^2 \beta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2N_2 \cos^2 \alpha + N_2 - 2N_5 \cos^3 \beta - N_5 = 0, \\ \frac{N_2 l}{EA} + \frac{N_5 l}{EA} = \delta, \\ (2 \cos^2 60^\circ + 1)N_2 - (2 \cos^3 30^\circ + 1)N_5 = 0, \\ N_2 + N_5 = \frac{\delta \cdot EA}{l} \end{cases}$$

Rezolvind sistemul, rezultă:

$$\begin{aligned} N_2 &= 605 \text{ daN}; & N_5 &= 395 \text{ daN}; \\ N_1 &= N_3 = 303 \text{ daN}; & N_4 &= N_6 = 296 \text{ daN}. \end{aligned}$$

1.33. Sistemul format din trei bare identice, ca în figura 1.33, este solicitat cu forța P . Se cere: a) Să se dimensioneze barele, din oțel, de secțiune circulară, cu $\sigma_a = 1100 \text{ daN/cm}^2$; b) Să se calculeze deplasarea punctului de aplicare al forței P . Se dă: $\alpha = 30^\circ$; $P = 10\,000 \text{ daN}$; $l = 0,5 \text{ m}$; $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Ecuațiile de proiecții dau:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_2, & (1) \\ -2N_1 \cos \alpha + P - N_3 &= 0. & (2) \end{aligned}$$

După solicitare, conform figurii 1.33, b, punctul O ajunge în O_1 ,

$$O_1O = \Delta l_3; \quad OC = \Delta l_1; \quad \Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha, & (3)$$

$$\frac{N_1 \frac{l}{\cos \alpha}}{EA} = \frac{N_3 l}{EA} \cos \alpha; \quad N_1 = N_3 \cos^2 \alpha. & (4)$$

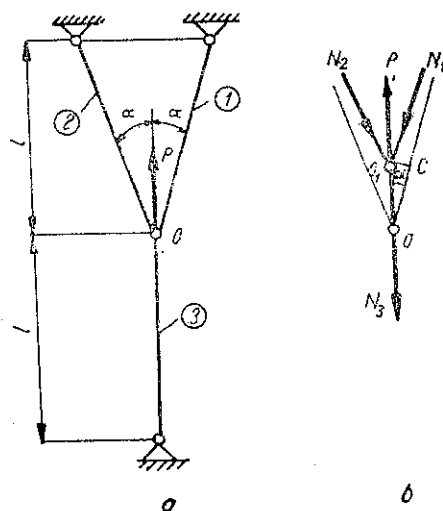


Fig. 1.33

Rezolvind sistemul de ecuații (2) și (4), rezultă

$$\begin{aligned} N_3 &= \frac{P}{2 \cos^2 \alpha + 1} = \frac{10\,000}{2,299} = 4\,350 \text{ daN}, \\ N_1 &= N_2 = 3\,262 \text{ daN}. \end{aligned}$$

$$a) A_{nec} = \frac{4350}{1100} = 3,95 \text{ cm}^2; \quad d = 2,24 \text{ cm}.$$

Se alege $d = 2,2 \text{ cm}$ (Anexa 2), deci $A = 3,8 \text{ cm}^2$.

b) Deplasarea OO_1 este:

$$\delta = \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA} = \frac{4\,350 \cdot 50}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 3,8} = 0,027 \text{ cm}.$$

1.34. O placă pătrată rigidă este solicitată de o sarcină concentrată P , aplicată într-un punct M pe una din diagonalele pătratului de latura a , format de cele patru picioare (Fig. 1.34, a, b). Să se determine mărimea eforturilor în cele patru picioare.

Rezolvare. N_1, N_2, N_3 și N_4 sînt reacțiunile în cele patru picioare.

1) Momente față de axa $x-x$:

$$N_2 \frac{a\sqrt{2}}{2} - N_4 \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0; \quad N_2 = N_4. & (1)$$

2) Momente față de axa $y-y$:

$$N_1 \frac{a\sqrt{2}}{2} - N_3 \frac{a\sqrt{2}}{2} + Pl = 0. & (2)$$

3) Proiecții pe axa $z-z$:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - P = 0. & (3)$$

Pentru a găsi a patra ecuație necesară, se presupune că placa se deplasează ca în figura 1.34, c, rămînînd plană.

Din trapezul $\alpha\alpha'\gamma\gamma'$ rezultă:

$$\Delta l_2 = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_3}{2}$$

Înlocuind expresiile deformațiilor, notînd cu A secțiunea unui picior și cu E modulul său de elasticitate, se găsește:

$$\frac{N_2 h}{AE} = \frac{N_1 h}{AE} + \frac{N_3 h}{AE}$$

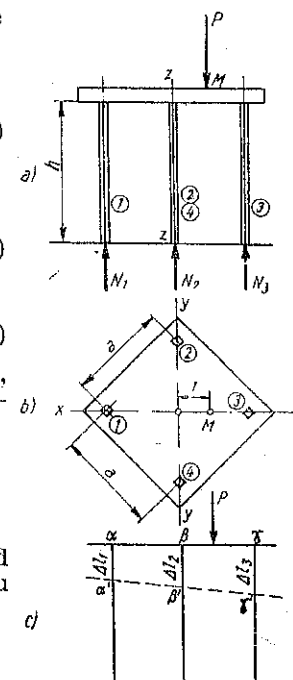


Fig. 1.34

sau:

$$N_1 + N_3 = 2N_2 \quad (4)$$

Din ecuațiile (1), (2), (3) și (4) rezultă:

$$4N_2 - P = 0; \quad N_2 = \frac{P}{4} = N_4.$$

$$N_3 - N_1 = \frac{2Pl}{a\sqrt{2}}; \quad N_3 + N_1 = 2N_2 = \frac{P}{2}$$

$$N_3 = P \left(\frac{1}{4} + \frac{l}{a\sqrt{2}} \right); \quad N_1 = P \left(\frac{1}{4} - \frac{l}{a\sqrt{2}} \right).$$

Aplicație numerică: $P = 50$ daN, $a = 100$ cm, $l = 20$ cm.

$$N_1 = P \left(\frac{1}{4} - \frac{l}{a\sqrt{2}} \right) = 50 \left(\frac{1}{4} - \frac{20}{100 \cdot 1,41} \right) = 5,45 \text{ daN},$$

$$N_2 = \frac{P}{4} = \frac{50}{4} = 12,5 \text{ daN},$$

$$N_3 = P \left(\frac{1}{4} + \frac{l}{a\sqrt{2}} \right) = 50 \left(\frac{1}{4} + \frac{20}{100 \cdot 1,41} \right) = 19,55 \text{ daN}.$$

Piciorul 3 este cel mai încărcat.

1.35. Sistemul de trei bare de oțel din figura 1.35 este montat la temperatura $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Se dau: $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = 2A$, $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm², $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ (Anexa 4). Să se determine mărimea eforturilor unitare care se produc în bare dacă temperatura ansamblului crește la $t_1 = 60^\circ\text{C}$.

Rezolvare. Datorită variației de temperatură, se produc în bare eforturile N_1, N_2, N_3 .

Ecuația de proiecții pe verticală:

$$N_1 \cos \theta + N_2 \cos \beta = 0.$$

Între deformațiile barelor 1 și 2 se poate scrie relația:

$$\frac{\Delta l_1}{\cos \theta} = \frac{\Delta l_2}{\cos \beta}; \quad \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}};$$

$$\left(l_1 \alpha \Delta t + \frac{N_1 l_1}{EA} \right) \cos \beta = \left(l_2 \alpha \Delta t + \frac{N_2 l_2}{2EA} \right) \cos \theta$$

$$l_1 = a\sqrt{10}; \quad l_2 = a\sqrt{13}$$

$$\begin{cases} 10 N_1 - 6,5 N_2 = 3 EA \alpha \Delta t \\ \frac{3}{\sqrt{10}} N_1 + \frac{3}{\sqrt{13}} N_2 = 0 \end{cases}$$

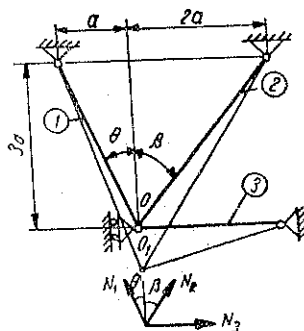


Fig. 1.35

Rezolvind sistemul, rezultă:

$$N_1 = \frac{-3EA\alpha\Delta t}{17,4}; \quad N_2 = \frac{3EA\alpha\Delta t}{15,27},$$

de unde:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{-3EA\alpha\Delta t}{17,4} = \frac{-3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 40}{17,4} = -173,8 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{3EA\alpha\Delta t}{30,54} = \frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 40}{30,54} = 99 \text{ daN/cm}^2.$$

Dilatarea barei 3 este împiedicată, deci:

$$\sigma = E\alpha\Delta t = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 1008 \text{ daN/cm}^2.$$

1.36. Să se calculeze eforturile unitare care se produc în cele trei materiale din care sunt făcute barele din figura 1.36, dacă se produce o încălzire $\Delta t = 40^\circ\text{C}$. Se cunoaște: $\delta = 0,53$ mm, $l = 80$ cm; $A = 10$ cm²; $\alpha_{OL} = 12 \cdot 10^{-6}$; $\alpha_{Cu} = 17 \cdot 10^{-6}$ (Anexa 4); $\alpha_{Al} = 24 \cdot 10^{-6}$ (Anexa 4); $E_{OL} = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm²; $E_{Cu} = 1,15 \cdot 10^6$ daN/cm²; $E_{Al} = 0,7 \cdot 10^6$ daN/cm².

Rezolvare. Variația de temperatură la care bara se poate dilata liber se obține din relația:

$$\alpha_{Al}l\Delta t' + \alpha_{OL}l\Delta t' + \alpha_{Cu}l\Delta t' = \delta$$

$$\Delta t' = \frac{\delta}{l(\alpha_{Al} + \alpha_{OL} + \alpha_{Cu})} = \frac{0,053}{80(17 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 10^{-6} + 24 \cdot 10^{-6})} = 12,5^\circ\text{C}.$$

Solicitarea de compresie este datorită variației de temperatură $\Delta t'' = \Delta t - \Delta t' = 27,5^\circ\text{C}$:

$$\alpha_{Al}l\Delta t'' + \alpha_{OL}l\Delta t'' + \alpha_{Cu}l\Delta t'' =$$

$$= \frac{Nl}{E_{Al}A_{Al}} + \frac{Nl}{E_{OL}A_{OL}} + \frac{Nl}{E_{Cu}A_{Cu}},$$

$$N = \frac{\Delta t''(\alpha_{Al} + \alpha_{OL} + \alpha_{Cu})}{\frac{1}{E_{Al}A_{Al}} + \frac{1}{E_{OL}A_{OL}} + \frac{1}{E_{Cu}A_{Cu}}} =$$

$$= \frac{\Delta t''(\alpha_{Al} + \alpha_{OL} + \alpha_{Cu})}{\frac{1}{2E_{Al}A} + \frac{1}{E_{OL}A} + \frac{1}{3E_{Cu}A}},$$

$$N = \frac{27,5(24 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 10^{-6} + 17 \cdot 10^{-6})}{\frac{1}{2 \cdot 0,7 \cdot 10^6 \cdot 10} + \frac{1}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 10} + \frac{1}{3 \cdot 1,15 \cdot 10^6 \cdot 10}} = 9850 \text{ daN},$$

$$\sigma_{Al} = \frac{N}{2A} = \frac{9850}{20} = 492,5 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_{OL} = \frac{N}{A} = 985 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{Cu} = \frac{N}{3A} = \frac{9850}{30} = 328 \text{ daN/cm}^2.$$

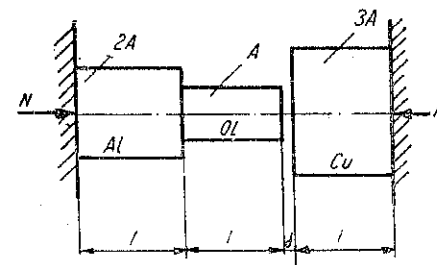


Fig. 1.36

1.37. Se dă ansamblul de două piese din figura 1.37: una din cupru cu aria secțiunii transversale $A_{Cu} = 10 \text{ cm}^2$ și cealaltă din oțel, cu $A_{OL} = 20 \text{ cm}^2$. Să se determine eforturile unitare care se produc în cele două piese, în următoarele variante: 1) se comprimă cu forța $P = 20\,000 \text{ daN}$ (Fig. 1.37, a); 2) existind forța P , ansamblul se încălzește uniform cu $\Delta t = 100^\circ\text{C}$; 3) piesele sînt înșurubate ca în figura 1.37, b, libere la capete și se produce o variație de temperatură $\Delta t = 100^\circ\text{C}$; 4) piesele sînt înșurubate, fixate între doi pereți rigizi (Fig. 1.37, c) și se produce o variație de temperatură $\Delta t = 100^\circ\text{C}$.

Se cunosc: $E_{Cu} = 1,15 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$; $E_{OL} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$, $\alpha_{OL} = 12 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_{Cu} = 17 \cdot 10^{-6}$.

Rezolvare. 1) Formulele (1.11) dau:

$$\sigma_{OL} = \frac{P}{A_{OL} + \frac{E_{Cu}}{E_{OL}} A_{Cu}} = \frac{20\,000}{20 + \frac{1,15 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^6} \cdot 10} = 785 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{Cu} = \frac{P}{\frac{E_{OL}}{E_{Cu}} A_{OL} + A_{Cu}} = \frac{20\,000}{\frac{2,1 \cdot 10^6}{1,15 \cdot 10^6} \cdot 20 + 10} = 430 \text{ daN/cm}^2.$$

2) Se notează cu N_{Cu} partea din forță preluată de cupru și cu N_{OL} partea preluată de oțel,

$$N_{Cu} + N_{OL} = P. \quad (1)$$

Din modul de deformare rezultă că deformarea piesei de cupru datorită variației de temperatură și forței N_{Cu} este egală cu deformarea piesei de oțel datorită variației de temperatură și forței N_{OL} .

$$\alpha_{Cu} l \Delta t - \frac{N_{Cu} l}{A_{Cu} E_{Cu}} = \alpha_{OL} l \Delta t - \frac{N_{OL} l}{A_{OL} E_{OL}};$$

$$(\alpha_{Cu} - \alpha_{OL}) \Delta t = \frac{N_{Cu}}{A_{Cu} E_{Cu}} - \frac{N_{OL}}{A_{OL} E_{OL}}. \quad (2)$$

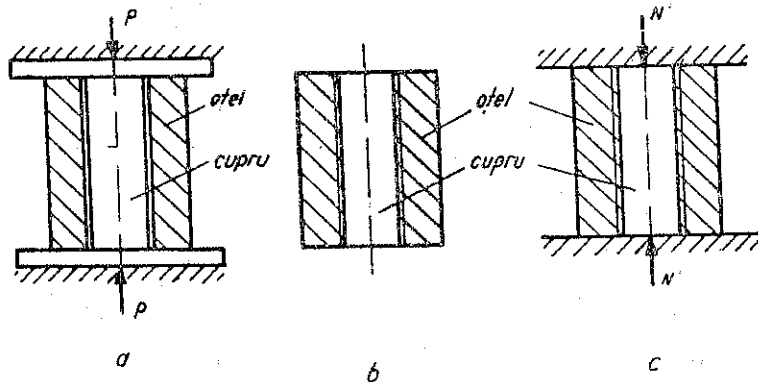


Fig. 1.37

Din ecuațiile (1) și (2) se obține:

$$N_{Cu} = \frac{P + (\alpha_{Cu} - \alpha_{OL}) A_{OL} E_{OL} \Delta t}{1 + \frac{A_{OL} E_{OL}}{A_{Cu} E_{Cu}}}; \quad N_{OL} = \frac{P - (\alpha_{Cu} - \alpha_{OL}) A_{Cu} E_{Cu} \Delta t}{1 + \frac{A_{Cu} E_{Cu}}{A_{OL} E_{OL}}};$$

$$\sigma_{Cu} = \frac{N_{Cu}}{A_{Cu}} = \frac{P + (\alpha_{Cu} - \alpha_{OL}) A_{OL} E_{OL} \Delta t}{\frac{E_{OL}}{E_{Cu}} A_{OL} + A_{Cu}}; \quad \sigma_{OL} = \frac{N_{OL}}{A_{OL}} = \frac{P - (\alpha_{Cu} - \alpha_{OL}) A_{Cu} E_{Cu} \Delta t}{A_{OL} + \frac{E_{Cu}}{E_{OL}} A_{Cu}}.$$

Cu datele numerice, rezultă:

$$\sigma_{Cu} = \frac{20\,000 + (17 \cdot 10^{-6} - 12 \cdot 10^{-6}) 20 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 100}{10 + \frac{2,1 \cdot 10^6}{1,15 \cdot 10^6} \cdot 20} = 881 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{OL} = \frac{20\,000 - (17 \cdot 10^{-6} - 12 \cdot 10^{-6}) 10 \cdot 1,15 \cdot 10^6 \cdot 100}{20 + \frac{1,15 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^6} \cdot 10} = 559 \text{ daN/cm}^2.$$

3) Cele două piese fiind înșurubate, se vor deforma identic sub efectul dilatării și al forței de interacțiune N .

$$\Delta l_{Cu} = \Delta l_{OL},$$

$$\alpha_{Cu} l \Delta t - \frac{N l}{E_{Cu} A_{Cu}} = \alpha_{OL} l \Delta t + \frac{N l}{E_{OL} A_{OL}} = \Delta l,$$

$$N = \frac{(\alpha_{Cu} - \alpha_{OL}) \Delta t}{\frac{1}{E_{OL} A_{OL}} + \frac{1}{E_{Cu} A_{Cu}}} = \frac{(17 \cdot 10^{-6} - 12 \cdot 10^{-6}) 100}{\frac{1}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 20} + \frac{1}{1,15 \cdot 10^6 \cdot 10}} = 4\,514 \text{ daN},$$

$$\sigma_{Cu} = \frac{-4\,514}{10} = -451 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_{OL} = \frac{4\,514}{20} = 226 \text{ daN/cm}^2.$$

În acest caz piesele se alungesc cu:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha_{Cu} \Delta t - \frac{N}{E_{Cu} A_{Cu}} = 17 \cdot 10^{-6} \cdot 100 - \frac{4\,514}{1,15 \cdot 10^6 \cdot 10} = 13,07 \cdot 10^{-4}.$$

4) Eforturilor unitare calculate la punctul 3) li se adaugă eforturile unitare de compresie σ'_{cu} și σ'_{ol} produse de reacțiunea N' care anulează deformăția $\epsilon = 13,07 \cdot 10^{-4}$.

$$N' = N'_{cu} + N'_{ol}; \quad \epsilon_{cu} = \epsilon_{ol} = -13,07 \cdot 10^{-4},$$

$$-13,07 \cdot 10^{-4} = \frac{\sigma'_{cu}}{E_{cu}} = \frac{\sigma'_{ol}}{E_{ol}},$$

$$\sigma'_{cu} = -13,07 \cdot 10^{-4} \cdot 1,15 \cdot 10^6 = -1\,503 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma'_{ol} = -13,07 \cdot 10^{-4} \cdot 2,1 \cdot 10^6 = -2\,745 \text{ daN/cm}^2.$$

Eforturile unitare totale sînt:

$$\sigma_{cu} = -451 - 1\,503 = -1\,954 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{ol} = 226 - 2\,745 = -2\,519 \text{ daN/cm}^2.$$

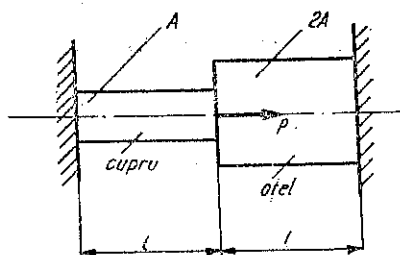


Fig. 1.38

1.38. Să se determine creșterea de temperatură necesară ca la ansamblul din figura 1.38, bara de cupru, lipită de reazemul din stînga și de bara de oțel, să nu mai fie solicitată. Se dau: $P = 6\,000 \text{ daN}$, $A = 4 \text{ cm}^2$, $\alpha_{ol} = 12 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_{cu} = 17 \cdot 10^{-6}$, $E_{ol} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare:

$$\alpha_{cu} l \Delta t + \alpha_{ol} l \Delta t - \frac{Pl}{2E_{ol}A} = 0,$$

$$\Delta t = \frac{P}{2E_{ol}A(\alpha_{cu} + \alpha_{ol})} = \frac{6\,000}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 4(17 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 10^{-6})} = 12,4^\circ\text{C}$$

1.39. Un șurub M20 din oțel (Fig. 1.39) strînge un manșon cilindric din cupru, astfel că forța de interacțiune este $N = 1\,000 \text{ daN}$. Aria secțiunii șurubului este $A_1 = 2,2 \text{ cm}^2$ iar a manșonului $A_2 = 4 \text{ cm}^2$. Se cer eforturile unitare, care se produc în cele două piese, în starea de solicitare arătată mai sus, precum și atunci cînd se produce o încălzire a ansamblului cu $\Delta t = 50^\circ\text{C}$.

Rezolvare. În stare de solicitare inițială:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{1\,000}{2,2} = 455 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = -\frac{N}{A_2} = -\frac{1\,000}{4} = -250 \text{ daN/cm}^2.$$

În a doua stare se presupune că ansamblul nu este solicitat și se caută variațiile de eforturi unitare față de prima stare. Manșonul de cupru tinde a se dilata mai mult decît șurubul, fapt care va duce la un efort de compresie în manșon, respectiv de întindere în șurub. N' fiind forța suplimentară de interacțiune, rezultă din egalitatea deformațiilor:

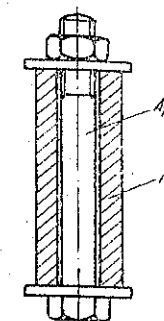


Fig. 1.39

$$\alpha_1 \Delta t + \frac{N'l}{A_1 E_1} = \alpha_2 \Delta t - \frac{N'l}{A_2 E_2}; \quad N' = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t}{\frac{1}{A_1 E_1} + \frac{1}{A_2 E_2}}$$

$$\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}; \quad E_2 = \frac{8}{15} E_1,$$

$$N' = \frac{(17 - 12)10^{-6} \cdot 50}{\frac{1}{2,2 \cdot 2,1 \cdot 10^6} + \frac{1}{4 \cdot \frac{8}{15} \cdot 2,1 \cdot 10^6}} = 568 \text{ daN}.$$

În urma încălzirii, noile eforturi unitare sînt:

$$\sigma_1 = \frac{N + N'}{A_1} = \frac{1\,000 + 568}{2,2} = 713 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = -\frac{N + N'}{A_2} = -\frac{1\,000 + 568}{4} = -392 \text{ daN/cm}^2.$$

Datorită încălzirii, eforturile unitare în ambele piese cresc.

Aplicație. Să se reia problema, cu aceleași date, considerînd însă șurubul din cupru și manșonul din oțel.

1.40. Sistemul de trei bare articulate din figura 1.40, cea verticală de oțel cu secțiunea A_2 și cele oblice de cupru cu secțiunea A_1 , este montat la temperatura $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Barele oblice au aceeași înclinare față de verticală.

$$\text{Se dau: } A_1 = A_2 = 4,15 \text{ cm}^2; \quad E_2 = \frac{15}{8} E_1; \quad \alpha_1 = 16,5 \cdot 10^{-6};$$

$$\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}; \quad \beta = 60^\circ.$$

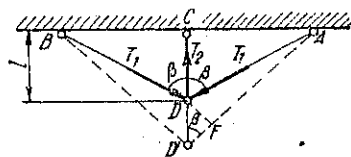


Fig. 1.40

Să se determine mărimea eforturilor unitare care se produc în bare dacă temperatura ansamblului crește la $t_1 = 60^\circ\text{C}$.

Rezolvare. Datorită variației de temperatură apar în bare eforturi notate T_1 și T_2 . Ecuația de proiecții pe verticală:

$$T_2 = 2T_1 \cos \beta. \quad (1)$$

Între deformațiile barelor CD și AD se poate scrie relația:

$$\overline{D'T} = \overline{DD'} \cdot \cos \beta. \quad (2)$$

$$\overline{DD'} = \overline{\Delta DC} = l\alpha_2\Delta t + \frac{T_2 l}{E_2 A_2}, \quad (3)$$

$$\overline{D'T} = \overline{\Delta AD} = \frac{l}{\cos \beta} \alpha_1 \Delta t - \frac{T_1}{E_1 A_1} \cdot \frac{l}{\cos \beta}. \quad (4)$$

Din relațiile (2), (3) și (4) se obține:

$$\frac{l}{\cos \beta} \alpha_1 \Delta t - \frac{T_1 l}{E_1 A_1 \cos \beta} = \left(l\alpha_2 \Delta t + \frac{T_2 l}{E_2 A_2} \right) \cos \beta. \quad (5)$$

Din relațiile (1) și (5) se obține:

$$T_2 = \frac{\left(\frac{\alpha_1}{\cos^2 \beta} - \alpha_2 \right) A_2 E_2 \Delta t}{1 + \frac{A_2 E_2}{2 A_1 E_1 \cos^2 \beta}}; \quad T_1 = \frac{T_2}{2 \cos \beta}.$$

Aplicație numerică:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ\text{C},$$

$$\cos \beta = \cos 60^\circ = 0,5; \quad E_2 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2,$$

$$T_2 = \frac{\left(\frac{16,5 \cdot 10^{-6}}{0,5^2} - 1,2 \cdot 10^{-6} \right) 4,15 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 40}{1 + \frac{4,15 \cdot 15}{2 \cdot 4,15 \cdot 0,5^2}} = 2214 \text{ daN},$$

$$T_1 = \frac{2214}{2 \cdot 0,5} = 2214 \text{ daN},$$

$$\sigma_{OL} = \sigma_{Cu} = \frac{T_1}{A_1} = \frac{T_2}{A_2} = \frac{2214}{4,15} = 533 \text{ daN/cm}^2.$$

1.41. Ce lungime trebuie să aibă un fir de cupru, întins între doi stâlpi la același nivel la o distanță unul de altul de $l = 100 \text{ m}$, spre a avea o săgeată maximă $f = 2 \text{ m}$? Se dau: greutatea specifică a cuprului $\gamma = 8,9 \text{ daN/dm}^3$ și modulul de elasticitate $E = 1,28 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$ (Fig. 1.41).

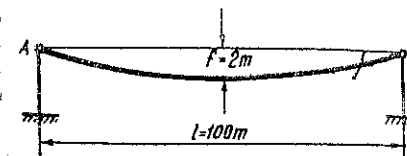


Fig. 1.41

Rezolvare. Se aplică formula (1.19) din care rezultă diferența δ dintre lungimea firului și deschidere:

$$\delta = \frac{f^3 - \frac{3\gamma l^4}{64E}}{\frac{3}{8}lf} = \frac{200^3 - \frac{3 \cdot 8,9 \cdot 10^{16}}{64 \cdot 10^3 \cdot 1,28 \cdot 10^6}}{\frac{3}{8} \cdot 10^4 \cdot 200} = 6,3 \text{ cm}.$$

Lungimea firului: $s = \delta + l$;

$$s = \delta + l = 6,3 + 10000 = 10006,3 \text{ cm} = 100,063 \text{ m}.$$

1.42. Un fir de oțel cu diametrul de 10 mm se întinde între doi stâlpi distanțați cu 25 m , reazemele fiind la același nivel. Se cere să se determine cu ce forță trebuie întins firul pentru ca săgeata maximă datorită greutății proprii să nu fie mai mare de $0,6 \text{ m}$. Se dă greutatea specifică a oțelului $\gamma = 7,85 \text{ daN/dm}^3$.

Rezolvare. Se va aplica formula (1.15). Mai întâi se calculează p :

$$p = \gamma \cdot A = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 78,53 = 0,617 \text{ daN/m}.$$

S-a introdus greutatea specifică în daN/cm^3 și secțiunea în mm^2 , iar rezultatul este în daN/m .

$$H = \frac{0,617 \cdot 25^2}{8 \cdot 0,6} = 80,3 \text{ daN}.$$

1.43. Un fir telefonic de 3 mm diametru, din oțel, cu punctele de susținere la același nivel, este întins în timpul verii la o temperatură de $+40^\circ\text{C}$ cu o forță $H = 40 \text{ daN}$, pe o deschidere $l = 30 \text{ m}$. Să se determine efortul unitar ce se produce în fir la -20°C .

Se dau: greutatea specifică a oțelului $\gamma = 7,85 \text{ daN/cm}^3$, coeficientul de dilatare termică liniară $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$.

Rezolvare. $p = \gamma A = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 7,1 = 0,055 \text{ daN/m}$. Pentru calculul săgeții maxime la montaj se aplică formula (1.14):

$$f = \frac{pl^2}{8H} = \frac{55 \cdot 3^2 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 40} = 15,5 \text{ cm};$$

$$\sigma = \frac{H}{A} = \frac{40}{7,1 \cdot 10^{-2}} = 563 \text{ daN/cm}^2.$$

Pentru calculul săgeții la -20°C (variația de temperatură $t = 60^{\circ}\text{C}$) se aplică formula (1.21):

$$f_1^3 - \frac{3}{8} \left[\frac{1}{24} \frac{7,85^2 \cdot 3^2 \cdot 10^6}{10^6 \cdot 5,63^2 \cdot 10^4} - 60 \cdot 12 \cdot 10^{-6} - \frac{563}{2,1 \cdot 10^6} \right] \cdot 3^2 \cdot 10^6 f_1 - \frac{3}{64} \frac{7,85 \cdot 3^4 \cdot 10^{12}}{10^3 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 0,$$

$$f_1^3 + 3\,088 f_1 - 14\,200 = 0,$$

$$f_1 = 4,6 \text{ cm},$$

$$\sigma = \frac{\gamma l^2}{8 f_1} = \frac{7,85 \cdot 3^2 \cdot 10^9}{10^3 \cdot 8 \cdot 4,6} = 1\,920 \text{ daN/cm}^2.$$

1.44. Un cablu electric, format din 30 de fire de aluminiu, cu diametrul de 4 mm, este montat în timpul verii la temperatura $t_1 = +40^{\circ}\text{C}$ pe o deschidere $l = 200 \text{ m}$, cu o săgeată maximă $f_0 = 4,50 \text{ m}$, reazemele fiind la același nivel. Se întreabă care va fi săgeata maximă a cablului la temperatura $t_2 = -5^{\circ}\text{C}$, încărcat cu o suprasarcină de gheață (polei).

Se dau: greutatea specifică a aluminiului $\gamma = 2,7 \text{ daN/dm}^3$, coeficientul de dilatare termică liniară $\alpha = 2,3 \cdot 10^{-5}$, modulul de elasticitate $E = 5,6 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Se calculează săgeata f_1 corespunzătoare temperaturii de -5°C fără a ține seama de greutatea poleiului, cu ajutorul formulei (1.21). Se calculează apoi săgeata totală f_2 prin formula (1.22) în care se înlocuiește f_0 prin f_1 .

a) Calculul săgeții f_1

$$\sigma = \frac{\gamma l^2}{8 f} = \frac{2,7 \cdot 2^2 \cdot 10}{10^3 \cdot 8 \cdot 4,5 \cdot 10^2} = 300 \text{ daN/cm}^2.$$

Variația de temperatură este $t = -5 - 40 = -45^{\circ}\text{C}$.

$$f_1^3 - \frac{3}{8} \left[\frac{1}{24} \frac{2,7^2 \cdot 2^2 \cdot 10^3}{10^6 \cdot 3^2 \cdot 10^4} - 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot 45 - \frac{3 \cdot 10^2}{5,6 \cdot 10^5} \right] \cdot 2^2 \cdot 10^3 \cdot f_1 =$$

$$= \frac{3 \cdot 2,7 \cdot 2^4 \cdot 10^{16}}{64 \cdot 10^3 \cdot 5,6 \cdot 10^5},$$

$$f_1^3 + \frac{3}{8} 2,21 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot f_1 - 36,2 \cdot 10^6 = 0,$$

$$f_1^3 + 3,32 \cdot 10^4 f_1 - 36,2 \cdot 10^6 = 0,$$

$$f_1 = 3,00 \text{ m}.$$

Săgeata a scăzut, datorită contracției, de la $f_0 = 4,50 \text{ m}$ la $f_1 = 3,00 \text{ m}$.

b) Calculul săgeții f_2 .

Suprasarcina datorită poleiului se poate evalua cu formula empirică $p_s = 0,18 \sqrt{d}$, în care d reprezintă diametrul firului în mm, iar p_s , sarcina în daN/m. Dacă este vorba de un cablu, diametrul se poate calcula cu formula:

$$d_0 = 1,3 \sqrt{A},$$

$$A = 30 \cdot 12,56 = 376,80 \text{ mm}^2; d_0 = 1,3 \sqrt{376,80} = 25,22 \text{ mm};$$

$$p_s = 0,18 \sqrt{25,22} \approx 0,90 \text{ daN/m}; p_0 = \gamma \cdot A = 2,7 \cdot 10^{-3} \cdot 376,8 \approx 1 \text{ daN/m}.$$

Formula (1.22) devine:

$$f_2^3 + \left(\frac{3}{64} \frac{1 \cdot 2^4 \cdot 10^{16}}{10^2 \cdot 5,6 \cdot 10^5 \cdot 3,768 \cdot 3 \cdot 10^2} - 3^2 \cdot 10^4 \right) f_2 - \frac{3}{64} \frac{(1 + 0,9) 2^4 \cdot 10^{16}}{10^2 \cdot 5,6 \cdot 10^5 \cdot 3,768} = 0,$$

$$f_2^3 - 0,28 \cdot 10^5 \cdot f_2 - 6,75 \cdot 10^7 = 0; f_2 = 4,30 \text{ m}.$$

Săgeata la temperatura de -5°C cu suprasarcină de gheață este $f_2 = 4,30 \text{ m}$.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

1.45. O bară de oțel, de lungime $l = 10 \text{ m}$, este supusă la întindere cu o forță variabilă, a cărei valoare maximă este $N = 50 \text{ kN}$. Se cere să se dimensioneze bara, cu secțiunea dreptunghiulară, având înălțimea $h = 2b$, și să se afle deplasarea capătului liber al barei. Se dă $\sigma_a = 800 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns: $h = 36 \text{ mm}$, $b = 18 \text{ mm}$, $\Delta l = 0,366 \text{ cm}$.

1.46. Un șurub, cu diametrul exterior $d = 20 \text{ mm}$, se reazemă cu capul, prin intermediul unei rondele, pe o piesă de lemn, ca în figura 1.46 și este solicitat la întindere cu o forță $P = 500 \text{ daN}$. Să se calculeze diametrul exterior al rondelei, pentru ca să nu se producă în lemn, pe suprafața de strivire, un efort unitar mai mare de 20 daN/cm^2 .

Răspuns: $D = 6 \text{ cm}$.

1.47. O platbandă de oțel, cu secțiunea dreptunghiulară $60 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$, solicitată la întindere de o forță P , are o gaură de nit cu diametrul 10 mm . Să se compare eforturile

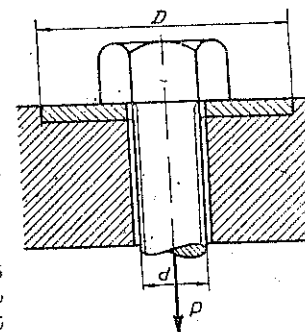


Fig. 1.46

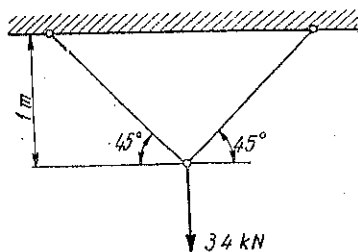


Fig. 1.48

unitare din secțiunea neslăbită și din cea slăbită. Se va neglija concentrarea eforturilor în regiunea găurii.

Răspuns : $\sigma_a = 1,2 \sigma_b$.

1.48. Se cere să se dimensioneze firele din figura 1.48 cu $\sigma_a = 1200 \text{ daN/cm}^2$. Să se determine deformația și lucrul mecanic de deformare acumulat de fire.

Răspuns : $d = 1,6 \text{ cm}$, $\Delta l = 0,0809 \text{ cm}$, $U = 194 \text{ daNcm}$.

1.49. Să se dimensioneze tirantul AB din figura 1.49, făcut din oțel pătrat, dacă se ia $\sigma_a = 1000 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns : $a = 2 \text{ cm}$.

1.50. Să se dimensioneze barele gruzii cu zăbrele din figura 1.50, făcute din oțel, cu $\sigma_a = 1500 \text{ daN/cm}^2$, de secțiune circulară, pentru $P = 20000 \text{ daN}$.

Răspuns : $d_{12} = d_{24} = d_{45} = 4,12 \text{ cm}$

$d_{23} = d_{35} = 4,9 \text{ cm}$

$d_{13} = d_{34} = 0$.

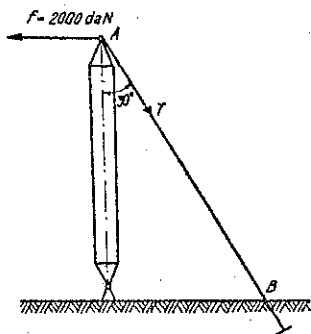


Fig. 1.49

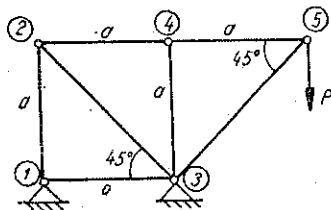


Fig. 1.50

1.51. La bara de oțel din figura 1.51, se dau : $l = 0,3 \text{ m}$, $A = 2 \text{ cm}^2$, $P = 800 \text{ daN}$. Se cere :

- să se traseze diagrama de variație a forței axiale;
- să se calculeze deplasările secțiunilor I și II;
- să se traseze diagrama de variație a deplasării;
- să se calculeze energia de deformare U acumulată de bară.

Răspuns : $U = 4,16 \frac{P^2 l}{EA} = 19 \text{ daNcm}$.

Diagramele de forțe axiale și deplasări sînt date în figura 1.51.

1.52. O bară rigidă OB este articulată în punctul O și susținută de un tavan cu 3 fire din același material și de aceeași lungime (Fig. 1.52). În punctul D se aplică o sarcină P. Se cere să se calculeze eforturile care se produc în cele trei fire.

Răspuns : $N_1 = \frac{1}{7} P$; $N_2 = \frac{2}{7} P$; $N_3 = \frac{4}{7} P$.

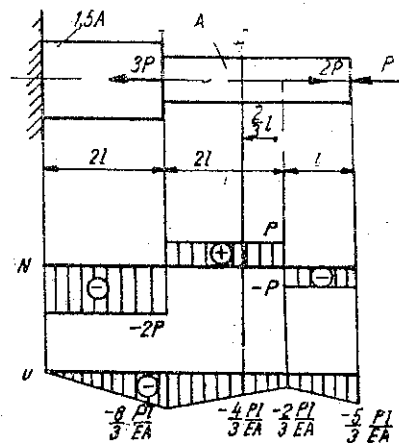


Fig. 1.51

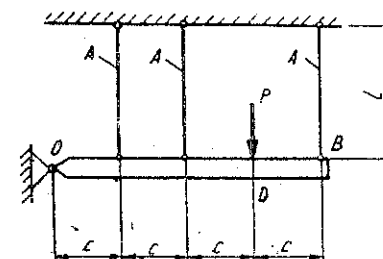


Fig. 1.52

1.53. O bară rigidă BC este articulată în punctul B și susținută de tavan cu 3 fire din același material și de lungimi egale (Fig. 1.53). În punctul C se aplică o sarcină P. Se cere să se calculeze eforturile unitare ce au naștere în cele 3 fire.

Răspuns :

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A_1} = \frac{4P}{A_1 + 4A_2 + 9A_3}, \quad \sigma_2 = \frac{T_2}{A_2} = \frac{8P}{A_1 + 4A_2 + 9A_3} = 2\sigma_1,$$

$$\sigma_3 = \frac{T_3}{A_3} = \frac{12P}{A_1 + 4A_2 + 9A_3} = 3\sigma_1.$$

1.54. La sistemul de scripeti din figura 1.54 se dă $Q = 30 \text{ kN}$. Se cere să se dimensioneze cablul care trece peste scripeti, confecționat din oțel cu $\sigma_a = 1500 \text{ daN/cm}^2$ și sistemul de suspensie AB format din două bare de oțel identice, cu $\sigma_a = 800 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns : Cablul cu 6×19 fire de diametru $\delta = 1,1 \text{ mm}$. Sistemul de suspensie din două plăci dreptunghiulare, cu $A_{st} = 1,88 \text{ cm}^2$.

1.55. O grindă rigidă AB (Fig. 1.55) este suspendată la capete prin două tije verticale: AC , de oțel, cu diametrul de 10 mm, și BD de cupru, cu diametrul de 25 mm. Să se determine poziția forței P pe bara AB , astfel încât grinda să rămână orizontală. Se dă $P = 8 \text{ kN}$ și $E_{\text{Cu}} = 1,15 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns: $a = 2,32 \text{ m}$, $b = 0,68 \text{ m}$.

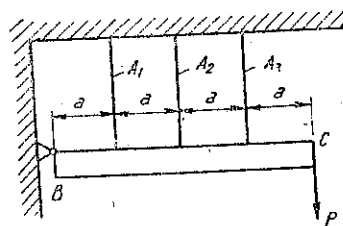


Fig. 1.53

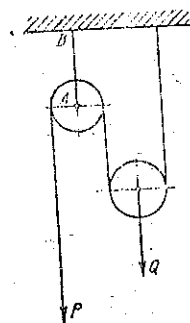


Fig. 1.54

1.56. Să se găsească variația unghiului α și lungirea diagonalei AB la un pătrat articulat la noduri ca în figura 1.56 ale cărui bare au toate secțiunea $A = 1 \text{ cm}^2$. Latura pătratului este $a = 10 \text{ cm}$, iar barele sunt confecționate din oțel.

Răspuns: $\Delta\alpha = -7'$; $\Delta l = 0,00673 \text{ cm}$.

1.57. Pentru bara din figura 1.57, formată din două tronsoane între care există un joc $\delta = \frac{2Pa}{AE}$, să se calculeze reacțiunile și să se traseze diagrama de forțe axiale.

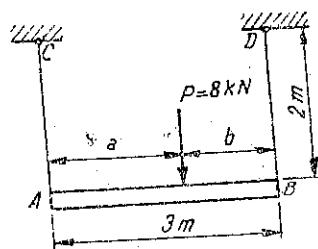


Fig. 1.55

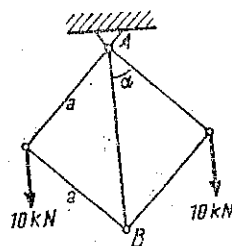


Fig. 1.56

Răspuns: $N_1 = N_2 = 0,7 P$.

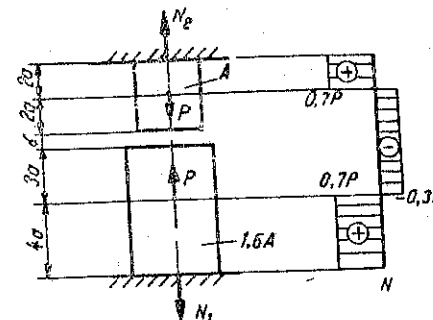


Fig. 1.57

1.58. Un șurub de oțel de lungime 30 cm este înșurubat într-o piuliță de cupru lungă de 40 cm ca în figura 1.58. Montarea s-a făcut la temperatura normală. Să se determine eforturile unitare produse în cele două materiale la o încălzire uniformă $\Delta t = 50^\circ\text{C}$. Se dau:

$$A_{\text{OL}} = 10 \text{ cm}^2; A_{\text{Cu}} = 30 \text{ cm}^2;$$

$$\alpha_{\text{OL}} = 12 \cdot 10^{-6}; \alpha_{\text{Cu}} = 17 \cdot 10^{-6};$$

$$E_{\text{OL}} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2; E_{\text{Cu}} = 1,15 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2.$$

Răspuns: $\sigma_{\text{Cu}} = -109 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_{\text{OL}} = 326 \text{ daN/cm}^2$.

1.59. Dacă cele două bare de oțel din figura 1.59, sunt încălzite cu $\Delta t = 100^\circ\text{C}$, să se afle eforturile unitare care se produc. Se dă:

$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6}, E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2,$$

$$A_1 = 5 \text{ cm}^2; A_2 = 10 \text{ cm}^2, \delta = 0,5 \text{ mm}.$$

$$\text{Răspuns: } \sigma_1 = \frac{7940}{5} = 1588 \text{ daN/cm}^2; \sigma_2 = \frac{7940}{10} = 794 \text{ daN/cm}^2.$$

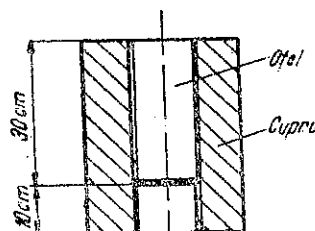


Fig. 1.58

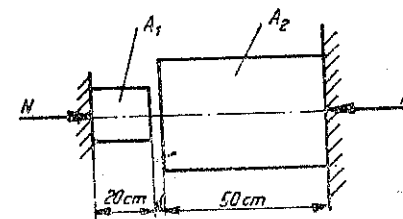


Fig. 1.59

1.60. Un fir de cupru de secțiune $A = 26 \text{ mm}^2$, cu reazemele la același nivel, avînd greutatea proprie $p_0 = 0,224 \text{ daN/m}$, trebuie întins la temperatura $t_1 = 20^\circ\text{C}$, între doi stîlpi așezați la o distanță de 60 m. Să se calculeze forța H necesară întinderii firului în două ipoteze de stări critice, și anume: a) la temperatura de -5°C , sub greutatea proprie, cu suprasarcină de gheață și sub acțiunea vîntului (suprasarcină de 30 daN/m); b) la temperatura de -30°C .

Se dau: rezistența admisibilă a firului de cupru $\sigma_a = 1\,300 \text{ daN/cm}^2$, coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$.

Răspuns: a) $H = 105 \text{ daN}$; b) $H = 124,5 \text{ daN}$.

Valoarea cea mai mică corespunde ipotezei defavorabile. Săgeata maximă, corespunzătoare forței $H = 105 \text{ daN}$, este $f = 0,965 \text{ m}$.

MOMENTE DE INERȚIE ALE SUPRAFEȚELOR PLANE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Momentele de inerție axiale și centrifugale se definesc prin relațiile:

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad (2.1)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad (2.2)$$

$$I_{zy} = \int_A zy dA. \quad (2.3)$$

2. Între momentele de inerție față de două axe paralele, distanțate cu d , există relația:

$$I_A = I_C + Ad^2, \quad (2.4)$$

unde I_C este momentul de inerție față de axa — paralelă cu axa Δ — trecînd prin centrul de greutate, iar A este aria suprafeței.

3. Pentru două sisteme de axe rectangulare paralele, Ozy oarecare și Oz_1y_1 trecînd prin centrul de greutate C , momentele de inerție centrifugale sînt legate prin relația:

$$I_{zy} = I_{z_1y_1} + A\bar{z}\bar{y}. \quad (2.5)$$

unde $\bar{z}$, $\bar{y}$ sînt coordonatele lui C față de sistemul de axe Ozy .

Dacă cel puțin una dintre axele Oz_1y_1 este axă de simetrie, $I_{z_1y_1} = 0$ și formula se reduce la

$$I_{zy} = A\bar{z}\bar{y}. \quad (2.6)$$

4. Pentru dreptunghiul din figura 2a, momentele de inerție față de axele de simetrie sînt:

$$I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{hb^3}{12}. \quad (2.7)$$

5. Momentul de inerție polar, față de un punct oarecare O , din planul suprafeței este:

$$I_p = \int_A r^2 dA. \quad (2.8)$$

Dacă Oz și Oy sint două axe rectangulare trecind prin O , rezultă :

$$I_p = I_z + I_y. \quad (2.9)$$

6. Suprafața închisă de cercul de diametru d are, față de axele care trec prin centru, următoarele momente de inerție :

$$\text{axiale : } I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}, \quad (2.10)$$

$$\text{polar : } I_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (2.11)$$

7. Razele de inerție se definesc prin relațiile :

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (2.12)$$

8. Dacă față de un sistem de axe rectangulare oarecare Oxy se cunosc I_z, I_y, I_{zy} ale unei suprafețe, se pot calcula momentele de inerție față de un sistem rectangular Ox_1y_1 , avind aceeași origine și rotit cu unghiul α în sensul rotației acelor ceasului, față de primul (Fig. 2, a) :

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2I_{zy} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2.13)$$

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha = (I_z - I_y) \sin \alpha \cos \alpha + I_{zy} \cos 2\alpha. \quad (2.14)$$

9. Momentele de inerție principale sint date de :

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}, \quad (2.15)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}. \quad (2.16)$$

10. Dacă se notează cu y_{max} și z_{max} distanțele de la fibrele extreme pînă la axele principale care trec prin centrul de greutate (v. Fig. 2 a), se numesc module de rezistență la încovoiere, față de aceste axe, expresiile :

$$W_x = \frac{I_z}{y_{max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{max}}. \quad (2.17)$$

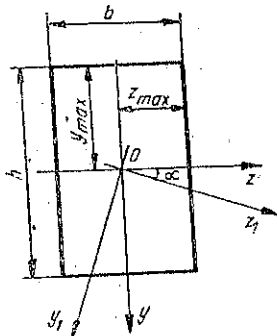


Fig. 2.a

B. PROBLEME REZOLVATE

2.1. Să se calculeze momentele de inerție față de axele z_1 indicate în desen pentru secțiunile din figurile 2.1, a și 2.1, b. Să se calculeze apoi momentul de inerție față de axa z care trece prin centrul de greutate.

Rezolvare. a) Triunghi (Fig. 2.1, a) :

Din triunghiurile asemenea OBB' și ODE se obține :

$$b_y = \frac{b}{h} (h - y_1),$$

$$dA = \frac{b}{h} (h - y_1) dy_1,$$

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h (h - y_1) y_1^2 dy_1 = \frac{bh}{h} \int_0^h y_1^2 dy_1 - \frac{b}{h} \int_0^h y_1^3 dy_1 = \frac{bh^3}{12}.$$

Pentru aflarea momentului de inerție I_z se aplică formula :

$$I_z = I_{z_1} - d^2 \cdot A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36},$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{h}{12} (b_1^3 + b_2^3).$$

b) Paralelogram (Fig. 2.1, b) :

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12},$$

$$I_{z_1} = I_z + d^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}.$$

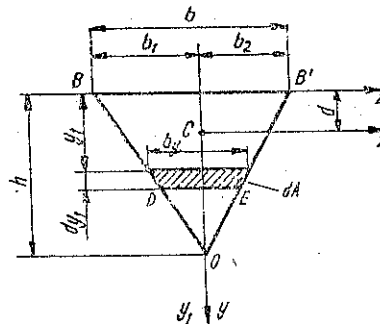


Fig. 2.1, a

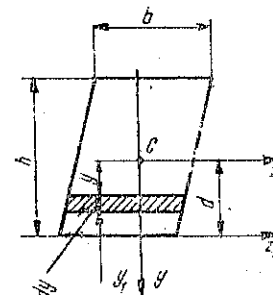


Fig. 2.1, b

2.2. Să se calculeze (fără integrare) momentul de inerție centrifugal I_{xy} față de axele care trec prin centrul de greutate, pentru secțiunea din figura 2.2.

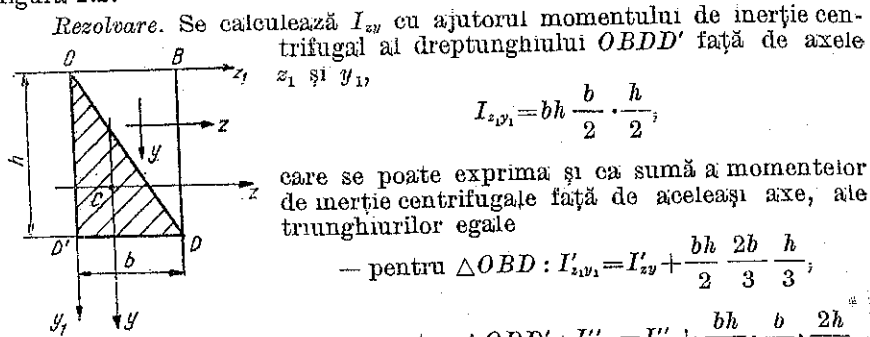


Fig. 2.2

Este evident că $I_{z_1 y_1} = I'_{z_1 y_1} + I''_{z_1 y_1}$ și că la ambele triunghiuri $I'_{xy} = I''_{xy} = I_{xy}$. Din egalitatea

$$bh \frac{b}{2} \frac{h}{2} = I_{xy} + \frac{bh}{2} \frac{2b}{3} \frac{h}{3} + I_{xy} + \frac{bh}{2} \frac{b}{3} \frac{2h}{3},$$

rezultă:

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{72}.$$

2.3. Să se calculeze momentele de inerție I_x și I_y față de axele care trec prin centrul de greutate al suprafeței hașurate din figura 2.3.

Rezolvare. Coordonatele centrului de greutate față de sistemul $Oz_1 y_1$ sînt:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= 0 \\ OC = \bar{y} &= \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \\ &= \frac{\frac{\pi \cdot 60^2}{4} \cdot 0 - 8 \cdot 30 \cdot (-15)}{\frac{\pi \cdot 60^2}{4} - 8 \cdot 30} = 1,39 \text{ mm}, \end{aligned}$$

$$I_x = \frac{\pi \cdot 6^4}{64} + \frac{\pi \cdot 6^2}{4} \cdot 0,139^2 -$$

$$- \left(\frac{0,8 \cdot 3^3}{12} + 0,8 \cdot 3 \cdot 1,639^2 \right) = 55,91 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = \frac{\pi \cdot 6^4}{64} - \frac{3 \cdot 0,8^3}{12} = 63,49 \text{ cm}^4.$$

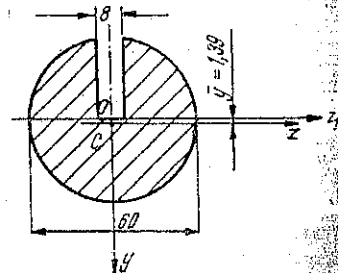


Fig. 2.3

2.4. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele care trec prin centrul de greutate, pentru secțiunea din figura 2.4.

Rezolvare. Coordonatele centrului de greutate față de sistemul de axe $Oz_1 y_1$ sînt:

$$\bar{y}_1 = -10 \text{ cm}; \quad \bar{z}_1 = \frac{\Sigma A_i z_i}{\Sigma A_i} = \frac{9 \cdot 1 \cdot 5,5 + 20 \cdot 1 \cdot 0,5 + 9 \cdot 1 \cdot 5,5}{2 \cdot 9 \cdot 1 + 20 \cdot 1} = 2,87 \text{ cm}.$$

Momentele de inerție se calculează considerînd secțiunea ca diferență a două dreptunghiuri:

$$I_x = \frac{10 \cdot 20^3}{12} - \frac{9 \cdot 18^3}{12} = 2293 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = \frac{20 \cdot 10^3}{12} + 20 \cdot 10 \cdot 2,13^2 - \left[\frac{18 \cdot 9^3}{12} + 9 \cdot 18 \cdot 2,63^2 \right] = 360 \text{ cm}^4.$$

2.5. Să se calculeze momentele de inerție față de axele ce trec prin centrul de greutate pentru suprafața hașurată din figura 2.5. Cotele sînt date în centimetri.

Rezolvare. Pentru a determina poziția centrului de greutate, se alege un sistem de axe ajutător $z_1 y_1$.

$$\bar{y} = \frac{35 \cdot 5 \cdot 2,5 + 5 \cdot 5 \cdot 7,5 + 5 \cdot 5 \cdot 47,5 + 15 \cdot 5 \cdot 52,5}{35 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 15 \cdot 5} \approx 19,1 \text{ cm},$$

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{35 \cdot 5^3}{12} + 35 \cdot 5 \cdot 16,6^2 + \frac{5 \cdot 5^3}{12} + 5 \cdot 5 \cdot 11,6^2 + \frac{5 \cdot 5^3}{12} + \\ &+ 5 \cdot 5 \cdot 28,4^2 + \frac{15 \cdot 5^3}{12} + 15 \cdot 5 \cdot 33,4^2 = 156\,041 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

$$I_y = \frac{5 \cdot 35^3}{12} + 2 \cdot \frac{5 \cdot 5^3}{12} + \frac{5 \cdot 15^3}{12} = 19\,375 \text{ cm}^4.$$

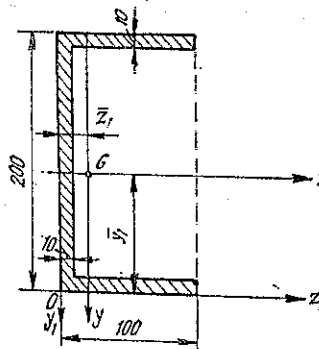


Fig. 2.4

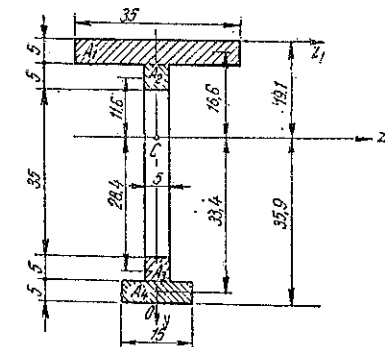


Fig. 2.5

2.6. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y față de axele ce trec prin centrul de greutate, la suprafața hașurată din figura 2.6.

Rezolvare. Ordonata centrului de greutate față de sistemul de axe $z_1 O y$ este:

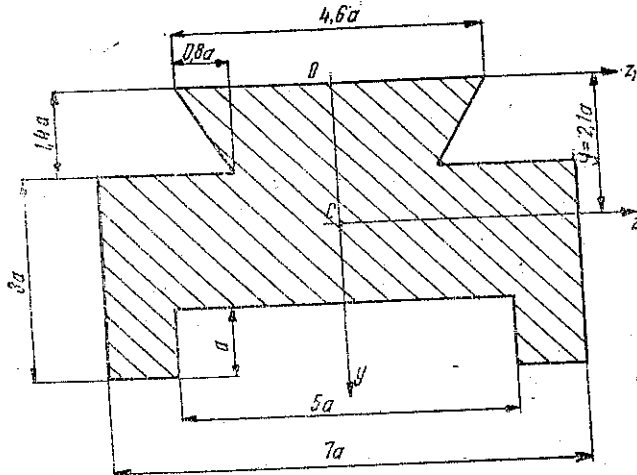


Fig. 2.6

$$\bar{y} = \frac{7a \cdot 3a \cdot 2,9a - 5a \cdot a \cdot 3,9a + 3a \cdot 1,4a \cdot 0,7a + 2 \cdot \frac{0,8a \cdot 1,4a}{2} \cdot \frac{1,4a}{3}}{7a \cdot 3a - 5a \cdot a + 3a \cdot 1,4a + 2 \cdot \frac{0,8a \cdot 1,4a}{2}} = 2,1a$$

$$I_z = \frac{7a(3a)^3}{12} + 21a^2(0,8a)^2 - \left[\frac{5a \cdot a^3}{12} + 5a^2(1,8a)^2 \right] + \left[\frac{3a(1,4a)^3}{12} + 4,2a^2(2,1a - 0,7a)^2 \right] + 2 \left[\frac{0,8a(1,4a)^3}{36} + \frac{1,12a^2}{2} \left(2,1a - \frac{1,4a}{3} \right)^2 \right] = 24,6a^4$$

$$I_y = \frac{3a(7a)^3}{12} - \frac{a(5a)^3}{12} + \frac{1,4a(3a)^3}{12} + 2 \left[\frac{1,4a(0,8a)^3}{36} + \frac{1,12a^2}{2} \left(1,5a + \frac{0,8}{3}a \right)^2 \right] = 82a^4$$

2.7. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y ale suprafeței hașurate din figura 2.7.

Rezolvare.
$$I_z = \frac{\pi d^4}{128} - 2 \frac{\pi d^4}{2048} = \frac{7\pi d^4}{1024}$$

$$I_y = \frac{\pi d^4}{128} - 2 \left[\frac{\pi d^4}{128 \cdot 16} + \frac{\pi d^2}{32} \cdot \frac{d^2}{16} \right] = \frac{3\pi d^4}{1024}$$

2.8. Să se calculeze momentele de inerție față de axele z , z_c , z_1 , z_2 și z_3 indicate în desen pentru secțiunea din figura 2.8 (semicerc).

Rezolvare.
$$I_z = I_y = \frac{1}{2} \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{z_c} = I_z - A \cdot \overline{OC}^2;$$

$$I_{z_c} = \frac{\pi d^4}{128} - \frac{\pi d^2}{8} \left(\frac{2d}{3\pi} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\pi} \right) d^4 = 0,00686 d^4,$$

$$I_{z_1} = \left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\pi} \right) d^4 + \frac{\pi d^2}{8} \left(\frac{d}{2} - \frac{2d}{3\pi} \right)^2 = \left(\frac{5\pi}{128} - \frac{1}{12} \right) d^4,$$

$$I_{z_2} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha = \frac{\pi d^4}{128} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{\pi d^4}{128},$$

$$I_{zy} = 0$$

$$I_{z_3} = I_{z_c} - A(\overline{OC} \cos \alpha)^2 = \frac{\pi d^4}{128} - \frac{\pi d^2}{8} \left(\frac{2d}{3\pi} \cos \alpha \right)^2 = \frac{\pi d^4}{128} - \frac{d^4}{18\pi} \cos^2 \alpha.$$

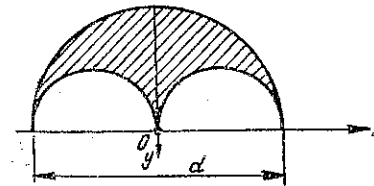


Fig. 2.7

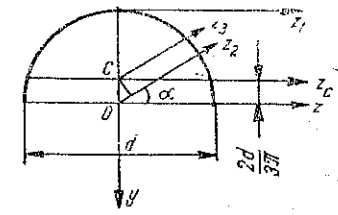


Fig. 2.8

2.9. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y pentru suprafața hașurată din figura 2.9.

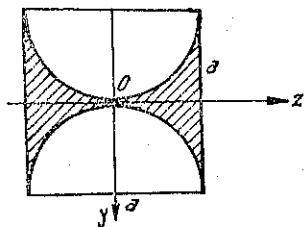


Fig. 2.9

Rezolvare.
$$I_y = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi a^4}{64} =$$

$$= a^4 \left(\frac{1}{12} - \frac{\pi}{64} \right) \approx 0,0342 a^4.$$

Folosind relațiile obținute la problema 2.8, rezultă:

$$I_z = \frac{a^4}{12} - 2a^4 \left(\frac{5\pi}{128} - \frac{1}{12} \right) = 0,00457 a^4.$$

2.10. Să se calculeze momentele de inerție ale secțiunii din figura 2.10 față de axele care trec prin centrul de greutate.

Rezolvare. Ordonata centrului de greutate față de sistemul de axe $x_1 O y_1$ este:

$$\bar{y} = \frac{4a \cdot 10a \cdot 5a - \pi \frac{(2a)^2}{8} \left(10a - \frac{4a}{3\pi} \right) - \frac{4a \cdot 3a^2}{2}}{4a \cdot 10a - \frac{\pi(2a)^2}{8} - \frac{4a \cdot 3a}{2}} = 5,52a,$$

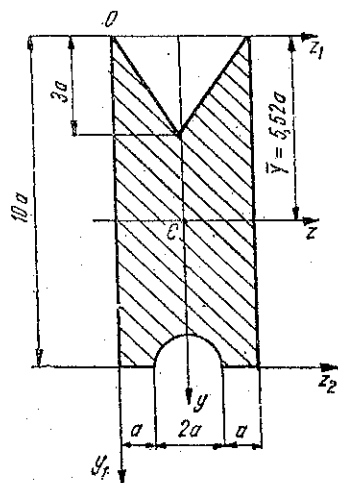


Fig. 2.10

$$I_y = \frac{10a(4a)^3}{12} - \frac{\pi(2a)^4}{128} - 2 \left[\frac{3a(2a)^3}{36} + \frac{3a \cdot 2a}{2} \left(\frac{2a}{3} \right)^2 \right] = 48,94a^4,$$

$$I_{x_1} = \frac{4a(10a)^3}{3} - \frac{\pi(2a)^4}{128} - 2 \left[\frac{2a(3a)^3}{36} + \frac{2a \cdot 3a}{2} (10a - a)^2 \right] = 843,94a^4,$$

$$I_z = I_{x_1} - A d^2 = 843,94a^4 - 32,43 a^2 \cdot (4,48a)^2 = 193a^4.$$

2.11. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y ale unui hexagon regulat înscris în cercul de rază R (Fig. 2.11, a).

Rezolvare. Se împarte hexagonul în șase triunghiuri echilaterale, de latură R .

Se scriu momentele de inerție ale triunghiului din figura 2.11, b, față de axele indicate, știind că, în general, un triunghi dreptunghic și un triunghi echilateral au momentele de inerție:

- față de bază: $bh^3/12$;
- față de axa paralelă cu baza, trecind prin centrul de greutate: $bh^3/36$.

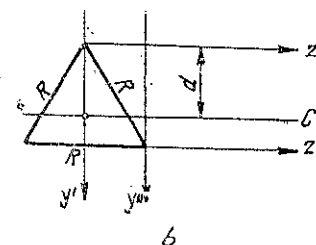
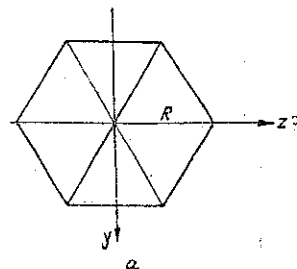


Fig. 2.11

$$I_{y_1} = \frac{R \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^3}{12} = \frac{\sqrt{3}R^4}{32},$$

$$I_{y_2} = I_c + A \cdot d^2 = \frac{R \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^3}{36} + \frac{R \frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}R^4}{32},$$

$$I_{y'} = 2 \frac{R\sqrt{3}}{2} \left(\frac{R}{2} \right)^3 \frac{1}{12} = \frac{\sqrt{3}R^4}{96},$$

$$I_{y''} = \frac{\sqrt{3}R^4}{96} + \frac{R \frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{7\sqrt{3}R^4}{96}.$$

Cu aceste valori, pentru hexagon rezultă:

$$I_z = 4I_{y_1} + 2I_{y_2} = \frac{4\sqrt{3}R^4}{32} + \frac{6\sqrt{3}R^4}{32} = \frac{10\sqrt{3}R^4}{32},$$

$$I_y = 2I_{y'} + 4I_{y''} = \frac{2\sqrt{3}R^4}{96} + \frac{28\sqrt{3}R^4}{96} = \frac{10\sqrt{3}R^4}{16},$$

$$I_z = I_y = \frac{5\sqrt{3}R^4}{16}.$$

2.12. La secțiunea dată în figura 2.12 se cere să se calculeze momentele de inerție I_x , I_y , I_{xy} , I_{x_1} , I_{y_1} și $I_{x_1y_1}$ față de axele ce trec prin centrul de greutate.

Rezolvare. $I_x = I_y = \frac{(4a)^4}{12} - \frac{(2a)^4}{12} = \frac{60}{3} a^4$; $I_{xy} = 0$,

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= \frac{60}{3} a^4 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{60}{3} a^4,$$

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= \frac{60}{3} a^4 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{60}{3} a^4,$$

$$I_{x_1y_1} = (I_x - I_y) \sin \alpha \cos \alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Decarece $I_{x_1y_1} = 0$, rezultă că orice sistem de axe care trece prin C este un sistem central și principal.

2.13. Să se calculeze momentul de inerție centrifugal I_{xy} al unui sfert de cerc de rază R , față de axele ce trec prin centrul cercului (Fig. 2.13).

Rezolvare. Se aplică formula (2.3); se înlocuiește $dA = dz \cdot dy$ și se efectuează integrala dublă:

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA = \int_0^R y \, dy \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} z \, dz = \int_0^R y \frac{R^2 - y^2}{2} dy = \frac{R^4}{8}.$$

2.14. Să se calculeze momentele de inerție I_x și I_y față de axele ce trec prin centrul de greutate, la suprafața hașurată din figura 2.14.

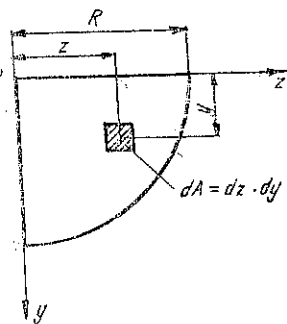


Fig. 2.13

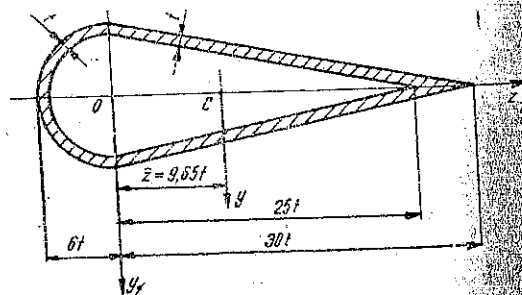


Fig. 2.14

Rezolvare. Abscisa centrului de greutate față de sistemul de axe xOy_1 este:

$$\bar{x} = \frac{\frac{\pi(6t)^2}{2} \left(-\frac{2 \cdot 12t}{3\pi} \right) + \frac{1}{2} 30t \cdot 12t \cdot \frac{30t}{3} - \left[\frac{\pi(5t)^2}{2} \left(-\frac{2 \cdot 10t}{3\pi} \right) + \frac{1}{2} 25t \cdot 10t \cdot \frac{25t}{3} \right]}{\frac{\pi(6t)^2}{2} + \frac{1}{2} 30t \cdot 12t - \left[\frac{\pi(5t)^2}{2} + \frac{1}{2} 25t \cdot 10t \right]} = 9,65 t$$

$$I_x = \frac{\pi(12t)^4}{128} - \frac{\pi(10t)^4}{128} + 2 \frac{30t(6t)^3}{12} - 2 \frac{25t(5t)^3}{12} = 822,66 t^4,$$

$$I_{y_1} = \frac{\pi(12t)^4}{128} - \frac{\pi(10t)^4}{128} + 2 \frac{6t(30t)^3}{12} - 2 \frac{5t(25t)^3}{12} = 14\,242,86 t^4$$

$$A = \frac{\pi(6t)^2}{2} - \frac{\pi(5t)^2}{2} + \frac{30t \cdot 12t}{2} - \frac{25t \cdot 10t}{2} = 72,28 t^2,$$

$$I_y = I_{y_1} - A \bar{x}^2,$$

$$I_y = 14\,242,86 t^4 - 72,28 t^2 (9,65t)^2 = 7512,13 t^4.$$

2.15. Să se calculeze momentele de inerție I_x și I_y față de axele care trec prin centrul de greutate al suprafeței hașurate din figura 2.15. Se vor particulariza relațiile pentru $\alpha = 45^\circ$.

Rezolvare. Se folosesc relațiile date în anexa, 5, poziția 19.

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{(2R \sin \alpha)(2R \cos \alpha)^3}{12} + 2 \frac{R^4}{48} \left[12 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \right. \\ &\quad \left. - 8 \sin 2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \sin 4 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = \\ &= \frac{4}{3} R^4 \sin \alpha \cos^3 \alpha + \frac{R^4}{24} \left[12 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \right. \\ &\quad \left. - 8 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha \right] = \frac{R^4}{24} \left[32 \sin \alpha \cos^3 \alpha + \right. \\ &\quad \left. + 12 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - 8 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{\pi R^4}{4} - 2 \frac{R^4}{48} (12\alpha - 8 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha) = \\ &= \frac{R^4}{24} (6\pi - 12\alpha + 8 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha). \end{aligned}$$

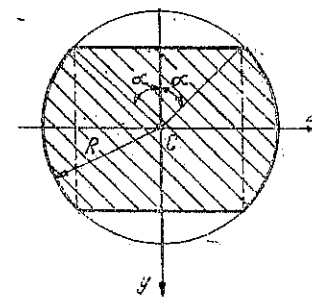


Fig. 2.15

Pentru $\alpha = 45^\circ$, rezultă :

$$I_z = \frac{R^4}{24} \left[32 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + 12 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 8 \cdot 1 \right] = \frac{\pi}{8} R^4,$$

$$I_y = \frac{R^4}{24} \left(6\pi - 12 \frac{\pi}{4} + 8 \cdot 1 \right) = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} \right) R^4.$$

2.16. Să se calculeze momentele de inerție și modulele de rezistență față de axele care trec prin centrul de greutate pentru secțiunea compusă din două profile $\cup 30$, cu găuri, așezate ca în figura 2.16.

Rezolvare. Pentru un profil $\cup 30$ se găsesc în anexa 8 următoarele date :

$$I_z = 8\,030 \text{ cm}^4; I_y = 495 \text{ cm}^4; A_1 = 58,8 \text{ cm}^2; e = 2,70 \text{ cm}; a = 10 \text{ cm}.$$

Rezultă pentru ansamblu :

$$I_z = 2 \cdot 8\,030 - 2 \left(\frac{2 \cdot 3^3}{12} + 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \right) = 15\,464 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 2 \left(495 + 2,70^2 \cdot 58,8 - \frac{3 \cdot 2^3}{12} \right) = 1\,843 \text{ cm}^4,$$

$$W_z = \frac{15\,464}{15} = 1\,031 \text{ cm}^3, \quad W_y = \frac{1\,843}{10} = 184,3 \text{ cm}^3.$$

2.17. Care trebuie să fie distanța b între profilele $\cup 20$, așezate ca în figura 2.17, pentru ca $I_z = I_y$?

Pentru un singur profil se cunosc : $I_z = 1\,910 \text{ cm}^4; I_y = 148 \text{ cm}^4; A_1 = 32,2 \text{ cm}^2; e = 2,01 \text{ cm}$ (anexa 8).

Rezolvare. $d = e + \frac{b}{2}$.

$$2I_z = 2I_{y_1} + 2A_1 d^2; I_z = I_{y_1} + A_1 d^2;$$

$$1\,910 = 148 + 32,2 d^2; d^2 = 54,72 \text{ cm}^2; d = 7,4 \text{ cm}.$$

Rezultă : $b = 2(d - e) = 2(7,4 - 2,01) = 10,78 \text{ cm}$.

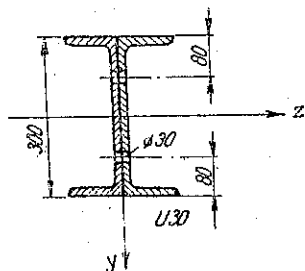


Fig. 2.16

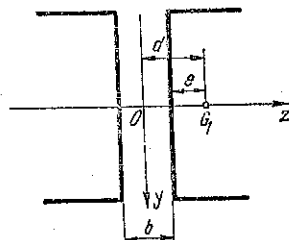


Fig. 2.17

2.18. Să se calculeze momentele de inerție față de axele z și y , pentru suprafața formată din patru profile $L 50 \times 50 \times 5$, așezate ca în figura 2.18.

Rezolvare. Pentru un singur profil, din anexa 6 :

$$I_z = 11 \text{ cm}^4; A_1 = 4,80 \text{ cm}^2; e = 1,40 \text{ cm}.$$

Pentru ansamblu : $I_z = I_y =$

$$= 4 \left[11 + 4,8 \cdot \left(\frac{20}{2} - 1,40 \right)^2 \right] = 1\,464 \text{ cm}^4.$$

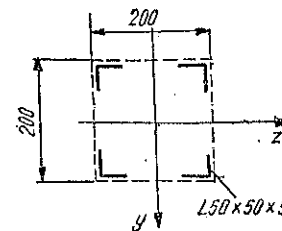


Fig. 2.18

2.19. Să se calculeze momentele de inerție și modulele de rezistență față de axele care trec prin centrul de greutate, pentru secțiunea compusă din figura 2.19.

Rezolvare. Pentru un singur profil I 20, în anexa 9 se găsește :

$$I_z = 2\,140 \text{ cm}^4; I_y = 117 \text{ cm}^4; A_1 = 33,5 \text{ cm}^2; h = 20 \text{ cm}.$$

$$\text{Pentru ansamblu : } I_z = 2I_{z_1} + 2 \left[\frac{bt^3}{12} + bt \left(\frac{h+t}{2} \right)^2 \right],$$

$$I_z = 2 \cdot 2\,140 +$$

$$+ 2 \left(\frac{30 \cdot 1^3}{12} + 30 \cdot 1 \cdot 10,5^2 \right) = 10\,900 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 2 \left[I_{y_1} + A_1 \frac{a^2}{4} + \frac{tb^3}{12} \right].$$

$$I_y = 2 \left(117 + 33,5 \cdot 10^2 + \frac{1 \cdot 30^3}{12} \right) = 11\,434 \text{ cm}^4,$$

$$W_z = \frac{10\,900}{11} = 991 \text{ cm}^3, \quad W_y = \frac{11\,434}{15} = 762 \text{ cm}^3.$$

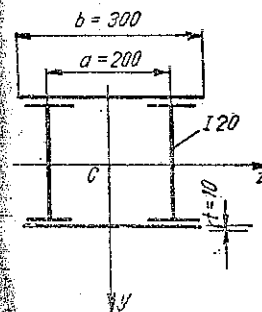


Fig. 2.19

2.20. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y , față de axele care trec prin centrul de greutate al sistemului format din trei profile $\cup$, lipite, dintre care două $\cup 20$ și unul $\cup 18$, așezate ca în figura 2.20.

Rezolvare. În anexa 8 se arată caracteristicile profilului $\cup$.

$$\cup 18 : I_z = 1\,350 \text{ cm}^4; I_y = 114 \text{ cm}^4,$$

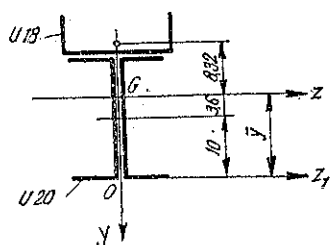


Fig. 2.20

$$I_z = 2[1\,910 + 32,2(13,6 - 10)^2] + [114 + 28(1,92 + 6,4)^2] = 6\,707 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2[148 + 32,2 \cdot 2,01^2] + 1\,350 = 1\,906 \text{ cm}^4$$

2.21. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y ale ansamblului profilurilor din figura 2.21, așezate lipite.

Rezolvare. Elementele geometrice cunoscute ale profilului U30 sunt:
 $I_z = 8\,030 \text{ cm}^4$; $I_y = 495 \text{ cm}^4$; $e = 2,70 \text{ cm}$; $A_1 = 58,8 \text{ cm}^2$.

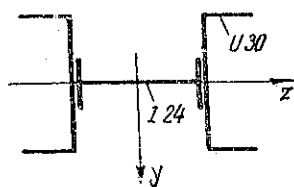


Fig. 2.21

Pentru profilul I24:

$$I_z = 4\,250 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 221 \text{ cm}^4$$

$$A_2 = 46,1 \text{ cm}^2$$

$$h = 24 \text{ cm}$$

$$I_z = 2I_{z1} + I_{z2} = 2 \cdot 8\,030 + 221 = 16\,281 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2\left[I_{y1} + A_1\left(e + \frac{h}{2}\right)^2\right] + I_{y2} =$$

$$= 2[495 + 58,8(2,7 + 12)^2] + 4\,250 = 30\,650 \text{ cm}^4$$

2.22. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y , față de axele care trec prin centrul de greutate, pentru secțiunea compusă din figura 2.22.

Rezolvare. Secțiunile diferitelor piese sunt: platbanda — $A = 18 \text{ cm}^2$, corniera — $A = 12,3 \text{ cm}^2$; inima — $A = 20 \text{ cm}^2$.

Golul unei găuri de nit are suprafața $A = 3,6 \text{ cm}^2$. Se obține:

$$\bar{y} = \frac{18 \cdot 0,5 + 2 \cdot 12,3 \cdot 3,26 + 20 \cdot 11 - 2 \cdot 3,6 \cdot 0,9}{18 + 2 \cdot 12,3 + 20 - 2 \cdot 3,6} = 5,45 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{18 \cdot 1^3}{12} + 18 \cdot 4,95^2 + 2 \cdot (72,2 + 12,3 \cdot 2,19^2) + \frac{1 \cdot 20^3}{12} +$$

$$+ 20 \cdot 5,55^2 - 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 1,8^3}{12} + 3,6 \cdot 4,55^2\right) \approx 1\,835 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1 \cdot 18^3}{12} + 2(72,2 + 12,3 \cdot 2,76^2) + \frac{20 \cdot 1^3}{12} - 2\left(\frac{1,8 \cdot 2^3}{12} + 3,6 \cdot 5^2\right) \approx 638 \text{ cm}^4$$

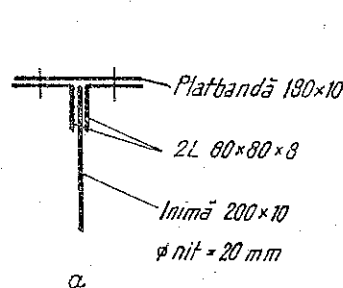


Fig. 2.22

2.23. Să se determine, pentru secțiunea din figura 2.23:
 a) momentele de inerție în raport cu sistemul de axe Ozy care trece prin centrul de greutate;
 b) poziția axelor principale de inerție și valoarea momentelor de inerție principale I_1 și I_2 .

Cotele în desen sunt date în milimetri.

Rezolvare. Cu cotele din figura 2.23 se determină poziția centrului de greutate C față de axele Oz_1y_1 :

$$\bar{y} = \frac{8 \cdot 1 \cdot (-5) + 6 \cdot 1 \cdot (-0,5)}{8 \cdot 1 + 6 \cdot 1} \approx -3,1 \text{ cm}; \quad \bar{z} = \frac{8 \cdot 1 \cdot 0,5 + 6 \cdot 1 \cdot 3}{8 \cdot 1 + 6 \cdot 1} \approx 1,6 \text{ cm}$$

Momentele de inerție față de axele Oz și Oy se calculează considerând figura ca diferența a două dreptunghiuri:

$$I_z = \frac{6 \cdot 9^3}{12} + 6 \cdot 9(4,5 - 3,1)^2 - \left[\frac{5 \cdot 8^3}{12} + 5 \cdot 8(5 - 3,1)^2\right] = 114 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{9 \cdot 6^3}{12} + 9 \cdot 6(3 - 1,6)^2 - \left[\frac{8 \cdot 5^3}{12} + 8 \cdot 5(3,5 - 1,6)^2\right] = 40,5 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție centrifugal se află considerind suprafața cu suma celor două dreptunghiuri hașurate:

$$I_{zy} = 8 \cdot 1 \cdot (-1,1) \cdot (-1,9) + 6 \cdot 1 \cdot (3 - 1,6) \cdot 2,6 = 38,56 \text{ cm}^4$$

Direcția axelor principale se află cu formula (2.16):

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot 38,56}{40,5 - 114} = \frac{-77,12}{73,5} = -1,0492;$$

$$2\alpha = -46^\circ 22'; \quad \alpha = -23^\circ 11'$$

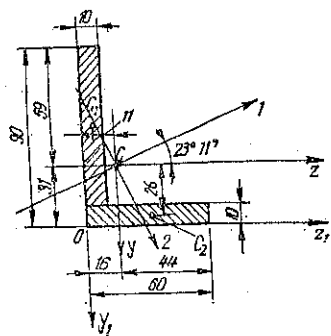


Fig. 2.23

Pentru calculul momentelor principale de inerție se aplică formula (2.15):

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} (114 + 40,5) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(114 - 40,5)^2 + 4 \cdot 38,56^2} = 77,25 \pm 53,2,$$

$$I_1 \approx 130 \text{ cm}^4; I_2 \approx 24 \text{ cm}^4.$$

2.24. Pentru secțiunea din figura 2.24 să se găsească poziția axelor principale de inerție și să se calculeze momentele principale de inerție.

Rezolvare. Elementele geometrice, date în anexa 8, ale profilului U8 sint:

$$I_{y_1} = 106 \text{ cm}^4; I_{x_1} = 19,4 \text{ cm}^4; A = 11 \text{ cm}^2$$

Momentele de inerție în raport cu axele Cz și Cy și momentul de inerție centrifugal I_{zy} sint:

$$I_z = \frac{1 \cdot 20^3}{12} + 2[19,4 + 11(10 - 1,45)^2] = 2 \ 313,7 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = \frac{20 \cdot 1^3}{12} + 2[106 + 11(4 + 0,5)^2] = 659,16 \text{ cm}^4,$$

$$I_{zy} = 11 \cdot 4,5 \cdot 8,55 + 11(-4,5) \cdot (-8,55) = 846,45 \text{ cm}^4.$$

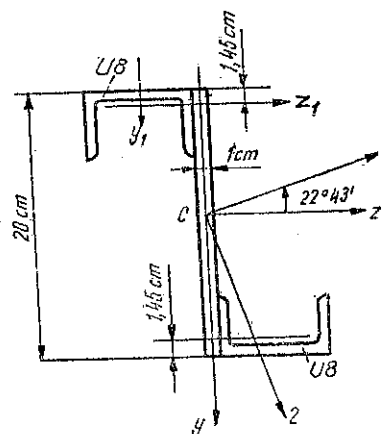


Fig. 2.24

Direcțiile principale se calculează cu relația (2.16):

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} = \frac{2 \cdot 846,45}{659,16 - 2 \ 313,7} = -1,023; 2\alpha = -45^\circ 26'; \alpha = -22^\circ 43'$$

Momentele de inerție principale sint, conform relației (2.15):

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} (I_z + I_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} (2 \ 313,7 + 659,16) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2 \ 313,7 - 659,16)^2 + 4 \cdot 846,45^2} = 1 \ 486,43 \pm 1 \ 183,58$$

$$I_1 = 2 \ 670 \text{ cm}^4; I_2 = 302,86 \text{ cm}^4.$$

2.25. Să se calculeze direcțiile principale și momentele de inerție principale față de un sistem de axe ce trece prin centrul de greutate al ansamblului din figura 2.25, a.

Rezolvare. Pentru profilul cornier L 60 × 60 × 10, din anexa 6 se obține $I_z = I_y = 34,9 \text{ cm}^4$; $A = 11,1 \text{ cm}^2$; $e = 1,85 \text{ cm}$, $I_u = 55,1 \text{ cm}^4$; $I_v = 14,8 \text{ cm}^4$; $I_{uv} = 0$.

Se determină poziția centrului de greutate C , față de axele Oz_1 și Oy_1 .

$$\bar{y} = \frac{11,1(-1,85) + 12 \cdot (-6)}{11,1 + 12 \cdot 1} = -4,0 \text{ cm},$$

$$\bar{z} = \frac{11,1 \cdot 2,85 + 12 \cdot 1 \cdot 0,5}{11,1 + 12 \cdot 1} \approx 1,63 \text{ cm}.$$

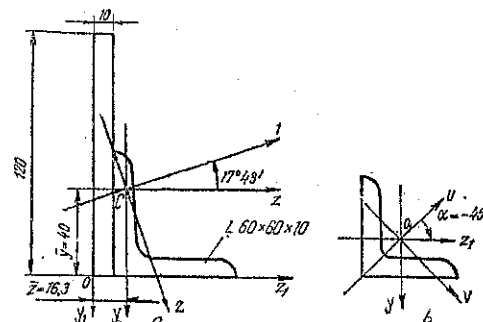


Fig. 2.25

Momentele de inerție axiale față de sistemul de axe Czy sint:

$$I_z = 34,9 + 11,1(4 - 1,85)^2 + \frac{1 \cdot 12^3}{12} + 1 \cdot 12(6 - 4)^2 = 278,2 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 34,9 + 11,1(2,85 - 1,63)^2 + \frac{12 \cdot 1^3}{12} + 1 \cdot 12 \cdot (1,63 - 0,5)^2 = 67,7 \text{ cm}^4.$$

Pentru determinarea momentului de inerție centrifugal în raport cu sistemul de axe Czy trebuie cunoscut, în prealabil, momentul de inerție centrifugal în raport cu sistemul de axe Oz_1y_1 , paralel cu primul, pentru a se putea aplica relația (2.5). Pentru cornierul cu aripi egale, direcțiile principale sint O_1uv (Fig. 2.25, b), deoarece O_1u este axă de simetrie.

Se aplică relația (2.14) cu notațiile din figura 2.25, b,

$$I_{z,y_1} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha + I_{uv} \cos 2\alpha,$$

$$I_{z,y_1} = \frac{55,1 - 14,8}{2} \sin(+90^\circ) = +20,15 \text{ cm}^4.$$

Momentul de inerție centrifugal al întregii suprafețe față de sistemul de axe Ozy este, conform relației (2.5) :

$$I_{zy} = +20,15 + 11,1 \cdot 1,22 \cdot (+2,15) + 12 \cdot 1(-1,13)(-2) \approx +76,5 \text{ cm}^4,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} = \frac{2 \cdot (+76,5)}{67,7 - 278,2} = -0,712; 2\alpha = -35^\circ 26'; \alpha = -17^\circ 43',$$

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} =$$

$$= \frac{278,2 + 67,7}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(278,2 - 67,7)^2 + 4(-76,5)^2}$$

$$I_1 \approx 303 \text{ cm}^4; I_2 \approx 43 \text{ cm}^4.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

2.26. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y față de axele ce trec prin centrul de greutate al rombului din figura 2.26.

$$\text{Răspuns : } I_z = \frac{bh^3}{3}; \quad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

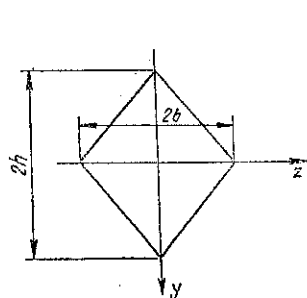


Fig. 2.26

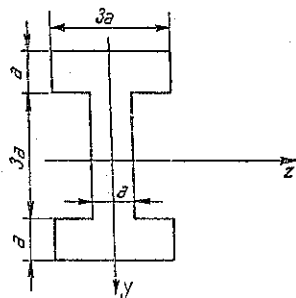


Fig. 2.27

2.27. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y ale secțiunii din figura 2.27, față de axele ce trec prin centrul de greutate.

$$\text{Răspuns : } I_z = \frac{321 a^4}{12}; \quad I_y = \frac{57 a^4}{12}$$

2.28. Să se calculeze momentele principale de inerție pentru suprafața hașurată din figura 2.28.

$$\text{Răspuns : } I_1 = 55,5 a^4; \quad I_2 = 15,5 a^4.$$

2.29. Să se calculeze momentul de inerție față de axa z pentru suprafața hașurată din figura 2.29.

$$\text{Răspuns : } I_z = 0,23 d^4.$$

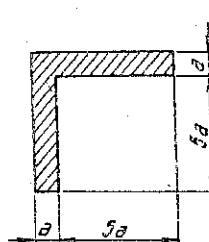


Fig. 2.28

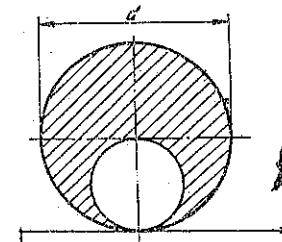


Fig. 2.29

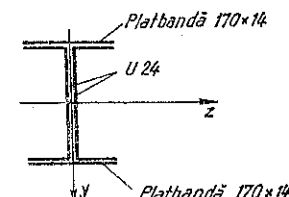


Fig. 2.30

2.30. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y față de axele care trec prin centrul de greutate pentru secțiunea compusă din figura 2.30 (piesele se consideră alăturate). Se utilizează anexa 8.

$$\text{Răspuns : } I_z = 2 \cdot 7450 \text{ cm}^4; \quad I_y = 2056 \text{ cm}^4.$$

2.31. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y pentru secțiunea compusă din figura 2.31. Se utilizează anexa 6.

$$\text{Răspuns : } I_z = I_y = 4(177 + 19,2 \cdot 3,32^2) = 1552 \text{ cm}^4.$$

2.32. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y față de axele care trec prin centrul de greutate, pentru secțiunea compusă din figura 2.32.

$$\text{Răspuns : } I_z = 4414 \text{ cm}^4; \quad I_y = 1467 \text{ cm}^4.$$

2.33. Să se calculeze momentele de inerție I_z și I_y față de axele care trec prin centrul de greutate, pentru secțiunea compusă din figura 2.33 (cotele sînt date în milimetri).

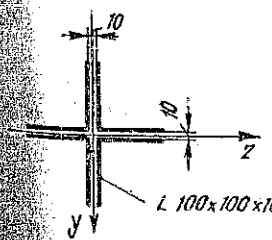


Fig. 2.31

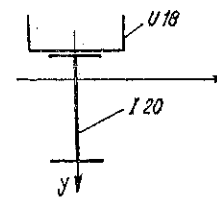


Fig. 2.32

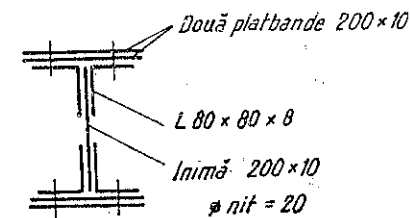


Fig. 2.33

2.34. Se dă secțiunea compusă, formată din profilele I 14 și I 12, așezate alăturat, ca în figura 2.34.

Se cere să se calculeze momentele de inerție ale secțiunii compuse, în raport cu axele Oz , Oy , care trec prin centrul de greutate al ansamblului. Se utilizează anexa 9.

Răspuns :

$$I_z = 594,5 \text{ cm}^4, \\ I_y = 679,5 \text{ cm}^4.$$

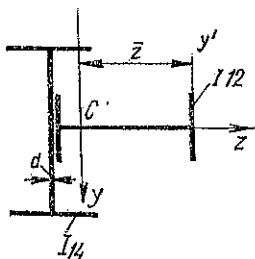


Fig. 2.34

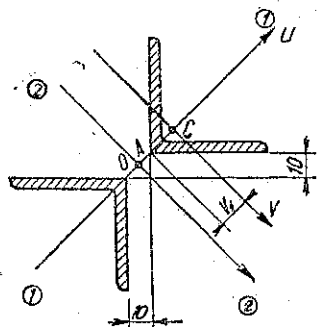


Fig. 2.35

2.35. Să se calculeze momentele de inerție față de axele 1 — 1 și 2 — 2 ce trec prin centrul de greutate, pentru suprafața formată din două corniere L 50 × 50 × 5, așezate ca în figura 2.35. Se utilizează anexa 6.

Răspuns :

$$I_1 = 34,8 \text{ cm}^4, \\ I_2 = 78,4 \text{ cm}^4.$$

DIAGrame DE EFORTURI IN BARE DREpte ȘI CURBE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. O grindă de forma din figura 3.a este în echilibru sub acțiunea forțelor aplicate și a reacțiunilor din reazeme. Dacă se face o secțiune s prin care se taie grinda, cele două părți obținute își pierd echilibrul. Spre a restabili echilibrul uneia dintre părți — de exemplu, cea din dreapta (Fig. 3.a) — se introduce în secțiune o rezultantă R și un cuplu M care reprezintă reducerea față de secțiune a forțelor din partea stângă ce au fost înlăturate.

Alegând un sistem de axe $Oxyz$ — axa x în lungul barei, axa y în secțiune verticală și axa z în secțiune orizontală —, se pot descompune R și M pe axe și se obțin (Fig. 3.b) :

N — forța axială, componenta forței R pe Ox ;

T — forța tăietoare, componenta forței R în planul Oyz al secțiunii ;

T_y — forța tăietoare perpendiculară pe Oz , proiecția pe Oy a forței T ;

T_z — forța tăietoare perpendiculară pe Oy , proiecția pe Oz a forței T ;

M — momentul de răsucire, componenta pe Ox a cuplului M ;

M_i — momentul încovoietor, componenta în planul secțiunii a lui M ,

M_z — proiecția pe Oz a lui M_i ;

M_y — proiecția pe Oy a lui M_i .

Mărimile de mai sus se consideră pozitive, când au sensurile din figura 3.c.

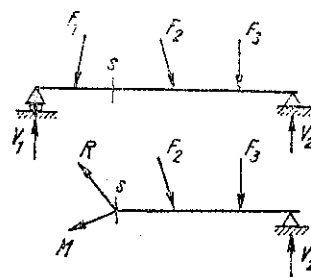


Fig. 3.a

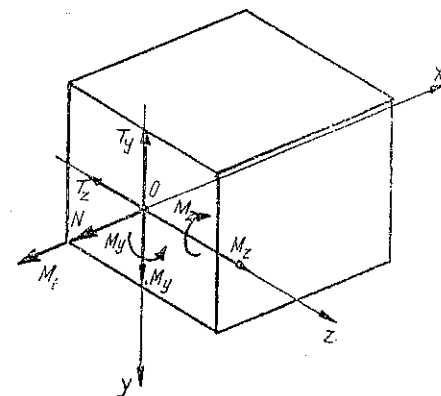


Fig. 3.b

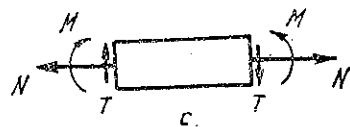


Fig. 3.c.

2. Cele șase mărimi definite se reduc la trei, în cazul când toate forțele trec prin axa barei și sînt conținute într-un singur plan. Luînd planul forțelor ca plan vertical Oxy , rămîn numai N , T_y , M_z , care se scriu și se definesc astfel:

N , forța axială într-o secțiune oarecare, este suma proiecțiilor pe axa

barei a forțelor din stînga secțiunii (sau a celor din dreapta).

T , forța tăietoare într-o secțiune, este suma proiecțiilor pe normala la axa barei a forțelor din stînga secțiunii (sau a celor din dreapta).

M , momentul încovoietor, este suma momentelor forțelor din stînga secțiunii (inclusiv cupluri), luate față de secțiune (sau a celor din dreapta).

Cele trei eforturi sînt pozitive cînd au sensurile indicate pe figura 3.c.

3. Între eforturile T , M și sarcina distribuită p există relațiile diferențiale:

$$p = -\frac{dT}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2}; \quad T = \frac{dM}{dx} \quad (3.1)$$

Tabelul 3.a

Sarcina	Forța tăietoare T	Momentul încovoietor M
$p = 0$	constantă $T = 0$	variație liniară constant
$p = \text{const.}$	variație liniară variație după o parabolă de gradul II	variație după o parabolă de gradul III
variație liniară	variație după o parabolă de gradul II variație după o parabolă de gradul III	
$p = ax^n + bx^{n-1} + \dots$	$T = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + \frac{b}{n} x^n + \dots + C_1$	$M = \frac{a}{(n+1)(n+2)} x^{n+2} + \frac{b}{n(n+1)} x^{n+1} + \dots + C_1 x + C_2$

4. Forța tăietoare și momentul încovoietor se pot obține, în cazul general, prin integrarea relațiilor (3.1):

$$T = -\int p dx + C_1; \quad M = \int T dx + C_2. \quad (3.2)$$

Dacă legea de variație a lui p este un polinom de gradul n , cea a forței tăietoare este un polinom de gradul $n+1$ și cea a momentului încovoietor un polinom de gradul $n+2$. Pe baza relațiilor (3.2) s-a întocmit tabelul 3. a din care se poate deduce imediat forma legii de variație a funcțiilor T și M , atunci cînd se cunoaște încărcarea grinzii.

5. Pentru construcția diagramelor de eforturi N , T , M se alege un sens de parcurs al barei, adică de creștere a variabilei x , de exemplu, de la stînga spre dreapta. La barele cotate se rotește hirtia în așa fel ca, pe rînd, fiecare bară să fie parcursă de la stînga spre dreapta.

Pentru executarea graficelor se ia o linie de reper ca origine a diagramei, paralelă cu bara și de aceeași lungime cu aceasta. Forțele axiale și tăietoare pozitive se reprezintă la o scară oarecare, deasupra liniei de reper, iar cele negative dedesubt. Pentru momente, convenția este inversă: momentele pozitive se reprezintă dedesubtul liniei de reper, iar cele negative deasupra.

6. Pentru un element de lungime ds din bară curbă ca în figura 3.d, pe ale cărui secțiuni există eforturile N , T , M , $N+dN$, $T+dT$, $M+dM$ și încărcat cu o sarcină uniform distribuită q , se pot scrie relațiile diferențiale între aceste elemente, servind la construirea diagramelor N , T , M :

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{T}{R}; \quad \frac{dT}{ds} = -q - \frac{N}{R}; \quad \frac{dM}{ds} = T. \quad (3.3)$$

B. PROBLEME REZOLVATE

3.1...3.7. Să se traseze diagramele N , T , M pentru grinzile din figurile 3.1...3.7 solicitate de sarcini concentrate.

Rezolvare. Trasarea diagramelor T și M se face pe baza celor arătate la Definiții și formule.

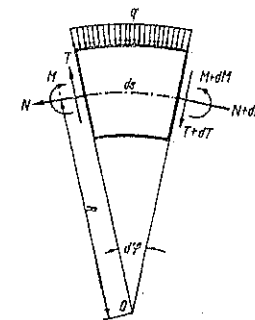


Fig. 3.d.

a) Neexistind sarcină distribuită ($p = 0$), pe intervalul dintre sarcini forța tăietoare este constantă și momentul încovoietor variază linear (v. tabelul 3.a).

b) În dreptul sarcinilor concentrate forța tăietoare are un salt (discontinuitate) egal cu mărimea forței și având același sens cu aceasta.

c) Reacțiunile sînt considerate ca sarcini exterioare (forțe sau cupluri concentrate).

Ținînd seama de aceste observații, diagramele se construiesc după cum urmează:

— Diagrama T se trasează direct, prin însumarea algebrică a proiecțiilor forțelor pe normala la axa grinzii (din stînga sau din dreapta unei secțiuni).

— Diagrama M se trasează calculînd valorile momentelor încovoietoare în fiecare din punctele în care se aplică sarcini și știînd că între două sarcini succesive momentul încovoietor variază linear. Se dau pentru exemplificare calculele complete pentru problemele 3.1 și 3.3. Pentru celelalte probleme se indică pe figură mărimile reacțiunilor și se dau direct diagramele.

Problema 3.1. a) Forțele tăietoare:

$$T_2 = 20 \text{ kN}; \quad T'_1 = 20 \text{ kN};$$

$$T''_1 = 20 + 10 = 30 \text{ kN}; \quad T_0 = 30 \text{ kN}.$$

b) Momentele încovoietoare:

$$M_2 = 0; \quad M_1 = -2 \cdot 20 = -40 \text{ kNm},$$

$$M_0 = -20 \cdot 3 - 10 \cdot 1 = -70 \text{ kNm}.$$

Problema 3.3. a) Reacțiunile:

$$V_1 = \frac{30 \cdot 3,5 - 40 \cdot 1,5}{4,5} = 10 \text{ kN};$$

$$V_2 = \frac{30 \cdot 1 - 40 \cdot 3}{4,5} = -20 \text{ kN}.$$

Sensul reacțiunii V_2 este invers celui din figura 3.3.

b) Forțele tăietoare:

$$T_{13} = V_1 = 10 \text{ kN};$$

$$T_{34} = V_1 - P_1 = -20 \text{ kN};$$

$$T_{42} = T_{34} + P_2 = 20 \text{ kN}.$$

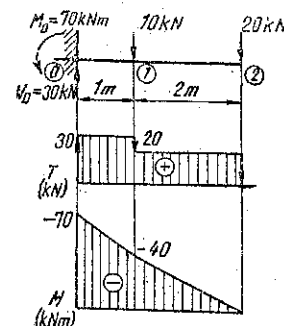


Fig. 3.1

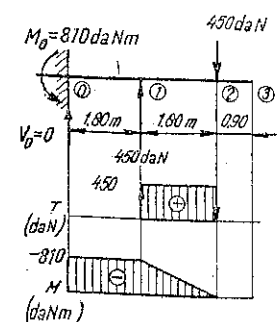


Fig. 3.2

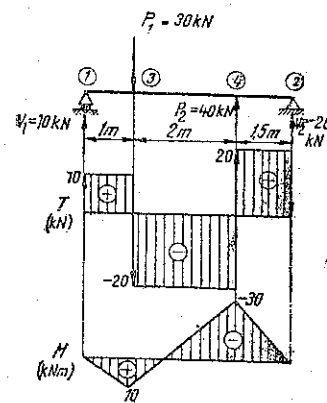


Fig. 3.3

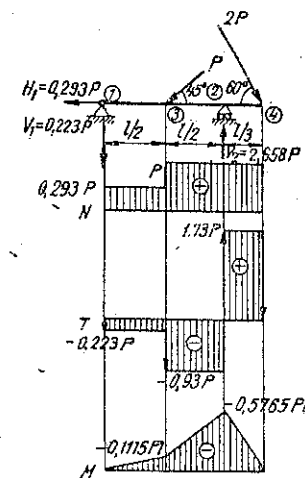


Fig. 3.4

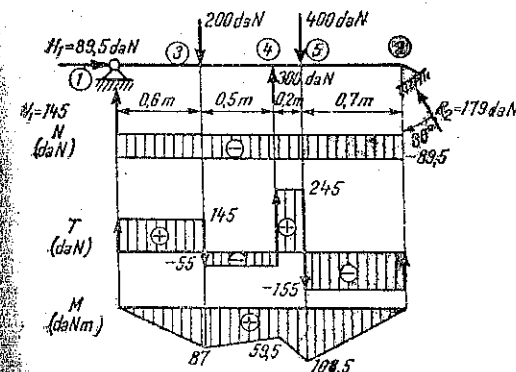


Fig. 3.5

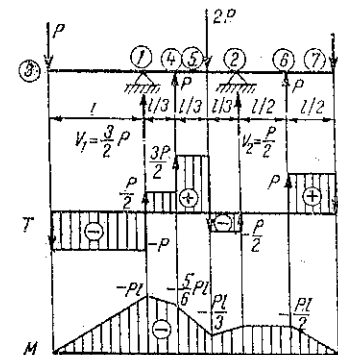


Fig. 3.6

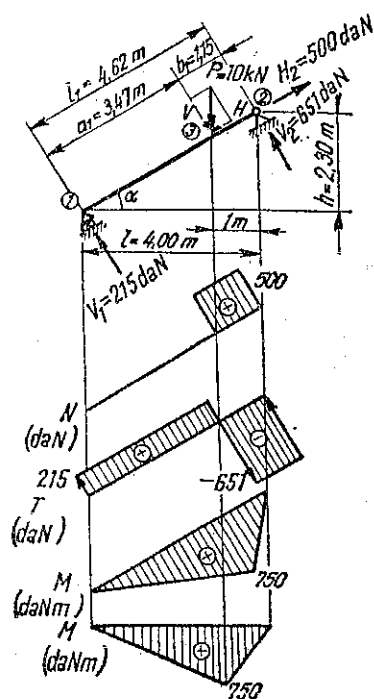


Fig. 3.7

lui și avind același sens cu acesta. Pentru exemplificarea metodicii de rezolvare a acestui tip de probleme se dau toate calculele pentru problema 3.9.

Problema 3.9. a) Reacțiunile :

$$V_2 l + M_4 - M_3 = 0;$$

$$V_2 = \frac{M_3 - M_4}{l} = \frac{6 - 4}{4} = 0,5 \text{ kN};$$

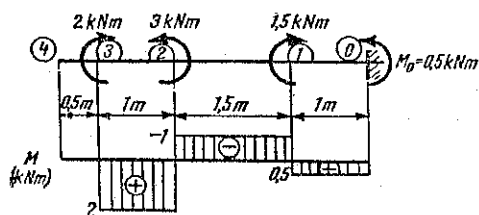


Fig. 3.8

c) Momentele încovoietoare :

$$M_{13} = V_1 x = 10x; M_1 = 0;$$

$$M_3 = 10 \text{ kNm}; M_{34} = V_1 x - P_1(x-1);$$

$$M_4 = -30 \text{ kNm}.$$

Observații. 1) Se va urmări permanent legătura dintre mărimea forței tăietoare și panta diagramei momentului încovoietor. De exemplu, la problema 3.1 se observă că pe intervalul 0—1 panta momentului încovoietor este mai mare ca pe intervalul 1—2, deoarece forța tăietoare pe intervalul 0—1 este mai mare.

2) În punctul unde forța tăietoare trece prin zero, momentul încovoietor are o valoare extremă (maxim sau minim). De exemplu, la problema 3.5, punctele 3, 4 și 5.

3.8...3.10. Să se traseze diagramele T , M pentru grinzile din figurile 3.8—3.10, solicitate de cupluri concentrate.

Rezolvare. Trasarea diagramei T , M se face pe baza observațiilor de la problemele 3.1...3.7, avind în plus în vedere că în dreptul cuplurilor concentrate momentul încovoietor are un salt (discontinuitate) egal cu mărimea cuplu-

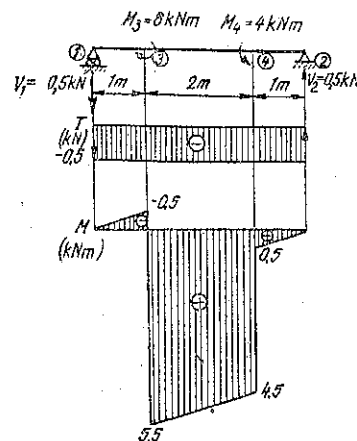


Fig. 3.9

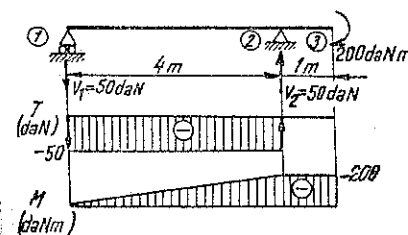


Fig. 3.10

$$M_3' = -0,5 + 6 = 5,5 \text{ kNm};$$

$$M_4' = -0,5 \cdot 3 + 6 = 4,5 \text{ kNm};$$

$$M_4'' = 4,5 - 4 = 0,5 \text{ kNm};$$

$$M_2 = 0.$$

3.11. Să se traseze diagramele T , M pentru grinzile din figura 3.11, solicitate de cupluri distribuite și concentrate.

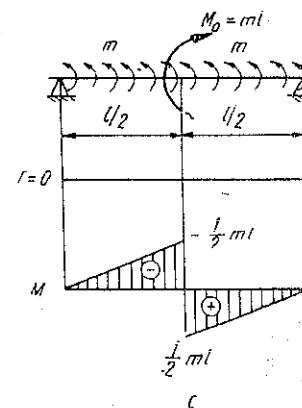
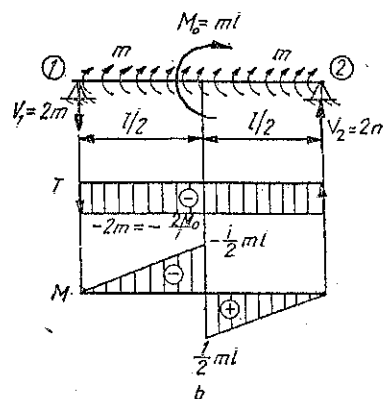
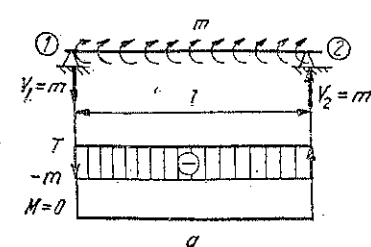


Fig. 3.11

3.12...3.20. Să se traseze diagramele T , M pentru grinzile din figurile 3.12...3.20, solicitate de sarcini distribuite.

Rezolvare. Trasarea diagramelor T și M se face pe baza următoarelor observații:

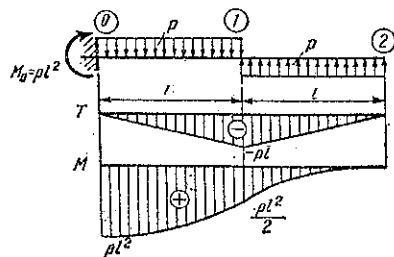


Fig. 3.12

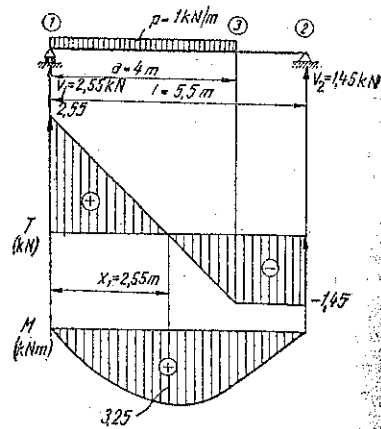


Fig. 3.13

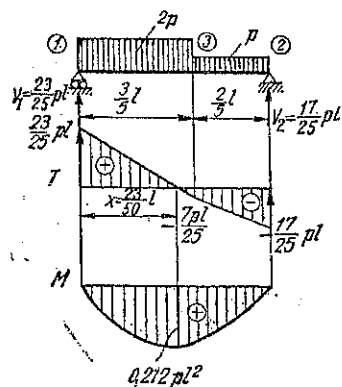


Fig. 3.14

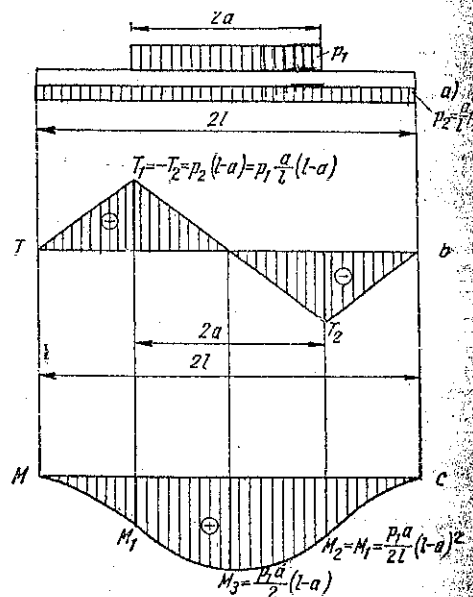


Fig. 3.15

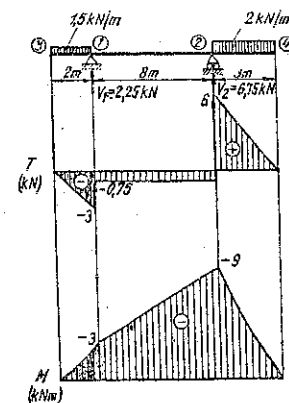


Fig. 3.16

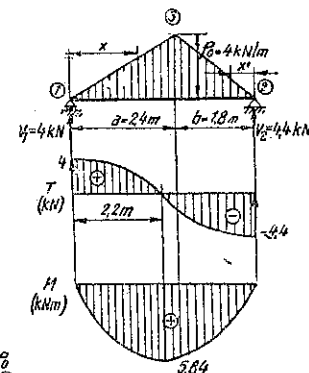


Fig. 3.18

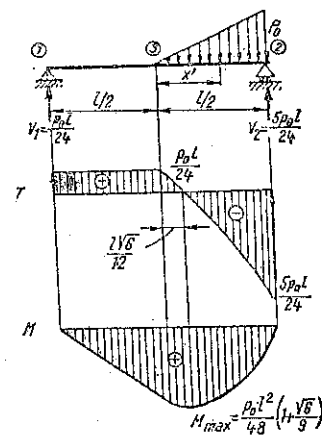


Fig. 3.19

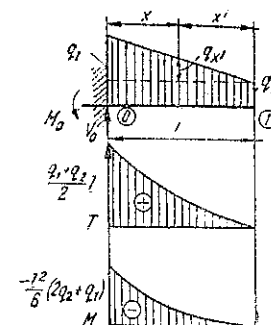


Fig. 3.17

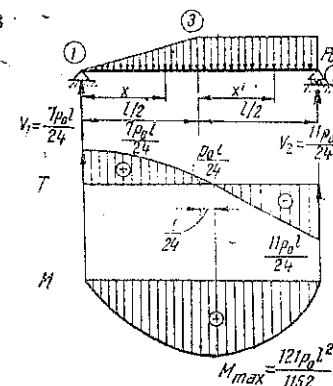


Fig. 3.20

a) Pe intervalele pe care nu există sarcini distribuite ($p = 0$), se tine seama de observațiile de la problemele 3.1...3.7 și 3.8...3.10.

b) Pe porțiunile pe care există sarcină uniform distribuită ($p = \text{const.}$) forța tăietoare variază linear și momentul încovoietor variază parabolic (v. tab. 3.a).

c) Pe porțiunile pe care există sarcină distribuită linear, forța tăietoare variază după o parabolă de gradul II și momentul încovoietor după o parabolă cubică (v. tabelul 3.a).

d) Deși asupra grinzilor nu sînt aplicate decît sarcini distribuite, în reazeme totuși apar forțe și cupluri concentrate.

Ținînd seama de aceste observații, diagramele se trasează după cum urmează:

— *Diagrama T* (pe porțiunile unde există sarcini distribuite): se calculează valorile forței tăietoare la cele două capete ale intervalului, se reprezintă în diagramă rezultatele, între care se trasează o linie dreaptă, dacă $p = \text{const.}$, sau o parabolă, dacă $p = \text{linear}$.

— *Diagrama M*: se calculează valorile momentului încovoietor la capetele tuturor intervalelor, se reprezintă în diagramă rezultatele, între care se duc linii drepte, dacă $p = 0$, sau parabole, dacă $p \neq 0$.

În punctele unde $T = 0$ se calculează $M_{\max}$.

Pentru exemplificarea metodicii de rezolvare a acestui tip de problemă se dau toate calculele pentru problemele 3.13 și 3.17:

$$\text{Problema 3.13 } V_1 = \frac{p \cdot a \left(l - \frac{a}{2} \right)}{l} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 3,5}{5,5} = 2,55 \text{ kN,}$$

$$V_2 = \frac{p \cdot a \frac{a}{2}}{l} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 2}{5,5} = 1,45 \text{ kN,}$$

$$M_{13} = V_1 x - \frac{p x^2}{2} = 2,55 x - \frac{x^2}{2}; \quad M_3 = 2,55 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} = 2,2 \text{ kNm.}$$

Secțiunea în care momentul este maxim se află anulînd derivata expresiei lui M_{13} :

$$\frac{dM_{13}}{dx} = V_1 - p x_1 = 0; \quad x_1 = \frac{V_1}{p} = 2,55 \text{ m.}$$

În această secțiune, forța tăietoare este nulă și:

$$M_{\max} = V_1 x_1 - \frac{p x_1^2}{2} = 2,55 \cdot 2,55 - \frac{1 \cdot 2,55^2}{2} = 3,25 \text{ kNm.}$$

Problema 3.17. Pentru simplificare se consideră că grinda este supusă la două sarcini suprapuse: o sarcină uniform distribuită q_2 și una triunghiulară, avînd maximumul $q_1 - q_2$.

a) *Reacțiunile*:

$$V_0 = q_2 l + \frac{(q_1 - q_2) l}{2} = \frac{(q_1 + q_2) l}{2}.$$

Pentru calculul momentului din încastrare se consideră că fiecare dintre cele două sarcini distribuite se concentrează în centrul de greutate respectiv:

$$M_0 = -q_2 l \frac{l}{2} - \frac{(q_1 - q_2) l}{2} \frac{l}{3} = -\frac{l^2}{6} (q_1 + 2q_2).$$

b) *Forțele tăietoare*:

$$T_x = q_2 x' + q_x \frac{x'}{2}.$$

Sarcina q_x se determină din asemănarea triunghiurilor:

$$\frac{q_x}{q_1 - q_2} = \frac{x'}{l}; \quad q_x = \frac{(q_1 - q_2)}{l} x',$$

$$T_x = q_2 x' + \frac{q_1 - q_2}{l} x' \frac{x'}{2} = \frac{q_1 - q_2}{l} \frac{x'^2}{2} + q_2 x'.$$

Forța tăietoare variază parabolic și are la cele două capete ale grinzii valorile:

$$T_0 = q_2 l + \frac{q_1 - q_2}{l} \frac{l^2}{2} = \frac{q_1 + q_2}{2} l = V_0; \quad T_1 = 0.$$

c) *Momentele încovoietoare*:

Luînd momentele de la dreapta secțiunii, rezultă:

$$M_x = - \left(q_2 \frac{x'^2}{2} + \frac{q_1 - q_2}{l} \frac{x'^3}{6} \right).$$

Momentul încovoietor variază după o parabolă cubică:

$$M_1 = 0; \quad M_0 = - \left(\frac{q_2 l^2}{2} + \frac{q_1 - q_2}{l} \frac{l^3}{6} \right) = -\frac{l^2}{6} (2q_2 + q_1).$$

3.21—3.39. Să se traseze diagramele N , T , M pentru grinzile din figurile 3.21—3.39.

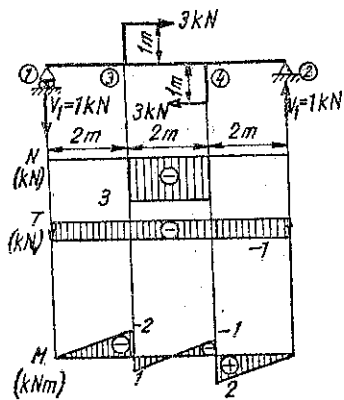


Fig. 3.21

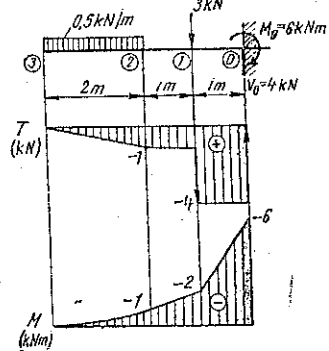


Fig. 3.23

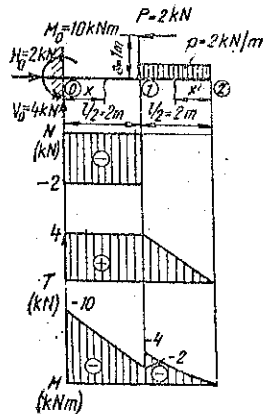


Fig. 3.25

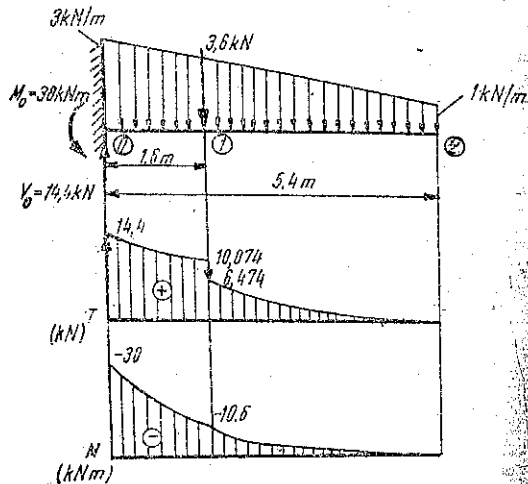


Fig. 3.22

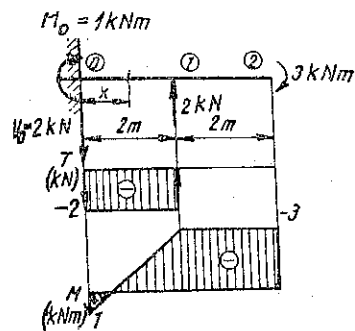


Fig. 3.24

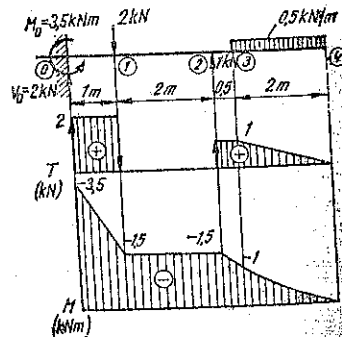


Fig. 3.26

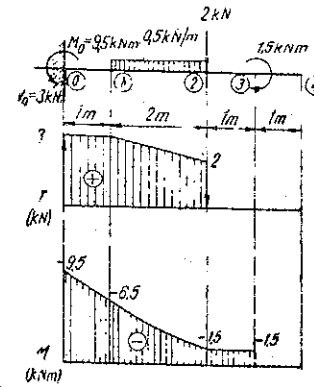


Fig. 3.27

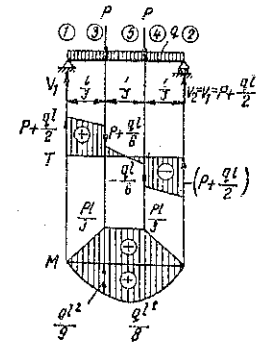


Fig. 3.28

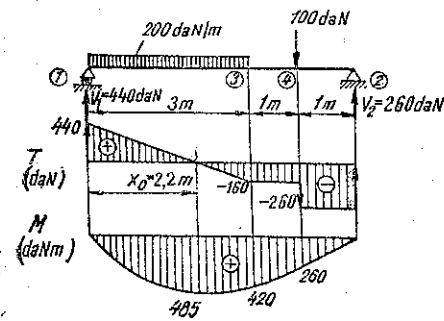


Fig. 3.29

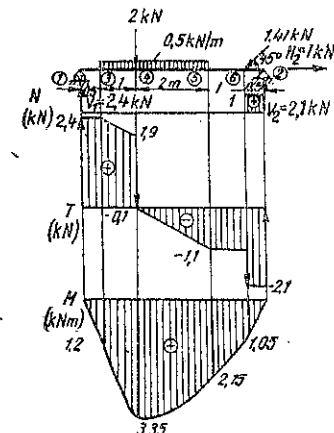


Fig. 3.30

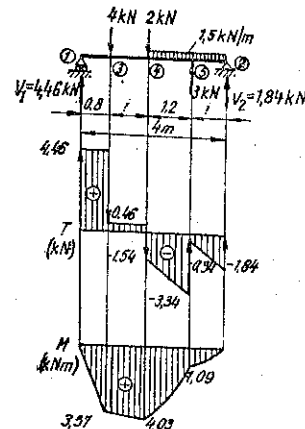


Fig. 3.31

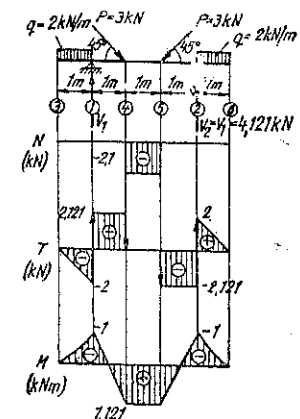


Fig. 3.32

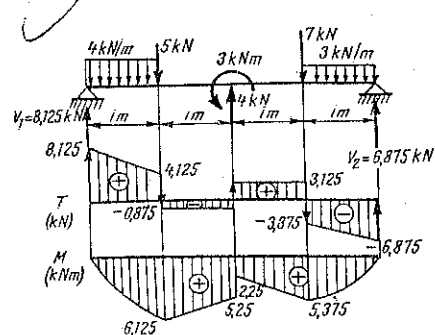


Fig. 3.33

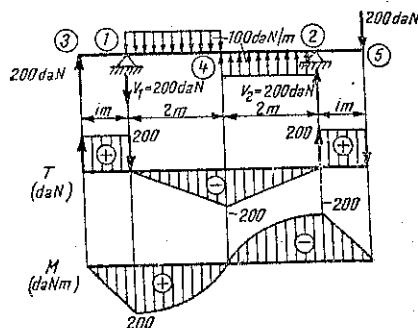


Fig. 3.34

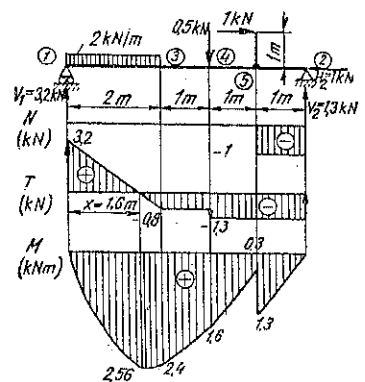


Fig. 3.35

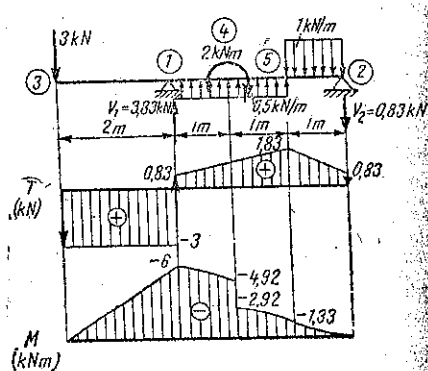


Fig. 3.36

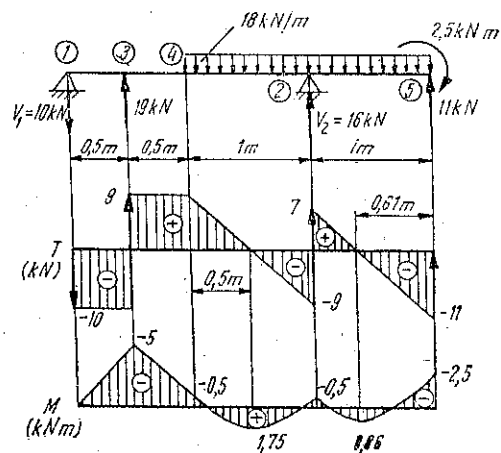


Fig. 3.37

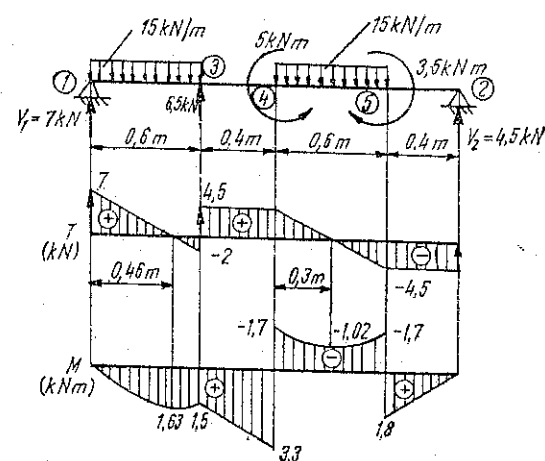


Fig. 3.38

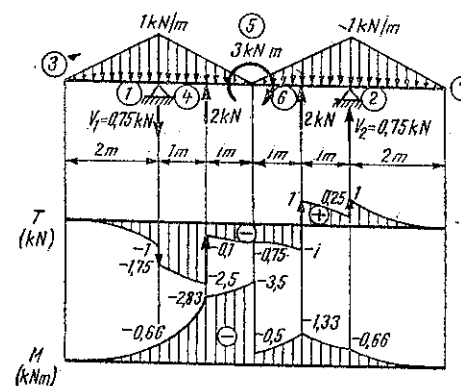


Fig. 3.39

3.40. Să se traseze diagramele N , T , M pentru grinda orizontală din figura 3.40.

3.41...3.51. Să se traseze diagramele N , T , M pentru sistemele de bare din figurile 3.41...3.51.

3.52...3.53. Să se traseze diagramele T , M pentru grinzile din figurile 3.52...3.53, solicitate de sarcini cuprinse în două plane perpendiculare între ele.

Rezolvare. Se studiază variația mărimilor T și M pentru fiecare plan în parte și se desenează separat diagramele.

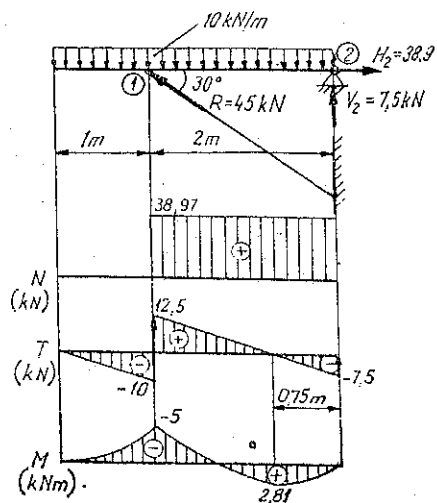


Fig. 3.40

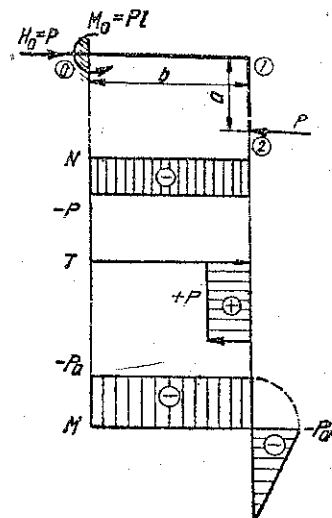


Fig. 3.41

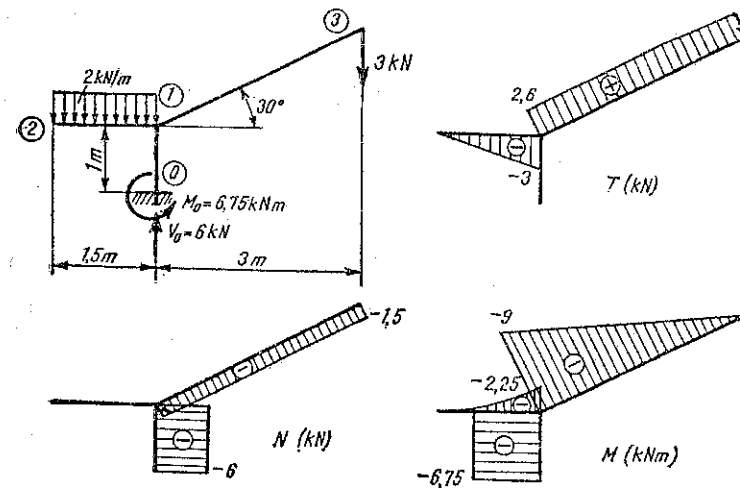


Fig. 3.43

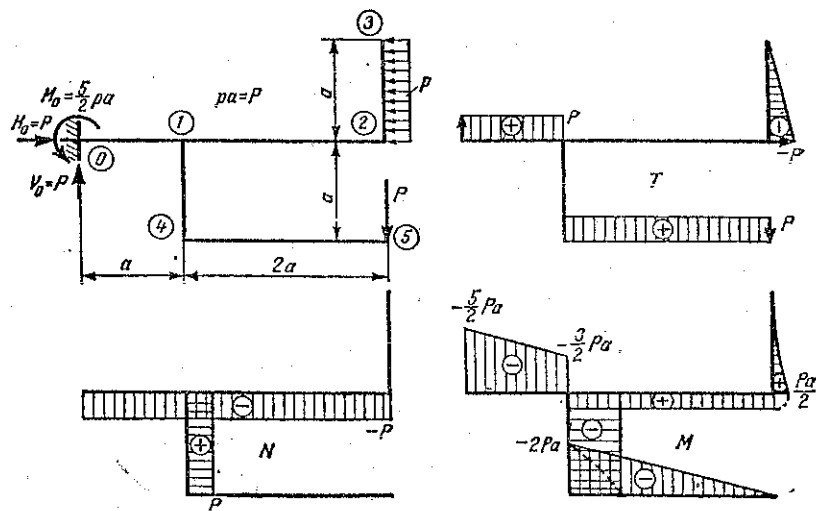


Fig. 3.42

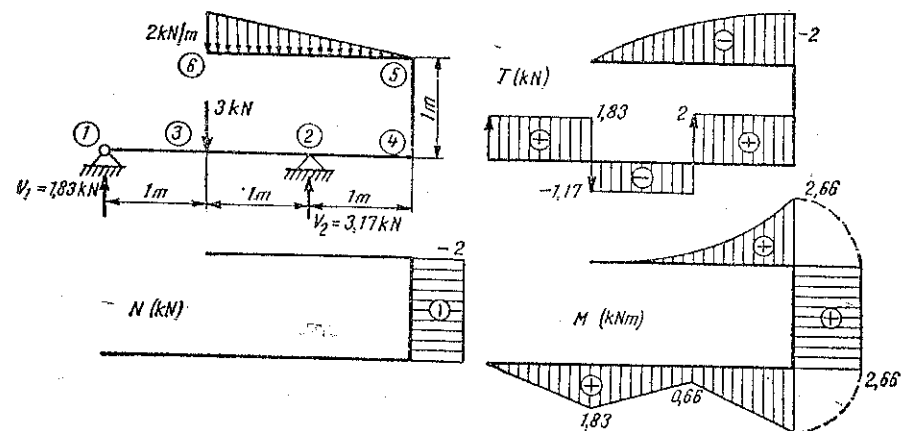


Fig. 3.44

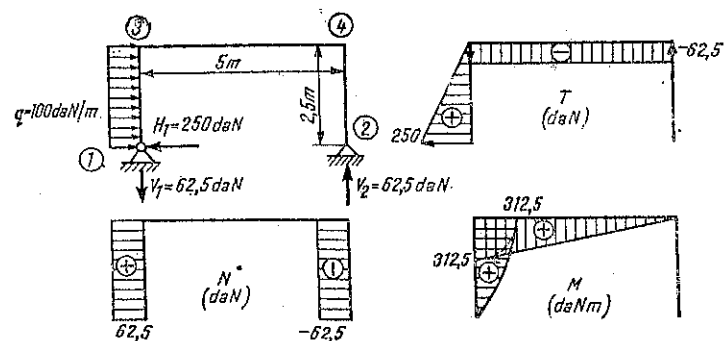


Fig. 3.45

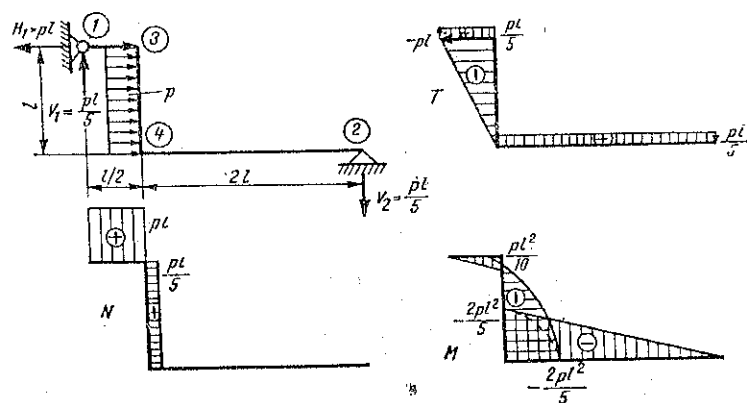


Fig. 3.46

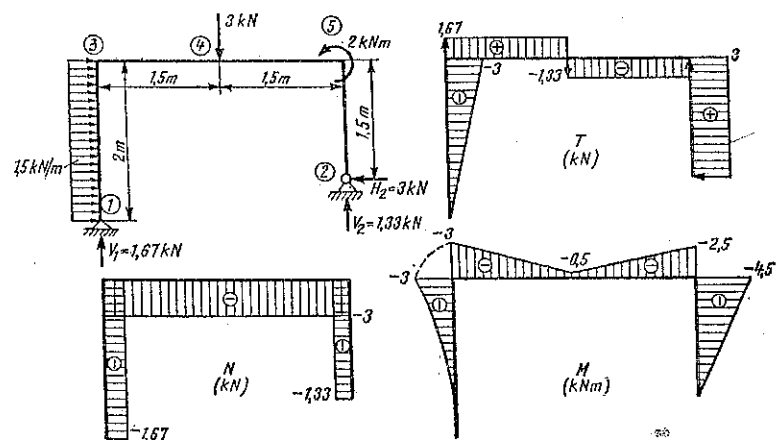


Fig. 3.47

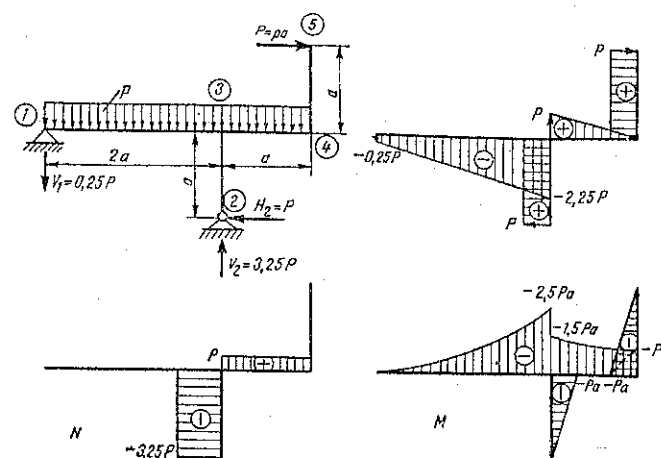


Fig. 3.48

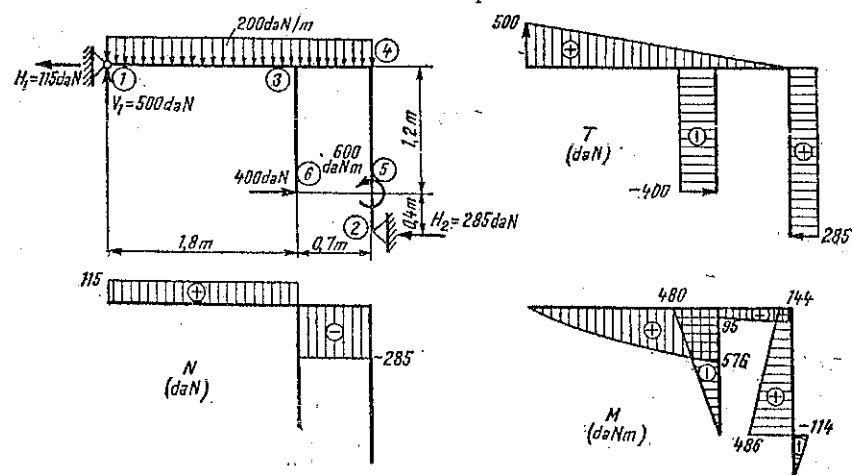


Fig. 3.49

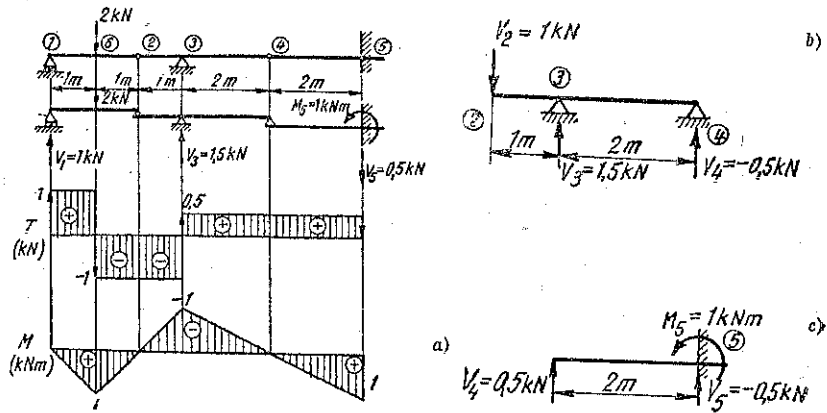


Fig. 3.50

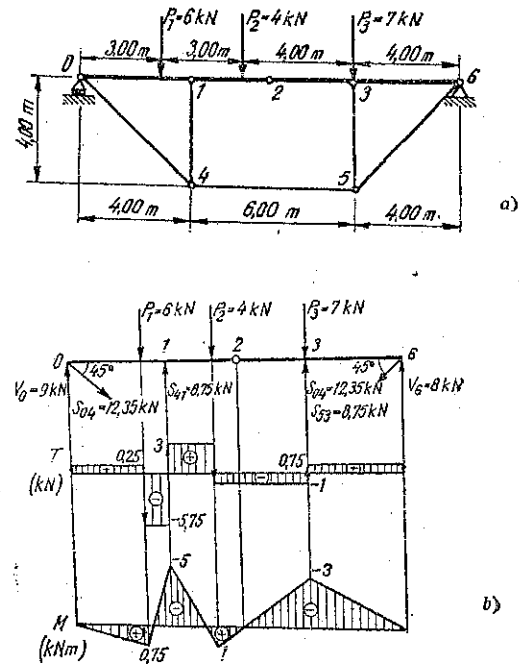


Fig. 3.51

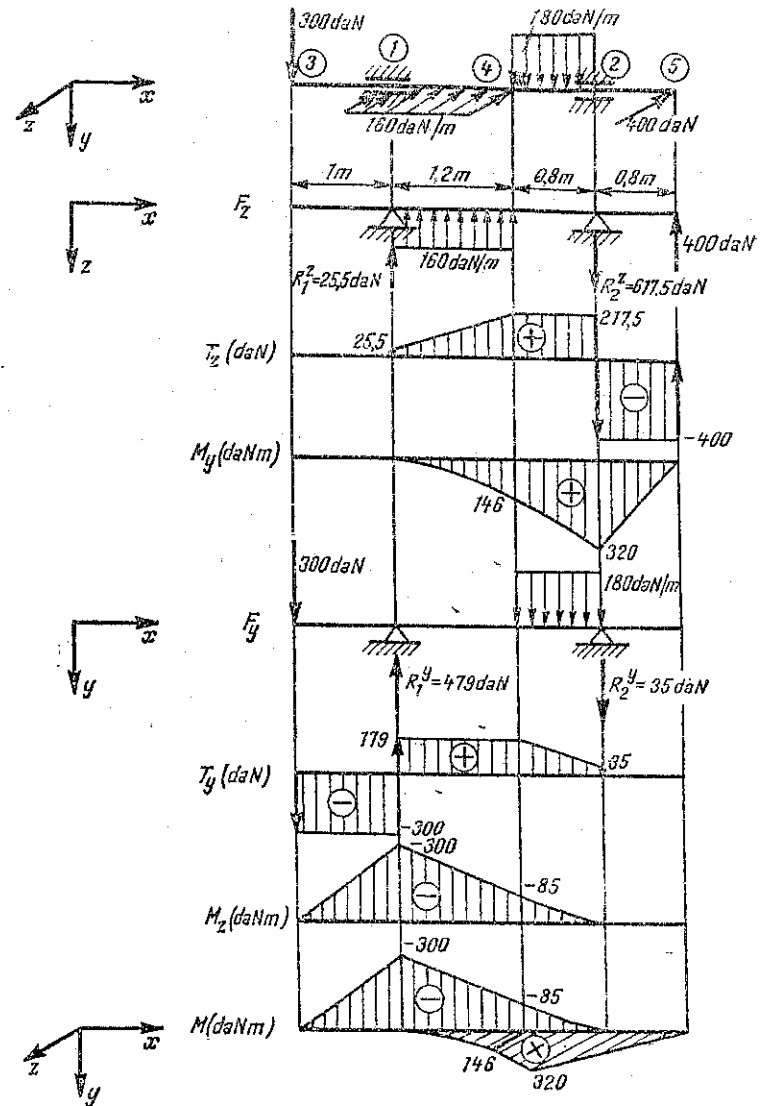


Fig. 3.52

În ultima diagramă se reprezintă simultan variația momentului încovoietor în cele două plane considerate.

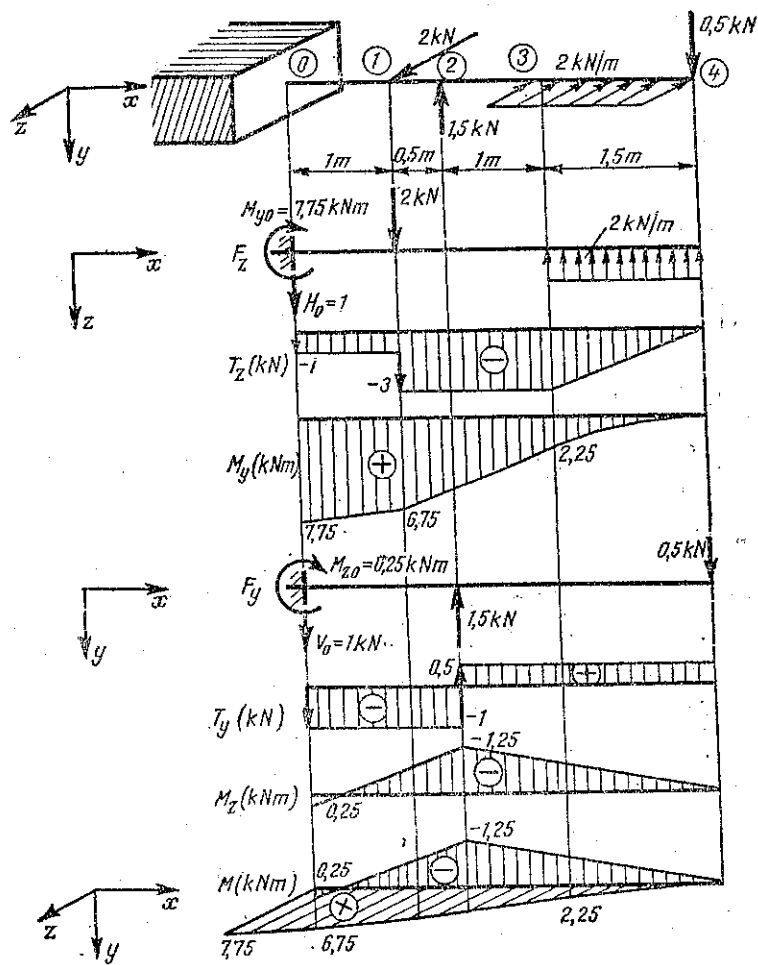


Fig. 3.53

3.54. Să se determine reacțiunile din încastrarea 0 și să se construiască diagramele N , T , M pentru arcele din figura 3.54, a.

Rezolvare. Pentru primul arc, din ecuațiile de echilibru rezultă: $H = P$; $V = 0$; $M_0 = PR$.

Într-o secțiune oarecare A , determinată prin unghiul φ :

$$N = -P \cos \varphi; T = P \sin \varphi; M = P(R - R \cos \varphi) = PR(1 - \cos \varphi).$$

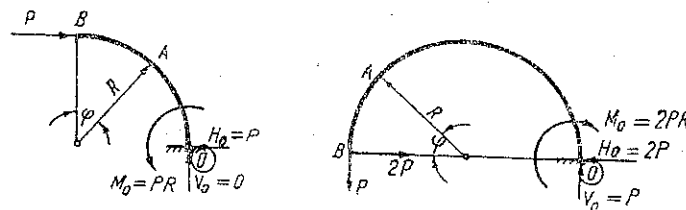


Fig. 3.54, a

Expresiile de mai sus verifică ecuațiile diferențiale (3.3)

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dN}{d\varphi} = \frac{P \sin \varphi}{R} = \frac{T}{R},$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dT}{d\varphi} = -\frac{P \cos \varphi}{R} = -\frac{N}{R}, \quad \frac{dM}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} = \frac{PR \sin \varphi}{R} = P \sin \varphi = T.$$

Diagramele N , T , M sunt desenate în figura 3.54, b. Pentru al doilea arc, din ecuațiile de echilibru rezultă:

$$H = 2P; V = P; M_0 = 2PR.$$

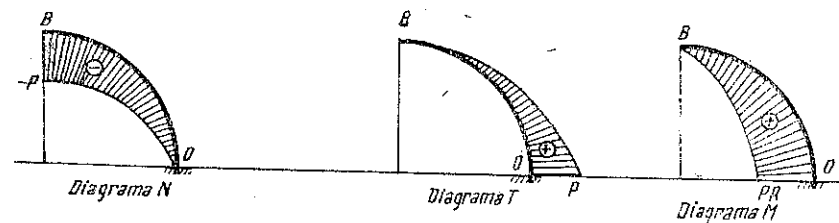


Fig. 3.54, b

Într-o secțiune oarecare A , determinată prin unghiul φ :

$$N = P \cos \varphi - 2P \sin \varphi = P(\cos \varphi - 2 \sin \varphi),$$

$$T = -P \sin \varphi - 2P \cos \varphi = -P(\sin \varphi + 2 \cos \varphi),$$

$$M = -P(R - R \cos \varphi) - 2PR \sin \varphi = -PR(1 - \cos \varphi + 2 \sin \varphi).$$

Aceste expresii verifică ecuațiile diferențiale (3.3)

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dN}{d\varphi} = - \frac{P(\sin \varphi + 2 \cos \varphi)}{R} = - \frac{T}{R};$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dT}{d\varphi} = - \frac{P(\cos \varphi - 2 \sin \varphi)}{R} = - \frac{N}{R};$$

$$\frac{dM}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} = - \frac{PR(\sin \varphi + 2 \cos \varphi)}{R} = - P(\sin \varphi + 2 \cos \varphi) = T.$$

Valorile maxime și minime ale acestor eforturi sînt:

Pentru N : $N_B = P$; $N_0 = -P$; $\frac{dN}{d\varphi} = P(-\sin \varphi - 2 \cos \varphi) = 0$.

Rezultă: $\operatorname{tg} \varphi = -2$; $\varphi = 116^\circ 30'$;

$N_{\max} = P(\cos 116^\circ 30' - 2 \sin 116^\circ 30') = -2,23 P$.

Pentru T : $T_B = -2P$; $T_0 = 2P$; $\frac{dT}{d\varphi} = -P(\cos \varphi - 2 \sin \varphi) = 0$.

Rezultă: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 26^\circ 30'$.

$T_{\max} = -P(\sin 26^\circ 30' + 2 \cos 26^\circ 30') = -2,23 P$.

Pentru M : $M_B = 0$; $M_0 = -2PR$;

$$\frac{dM}{d\varphi} = -PR(\sin \varphi + 2 \cos \varphi) = 0.$$

Rezultă: $\operatorname{tg} \varphi = -2$; $\varphi = 116^\circ 30'$.

$M_{\max} = -PR(1 - \cos 116^\circ 30' + 2 \sin 116^\circ 30') = -3,23 PR$.

Diagramele N , T , M pentru al doilea arc sînt desenate în figura 3.54, c.

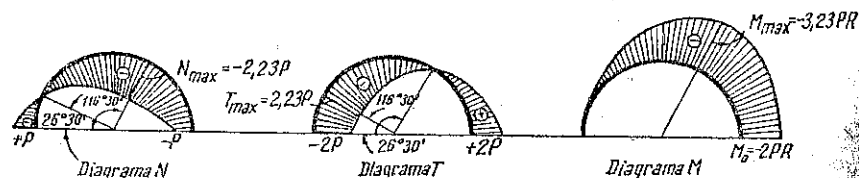


Fig. 3.54, c

3.55. Să se determine reacțiunile din reazemul simplu (1) și articulația (2) și să se construiască diagramele N , T , M pentru arcul din figura 3.55, a.

Rezolvare. Din ecuațiile de echilibru rezultă:

$$H_2 = 0; V_1 = \frac{M_0}{2R}; V_2 = \frac{M_0}{2R}$$

Expresiile eforturilor într-o secțiune A sînt:

$$N = -V_1 \cos \varphi = -\frac{M_0 \cos \varphi}{2R},$$

iar

$$N_1 = -V_1 = -\frac{M_0}{2R},$$

și

$$N_3 = 0; N_2 = \frac{M_0}{2R}.$$

$$T = V_1 \sin \varphi = \frac{M_0 \sin \varphi}{2R};$$

$$T_1 = 0; T_3 = \frac{M_0}{2R}; T_2 = 0.$$

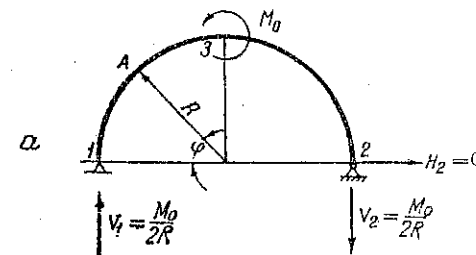


Fig. 3.55, a

Pe porțiunea 1-3: $M = V_1(R - R \cos \varphi) = \frac{M_0}{2R} R(1 - \cos \varphi) = \frac{M_0(1 - \cos \varphi)}{2}$

Pe porțiunea 3-2: $M = V_1(R - R \cos \varphi) - M_0 = -\frac{M_0(1 + \cos \varphi)}{2}$

Aceste expresii verifică ecuațiile diferențiale (3.3):

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dN}{d\varphi} = \frac{1}{R} \frac{M_0 \sin \varphi}{2R} = \frac{T}{R}; \quad \frac{dT}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dT}{d\varphi} = \frac{1}{R} \frac{M_0 \cos \varphi}{2R} = - \frac{N}{R},$$

$$\frac{dM}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} = \frac{1}{R} \frac{M_0 \sin \varphi}{2} = T \quad (\text{Pe porțiunea 1-3})$$

$$\frac{dM}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} = \frac{1}{R} \frac{M_0 \sin \varphi}{2} = T \quad (\text{Pe porțiunea 3-2})$$

Rezultă: $M_1 = 0$; $M_3 = \frac{M_0}{2}$; $M_2 = -\frac{M_0}{2}$; $M_2 = 0$.

Diagramele N , T , M pentru arcul din figura 3.55, a sînt desenate în figura 3.55, b.

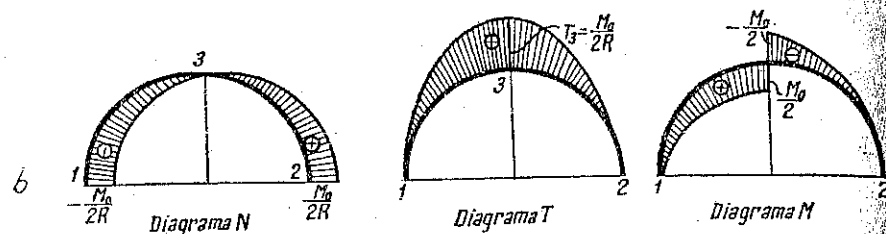


Fig. 3.55, b

3.56. Să se traseze diagramele N , T , M pentru bara curbă din figura 3.56, a.

Rezolvare. Din ecuațiile de echilibru rezultă:

$$V_1 = V_2 = 2P; \quad H_2 = P.$$

Expresiile eforturilor pe porțiunile 1-3 și 3-2 sînt:

$$\begin{aligned} N_{13} &= -2P \cos \alpha, & N_{32} &= 2P \sin \beta + P \cos \beta, \\ T_{13} &= 2P \sin \alpha, & T_{32} &= 2P \cos \beta - P \sin \beta, \\ M_{13} &= 2PR(1 - \cos \alpha), & M_{32} &= PR(1 + 2 \sin \beta + \cos \beta). \end{aligned}$$

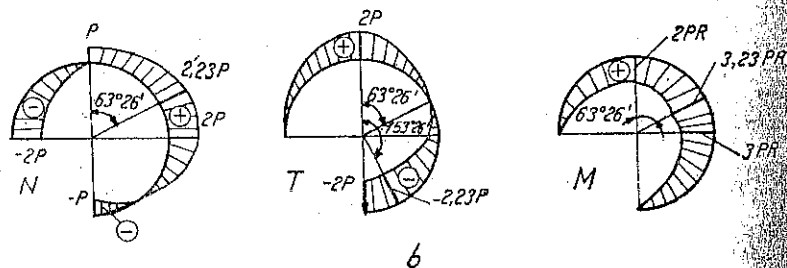
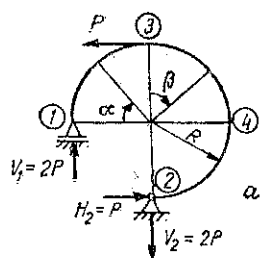


Fig. 3.56

Aceste expresii verifică ecuațiile diferențiale (3.3)

$$\frac{dN_{13}}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dN_{13}}{d\alpha} = \frac{2P \sin \alpha}{R} = \frac{T_{13}}{R};$$

$$\frac{dN_{32}}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dN_{32}}{d\beta} = \frac{1}{R} (2P \cos \beta - P \sin \beta) = \frac{T_{32}}{R}$$

$$\frac{dT_{13}}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dT_{13}}{d\alpha} = \frac{2P \cos \alpha}{R} = -\frac{N_{13}}{R};$$

$$\frac{dT_{32}}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dT_{32}}{d\beta} = \frac{1}{R} (-2P \sin \beta - P \cos \beta) = -\frac{N_{32}}{R}$$

$$\frac{dM_{13}}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dM_{13}}{d\alpha} = \frac{2PR \sin \alpha}{R} = T_{13};$$

$$\frac{dM_{32}}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dM_{32}}{d\beta} = \frac{PR}{R} (2 \cos \beta - \sin \beta) = T_{32}.$$

Valorile maxime ale acestor eforturi sînt:

— pentru N , pe porțiunea 3-4: $\frac{dN}{d\beta} = P(2 \cos \beta - \sin \beta) = 0$,
rezultă: $\tan \beta = 2$; $\beta = 63^\circ 26'$,

$$N_{max} = P(2 \sin 63^\circ 26' + \cos 63^\circ 26') = 2,23 P;$$

— pentru T , pe porțiunea 4-2: $\frac{dT}{d\beta} = P(-2 \sin \beta - \cos \beta) = 0$,
rezultă: $\tan \beta = -\frac{1}{2}$; $\beta = 153^\circ 26'$,

$$T_{max} = P(2 \cos 153^\circ 26' - \sin 153^\circ 26') = -2,23 P;$$

— pentru M , pe porțiunea 3-4: $\frac{dM}{d\beta} = PR(2 \cos \beta - \sin \beta) = 0$,
rezultă: $\tan \beta = 2$; $\beta = 63^\circ 26'$,

$$M_{max} = PR(1 + 2 \sin 63^\circ 26' + \cos 63^\circ 26') = 3,23 PR.$$

Diagramele N , T , M sînt reprezentate în figura 3.56, b.

3.57. Să se traseze diagramele N , T , M pentru bara curbă din figura 3.57, a .

Rezolvare. Din ecuațiile de echilibru rezultă :

$$V_0 = 0; H_0 = 3P; M_0 = PR.$$

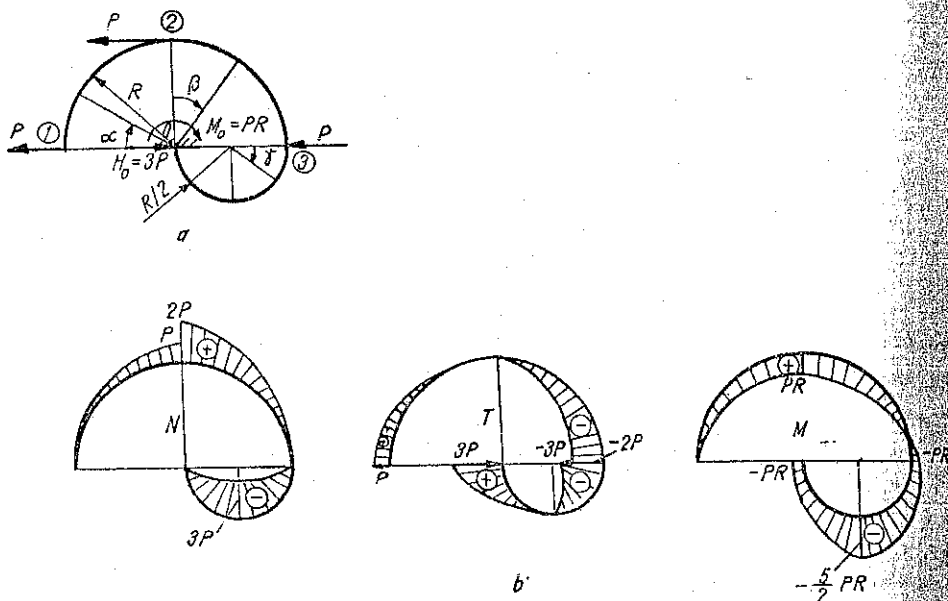


Fig. 3.57

Expresiile eforturilor pe porțiunile 1-2, 2-3, 3-0 sînt :

$$N_{12} = P \sin \alpha, \quad N_{23} = 2P \cos \beta, \quad N_{30} = -3P \sin \gamma,$$

$$T_{12} = P \cos \alpha, \quad T_{23} = -2P \sin \beta, \quad T_{30} = -3P \cos \gamma,$$

$$M_{12} = PR \sin \alpha, \quad M_{23} = PR (2 \cos \beta - 1), \quad M_{30} = -PR \left(\frac{3}{2} \sin \gamma + 1 \right)$$

Diagramele N , T , M sînt date în figura 3.57, b .

3.58. Să se traseze diagramele N , T , M pentru bara curbă din figura 3.58, a .

Rezolvare. Din ecuațiile de echilibru rezultă :

$$H_0 = P; V_0 = P; M_0 = 2PR.$$

Expresiile eforturilor pe porțiunile 0-1, 1-2, 2-3 sînt :

$$N_{01} = P \sin \alpha + P \cos \alpha, \quad N_{12} = P \cos \beta, \quad N_{23} = P \cos \gamma,$$

$$T_{01} = P \cos \alpha - P \sin \alpha, \quad T_{12} = -P \sin \beta, \quad T_{23} = -P \sin \gamma,$$

$$M_{01} = PR (1 + \sin \alpha + \cos \alpha), \quad M_{12} = PR (1 + \cos \beta), \quad M_{23} = -PR (1 - \cos \gamma).$$

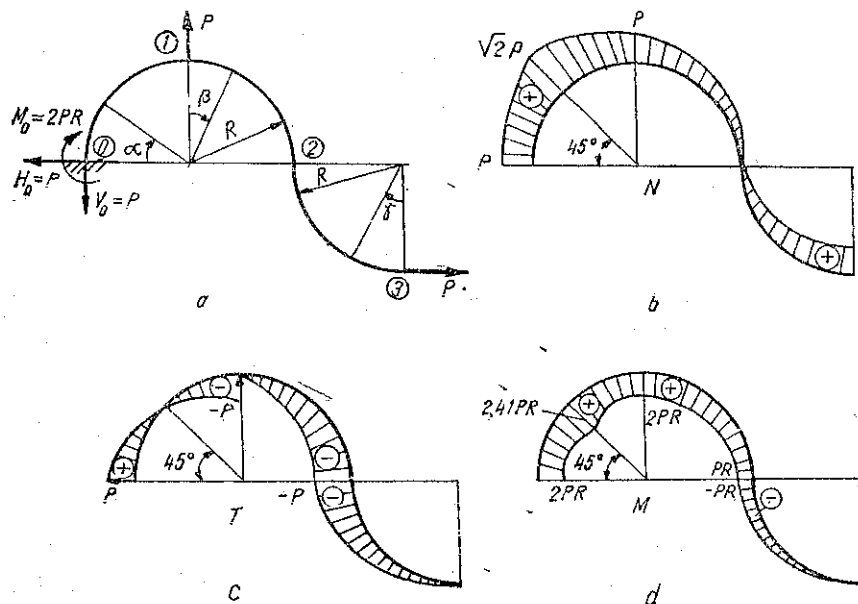


Fig. 3.58

Valorile maxime ale acestor eforturi sînt :

— pentru N , pe porțiunea 0-1 : $\frac{dN}{d\alpha} = P (\cos \alpha - \sin \alpha) = 0$,

rezultă : $\tan \alpha = 1$; $\alpha = 45^\circ$; $N_{max} = P(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ) = P\sqrt{2}$,

— pentru M , pe porțiunea 0-1 : $\frac{dM}{d\alpha} = PR (\cos \alpha - \sin \alpha) = 0$,

rezultă : $\tan \alpha = 1$; $\alpha = 45^\circ$; $M_{max} = PR(1 + \sin 45^\circ + \cos 45^\circ) = (1 + \sqrt{2})PR$.

Diagramele N , T , M sînt date în figurile 3.58, b , c și d .

3.59. Să se traseze diagramele N , T , M pentru bara curbă din figura 3.59, a .

Rezolvare. Din ecuațiile de echilibru rezultă:

$$V_0 = 3P; \quad M_0 = 2PR.$$

Expresiile eforturilor pe porțiunile 0-1, 1-2, 4-3-2 sînt:

$$\begin{aligned} N_{01} &= -3P \cos \alpha, & N_{12} &= 2P \sin \beta, & N_{42} &= -P \cos \gamma, \\ T_{01} &= 3P \sin \alpha, & T_{12} &= 2P \cos \beta, & T_{42} &= -P \sin \gamma, \\ M_{01} &= PR(1-3 \cos \alpha), & M_{12} &= PR(1+2 \sin \beta), & M_{42} &= PR(1-\cos \gamma), \\ & & & & M_{32} &= M_{42} + PR. \end{aligned}$$

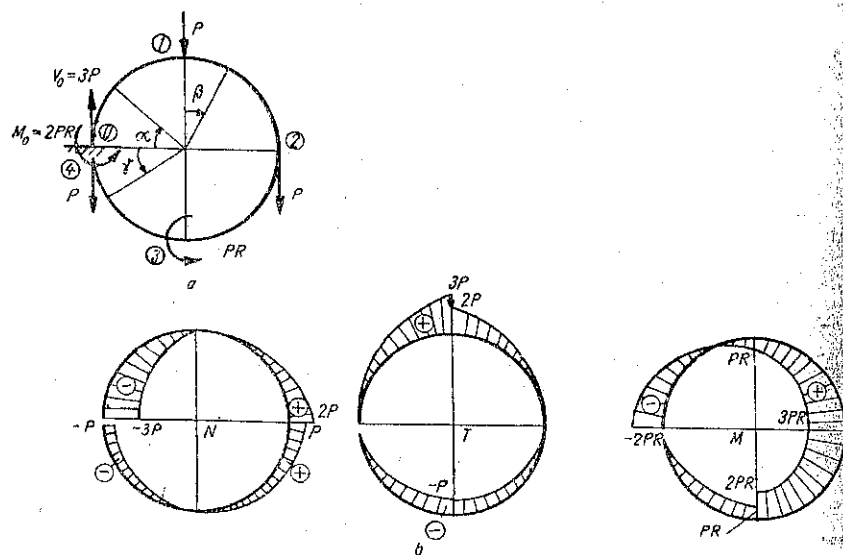


Fig. 3.59

Diagramele N , T , M sînt date în figura 3.59, b.

3.60. Să se traseze diagramele N , T , M pentru bara curbă din figura 3.60, a.

Rezolvare. Expresiile eforturilor în secțiunea φ , provocate de forța elementară $dP = qds = qRd\alpha$, sînt:

$$dN = -dP \sin(\varphi - \alpha) = -qR \sin(\varphi - \alpha) d\alpha,$$

$$dT = -dP \cos(\varphi - \alpha) = -qR \cos(\varphi - \alpha) d\alpha,$$

$$\begin{aligned} dM &= -dP \cos \alpha (R \sin \varphi - R \sin \alpha) - \\ &\quad - dP \sin \alpha [R - R \cos \varphi - (R - R \cos \alpha)] = \\ &= qR^2 (\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) d\alpha, \end{aligned}$$

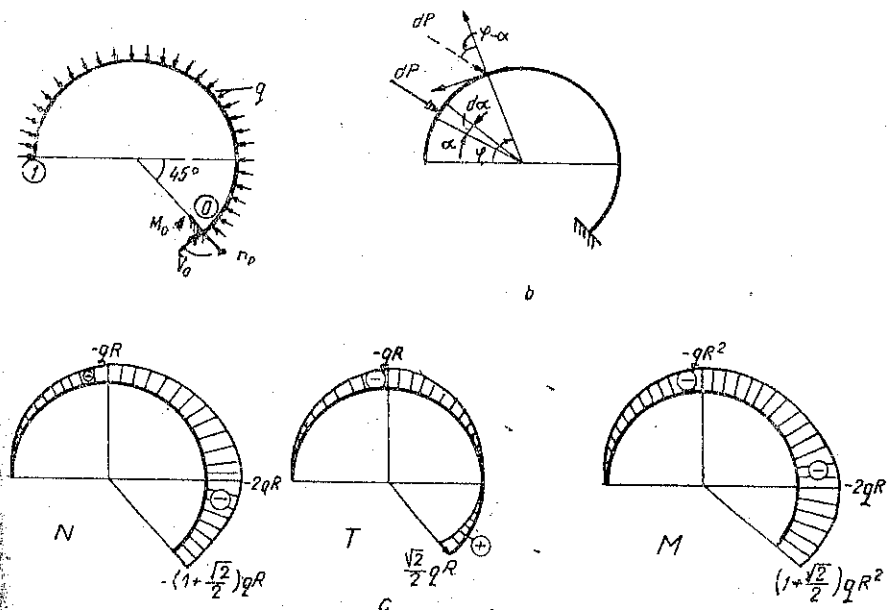


Fig. 3.60

$$N = -qR \int_0^\varphi \sin(\varphi - \alpha) d\alpha = -qR(1 - \cos \varphi)$$

$$T = -qR \int_0^\varphi \cos(\varphi - \alpha) d\alpha = -qR \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned} M &= qR^2 \int_0^\varphi (\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) d\alpha = \\ &= qR^2 \left[-\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \right]_0^\varphi = \\ &= -qR^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \cos \varphi) = -qR^2 (1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Din condițiile de echilibru rezultă:

$$V_0 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) qR; H_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} qR; M_0 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) qR^2.$$

Diagramele N , T , M sînt reprezentate în figura 3.60, *a*.

3.61. Să se traseze diagramele N , T , M pentru sistemul de bare din figura 3.61, *a*.

Rezolvare. Din ecuațiile de echilibru rezultă:

$$H_0 = 3pR; V_0 = pR; M_0 = \frac{5}{2} pR^2.$$

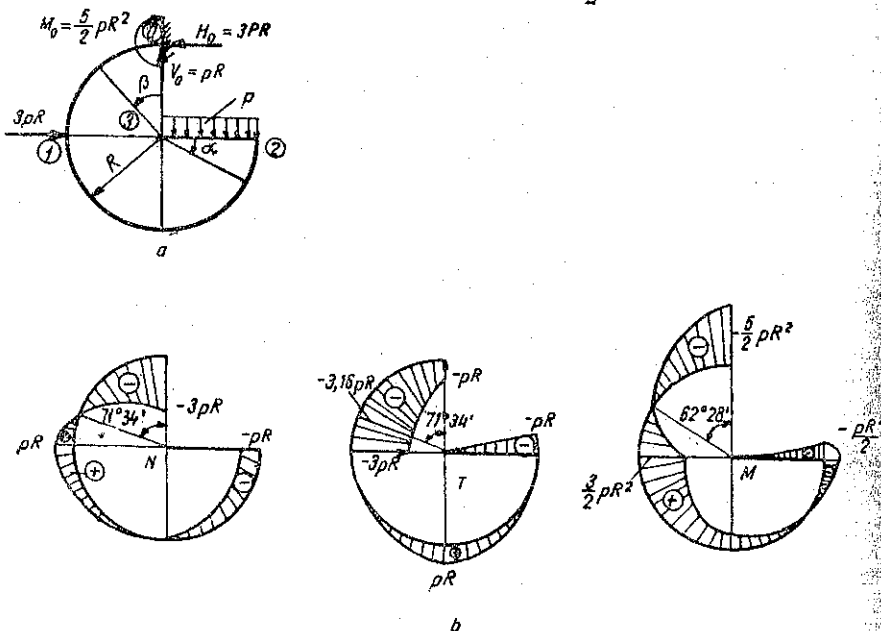


Fig. 3.61

Expresiile eforturilor pe porțiunile 2-1 și 0-1 sînt:

$$N_{21} = -pR \cos \alpha, \quad N_{01} = pR \sin \beta - 3pR \cos \beta, \\ T_{21} = pR \sin \alpha, \quad T_{01} = -pR \cos \beta - 3pR \sin \beta, \\ M_{21} = -p \frac{R^2}{2} + pR(R - R \cos \alpha),$$

$$M_{01} = -\frac{5}{2} pR^2 + 3pR^2(1 - \cos \beta) + pR^2 \sin \beta.$$

Valoarea maximă a forței tăietoare este în secțiunea $\beta = 71^\circ 34'$, pentru care $\frac{dT_{01}}{d\beta} = -pR(-\sin \beta + 3 \cos \beta) = 0$, $T_{max} = -pR(\cos 71^\circ 34' + 3 \sin 71^\circ 34') = -3,16 pR$.

Diagramele N , T , M sînt reprezentate în figura 3.61, *b*.

3.62. Să se traseze diagramele N , T , M pentru sistemul de bare din figura 3.62, *a*.

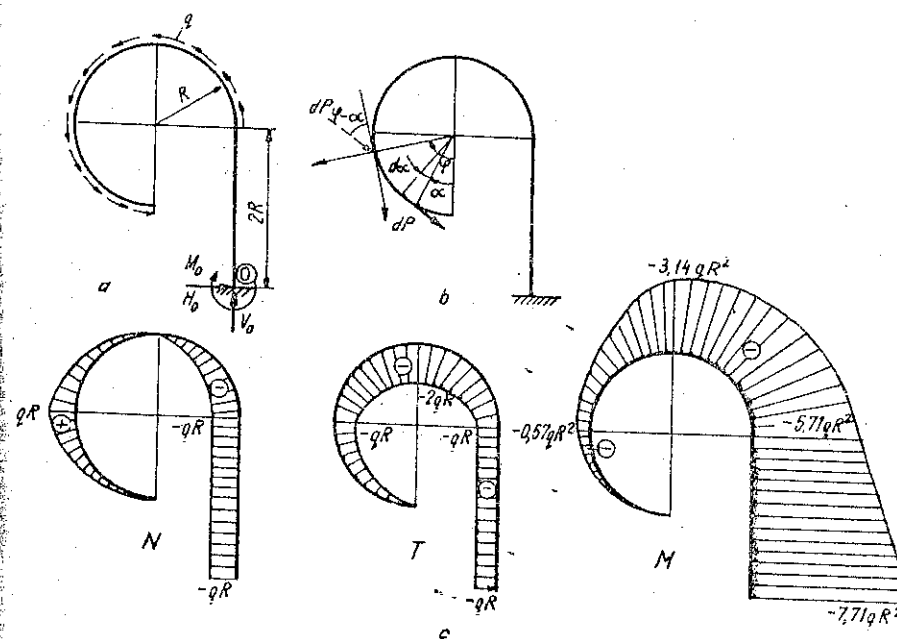


Fig. 3.62

Rezolvare. Forța elementară în secțiunea α este:

$$dP = q ds = qR d\alpha.$$

Eforturile elementare în secțiunea φ , produse de forța dP sînt:

$$dN = dP \cos(\varphi - \alpha) = qR \cos(\varphi - \alpha) d\alpha,$$

$$dT = -dP \sin(\varphi - \alpha) = -qR \sin(\varphi - \alpha) d\alpha,$$

$$dM = -dP[R - R \cos(\varphi - \alpha)] = -qR^2[1 - \cos(\varphi - \alpha)] d\alpha.$$

Expresiile eforturilor în secțiunea φ , $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, sînt:

$$N = qR \int_0^\varphi \cos(\varphi - \alpha) d\alpha = qR \sin \varphi,$$

$$T = -qR \int_0^\varphi \sin(\varphi - \alpha) d\alpha = -qR (1 - \cos \varphi),$$

$$M = -qR^2 \int_0^\varphi [1 - \cos(\varphi - \alpha)] d\alpha =$$

$$= -qR^2 \left[\int_0^\varphi d\alpha - \int_0^\varphi \cos(\varphi - \alpha) d\alpha \right] = qR^2 [\sin \varphi - \varphi].$$

Din ecuațiile de echilibru rezultă:

$$H_0 = qR; \quad V_0 = qR; \quad M_0 = 7,71 qR^2.$$

Diagramele N , T , M sînt reprezentate în figura 3.62, c.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

3.63...3.75. Să se construiască diagramele N , T , M pentru grinzile din figurile 3.63...3.75.

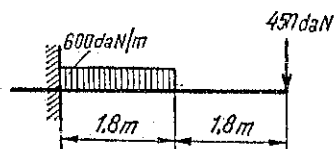


Fig. 3.63

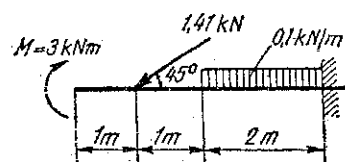


Fig. 3.64

3.76...3.79. Să se construiască diagramele N , T , M pentru barele curbe din figurile 3.76...3.79.

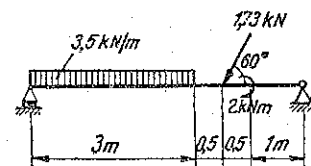


Fig. 3.65

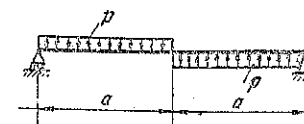


Fig. 3.66

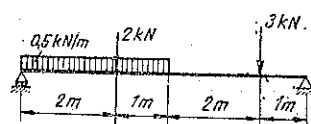


Fig. 3.67

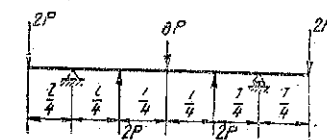


Fig. 3.68

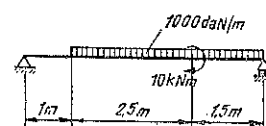


Fig. 3.69



Fig. 3.70

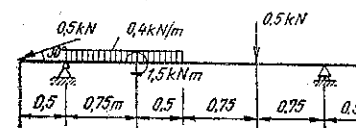


Fig. 3.71

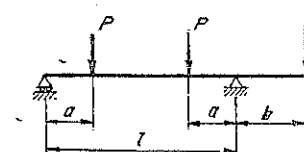


Fig. 3.72

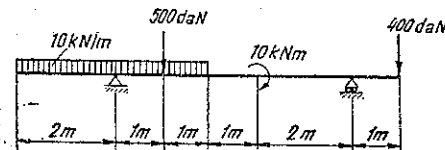


Fig. 3.73

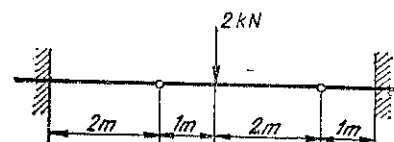


Fig. 3.74

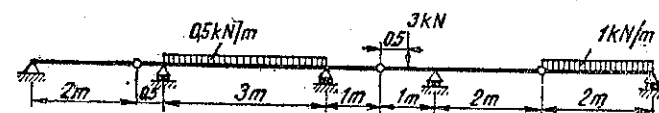


Fig. 3.75

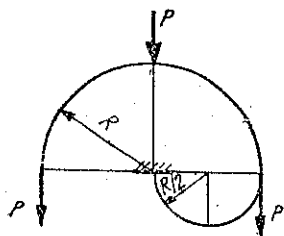


Fig. 3.76

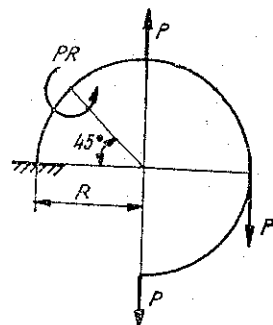


Fig. 3.77

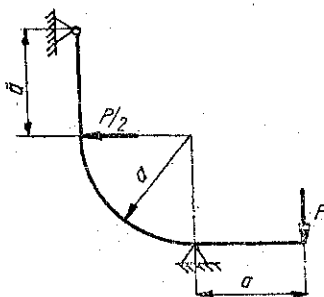


Fig. 3.78

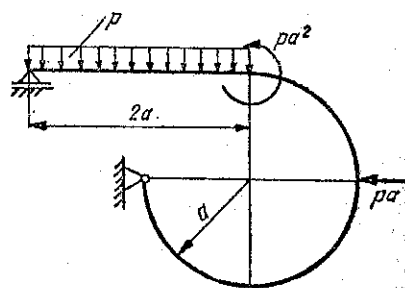


Fig. 3.79

4

EFORTURI UNITARE
IN BARE DREPTe SOLICITATE
LA INCOVOIERE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Formulele de dimensionare și de verificare pentru o bară solicitată la încovoiere sînt :

$$W_{nec} = \frac{M_t}{\sigma_a}, \quad (4.1)$$

$$\sigma_{ef} = \frac{M_t}{W_{ef}}, \quad (4.2)$$

$$M_{cap} = W_{ef} \cdot \sigma_a. \quad (4.3)$$

2. Modulul de rezistență la încovoiere W al unei secțiuni, măsurat în cm^3 , este o mărime geometrică avînd expresia :

Pentru dreptunghi : $W_z = \frac{bh^2}{6}. \quad (4.4)$

La secțiuni de lemn se poate lua $h \approx 1,5 b$.

Pentru cerc : $W_z = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (4.5)$

Pentru secțiunea inelară : $W_z = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32 D}. \quad (4.6)$

3. În cazul general, modulul de rezistență la încovoiere este definit prin relația :

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}, \quad (4.7)$$

în care I_z este momentul de inerție al secțiunii față de axa neutră, iar y_{max} distanța de la axa neutră la fibra extremă a secțiunii.

4. Raza de curbura ρ a fibrei medii deformată a barei solicitată într-o secțiune oarecare prin momentul încovoiator M , se calculează cu relația

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (4.8)$$

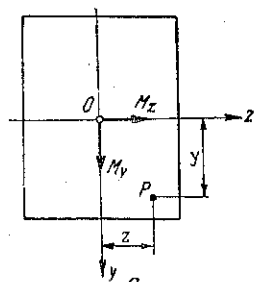


Fig. 4. a

5. În cazul secțiunii la care axa neutră nu este axă de simetrie, eforturile unitare în fibrele extreme sînt date de relațiile:

$$\sigma_1 = \frac{M_x e_1}{I_x}; \quad \sigma_2 = \frac{M_x e_2}{I_x}, \quad (4.9)$$

în care e_1 și e_2 sînt distanțele fibrelor întinse și comprimate la axa neutră.

6. În cazul încovoierii oblice (cînd direcția vectorului momentului încovoietor nu coincide cu o axă principală de inerție a secțiunii), efortul unitar într-un punct oarecare P al secțiunii (Fig. 4. a) este:

$$\sigma = \pm \frac{M_x y}{I_x} \pm \frac{M_y z}{I_y}, \quad (4.10)$$

iar în colțurile unei secțiuni dreptunghiulare se obțin valorile maxime sau minime:

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}. \quad (4.11)$$

7. Eforturile unitare de forfecare, produse de către forța tăietoare T în secțiunea unei grinzi solicitate la încovoiere, variază pe secțiune după legea lui Juravski:

$$\tau_{xy} = \frac{TS}{bI_x}, \quad (4.12)$$

în care S este momentul static al părții din secțiune care caută să lunece, calculat față de axa neutră, b — lățimea secțiunii în punctul unde se măsoară τ_{xy} , iar I_x , momentul de inerție al secțiunii față de axa neutră.

Forța de lunecare longitudinală pe o lungime oarecare din grindă este:

$$N_l = \int \frac{ST}{I_x} dx.$$

Dacă S , T și I_x sînt constante pe un interval de lungime e , rezultă:

$$N_l = \frac{eTS}{I_x}. \quad (4.13)$$

Relația servește la calculul niturilor, sudurilor și penelor de la grinzi compuse.

B. PROBLEME REZOLVATE

4.1. Să se verifice grinda simplu rezemată la capete din figura 4.1, știind că este executată din țevă de oțel. Se dau: $D = 8$ cm; $d = 5,5$ cm și $\sigma_s = 1300$ daN/cm².

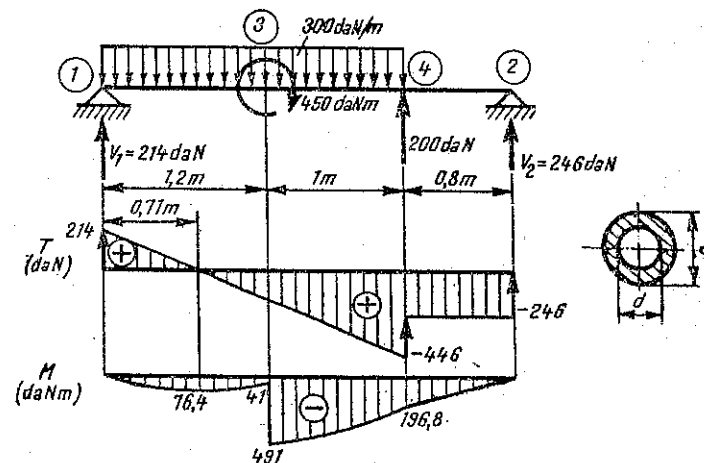


Fig. 4.1

Rezolvare. Se trasează diagramele T , M , așa cum s-a arătat la capitolul 3, și se calculează valoarea momentului încovoietor maxim.

$$M_{max} = M_3 = 491 \text{ daNm} = 4,91 \cdot 10^4 \text{ daNm}.$$

Din relațiile (4.6) și (4.2) rezultă:

$$W_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi(8^4 - 5,5^4)}{32 \cdot 8} = 39 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_{ef max} = \frac{4,91 \cdot 10^4}{39} = 1260 \text{ daN/cm}^2.$$

4.2. Pentru grinda de oțel din figura 4.2 se cere: a) să se calculeze efortul unitar maxim care apare în grindă; b) valoarea acestuia dacă se ține seama și de greutatea proprie a grinzii ($\gamma = 7,85$ daN/dm³).

Rezolvare. Se calculează momentul de inerție cum s-a arătat în capitolul 2 și apoi modulul de rezistență cu relația (4.7).

$$I_z = \frac{20 \cdot 30^3}{12} - \frac{16 \cdot 26^3}{12} = 2,15 \cdot 10^4 \text{ cm}^4,$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{2,15 \cdot 10^4}{15} = 1,43 \cdot 10^3 \text{ cm}^3.$$

Greutatea proprie pe unitatea de lungime a grinzii :

$$q = A \cdot \gamma = 184 \cdot 7,85 \cdot 10^{-3} = 1,44 \text{ daN/cm} = 144 \text{ daN/m},$$

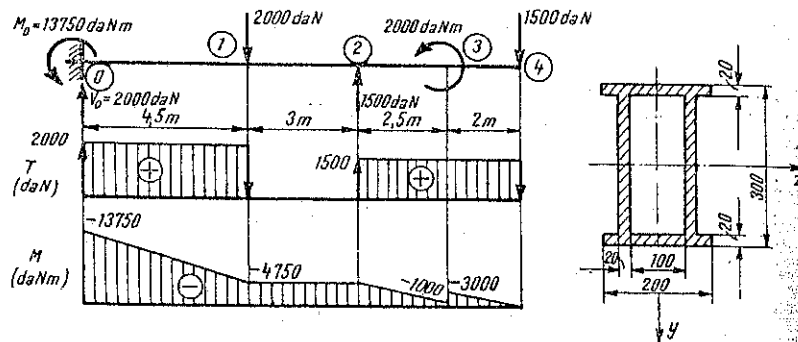


Fig. 4.2

în care :

$$A = 30 \cdot 20 - 26 \cdot 16 = 184 \text{ cm}^2.$$

a) Când nu se ține seama de greutatea proprie :

$$|M'_{\max}| = |M'_0| = 13750 \text{ daNm} = 1,375 \cdot 10^5 \text{ daNm},$$

$$\sigma'_{\max ef} = \frac{1,375 \cdot 10^5}{1,43 \cdot 10^3} = 962 \text{ daN/cm}^2.$$

b) Când se ține seama de greutatea proprie :

$$|M''_{\max}| = |M''_0| = 13750 + 144 \cdot 12 \cdot 6 = 24120 \text{ daNm} = 2,412 \cdot 10^5 \text{ daNm}$$

$$\sigma''_{\max ef} = \frac{2,412 \cdot 10^5}{1,43 \cdot 10^3} = 1690 \text{ daN/cm}^2.$$

Greutatea proprie produce o creștere a efortului unitar maxim cu 76%.

4.3. Să se dimensioneze grinda de oțel din figura 4.3, a dacă secțiunea transversală poate fi : 1) circulară ; 2) dreptunghiulară, luind $b = \frac{2}{3} h$; 3) pătrată ; 4) inelară cu $d = 0,8 D$; 5) profil I laminat ; 6) două profile I, ca în figura 4.3, b. Se dă rezistența admisibilă a materialului $\sigma_a = 1000 \text{ daN/cm}^2$. Să se precizeze care este soluția cea mai economică dacă se ia drept criteriu de comparație cantitățile de material necesare.

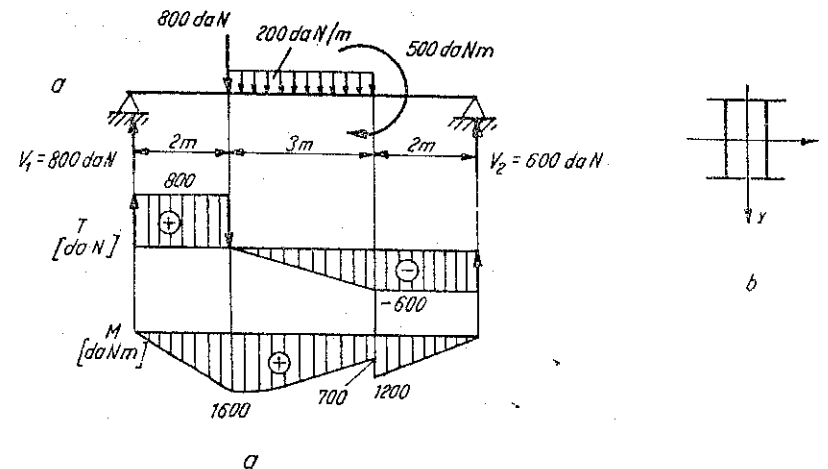


Fig. 4.3

Rezolvare. Se aplică relația (4.1). Momentul încovoietor maxim este $M_t = 160000 \text{ daNm}$,

$$W_{nec} = \frac{M_t}{\sigma_a} = \frac{160000}{1000} = 160 \text{ cm}^3.$$

1) Pentru secțiunea circulară, modulul de rezistență este dat de relația (4.5) :

$$W_{nec} = \frac{\pi d^3}{32} = 160 \text{ cm}^3 ; d = 11,77 \text{ cm}. \text{ Se alege } d = 11,8 \text{ cm}.$$

2) La secțiunea dreptunghiulară se folosește relația (4.4) :

$$W_{nec} = \frac{bh^2}{6} = \frac{\frac{2}{3} h \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{9} = 160 \text{ cm}^3,$$

$$h = 11,3 \text{ cm} ; b = \frac{2}{3} h = 7,5 \text{ cm}.$$

3) Pentru pătrat :

$$W_{nec} = \frac{a^3}{6} = 160 \text{ cm}^3; a = 9,87 \text{ cm. Se alege } a = 9,9 \text{ cm.}$$

4) Pentru secțiunea inelară se folosește relația (4.6) :

$$W_{nec} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi}{32D} [D^4 - (0,8 D)^4] = \frac{0,59 \pi D^3}{32} = 160 \text{ cm}^3,$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 160}{0,59 \pi}} = 14 \text{ cm}; d = 11,2 \text{ cm.}$$

5) Din anexa 9, profilul standardizat, al cărui modul de rezistență este apropiat de $W_{nec} = 160 \text{ cm}^3$, este profilul I 18, cărui îi corespunde $W_z = 161 \text{ cm}^3$.

6) Pentru secțiunea din figura 4.3, b, modulul de rezistență necesar unui profil este :

$$W_{nec} = \frac{160}{2} = 80 \text{ cm}^3.$$

În anexa 9, profilul standardizat care are W_z aproape de valoarea 80 cm^3 este profilul I 14, cărui îi corespunde $W_z = 81,9 \text{ cm}^3$. Alegând acest profil, efortul unitar efectiv este :

$$\sigma_{ef} = \frac{M_t}{W_{ef}} = \frac{160 \ 000}{2 \cdot 81,9} = 977 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Greutățile grinzii în cele șase variante se vor afla în raportul ariilor secțiunilor. Pentru profilul I 18 aria secțiunii este $27,9 \text{ cm}^2$, iar pentru profilul I 14, $A = 18,3 \text{ cm}^2$. Raportul ariilor secțiunilor este :

$$109,3 : 84,7 : 98 : 55,4 : 27,9 : 36,6,$$

sau în procente față de secțiunea circulară, considerată 100 % :

$$100 : 77,5 : 89,6 : 50,7 : 25,5 : 33,5\%.$$

Soluția cea mai economică este profilul I 18.

4.4. Pentru grinda din figura 4.4, a executată din oțel cu $\sigma_a = 1 \ 200 \text{ daN/cm}^2$, se cere :

1) Să se dimensioneze grinda, dacă secțiunea transversală este :

- cheson, ca în figura 4.4, b;
- profil I, de forma din figura 4.4, c;
- de forma din figura 4.4, d.

2) Să se compare cantitățile de material necesare în cele trei variante constructive. Se dă masa specifică a materialului $\rho = 7,85 \text{ kg/dm}^3$.

3) Să se traseze diagramele de variație a eforturilor unitare normale și tangențiale pentru secțiunile din figurile 4.4, b și d, în zona cea mai solicitată a grinzii.

4) Să se verifice sudura grinzii din figura 4.4, d. Se dă $\tau_{as} = 1 \ 000 \text{ daN/cm}^2$.

Réolvare. 1). $|M_{max}| = |M_z| = 30 \text{ kNm} = 3 \cdot 10^5 \text{ daNm}$,

$$W_{nec} = \frac{|M_z|}{\sigma_a} = \frac{3 \cdot 10^5}{1200} = 250 \text{ cm}^3,$$

$$a) \quad W_{nec} = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{\frac{(10t)^4}{12} - \frac{(8t)^4}{12}}{5t} = 98,4t^3 = 250 \text{ cm}^3,$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{250}{98,4}} = 1,365 \text{ cm. Se alege } t = 1,4 \text{ cm.}$$

$$b) \quad W_{nec} = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{\frac{8c(12c)^3}{12} - 2 \frac{3,5c(10c)^3}{12}}{6c} = 94,77 c^3,$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{250}{94,77}} = 1,382 \text{ cm. Se alege } c = 1,4 \text{ cm.}$$

c) Grinda cu secțiunea din figura 4.4, d a fost obținută dintr-un profil cu înălțimea $9u$, tăiat ca în figura 4.4, e, cele două părți fiind deplasate în lungul axei grinzii cu $3 \sqrt{3} u$ (jumătate de pas) și asamblate prin sudură longitudinală.

$$W_{nec} = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{\frac{8u(12u)^3}{12} - 2 \frac{3,5u(10u)^3}{12} - u \frac{(6u)^3}{12}}{6u} = 91,77 u^3,$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{250}{91,77}} = 1,396 \text{ cm. Se alege } u = 1,4 \text{ cm.}$$

2) Masa materialului necesar în cele trei variante este :

- $m = \rho l (100 t^2 - 64 t^2) = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \cdot 36 \cdot 1,4^2 = 166 \text{ kg},$
- $m = \rho l (2 \cdot 8 c^2 + 10 c^2) = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \cdot 26 \cdot 1,4^2 = 120 \text{ kg}.$

c) La grinda din figura 4.4, *d* sînt executate 21 găuri de formă hexagonală, pe toată lungimea grinzii. Suprafața unei găuri este $31,177 \text{ u}^2$. Masa grinzii este:

$$m = \rho l (2 \cdot 8 \text{ u}^2 + 10 \text{ u}^2) - 21 \cdot \rho \cdot 31,177 \text{ u}^3 = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \cdot 26 \cdot 1,4^2 - 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 21 \cdot 31,177 \cdot 1,4^3 = 106 \text{ kg}.$$

Deci grinda cu secțiunea din figura 4.4, *d* este cea mai economică.

3) Din condiția pusă pentru dimensionare, efortul unitar normal σ este maxim în fibrele extreme și variază linear pe secțiune. Diagramele de variație a efortului unitar σ sînt date în figurile 4.4, *f* și *h*.

Diagrama de variație a efortului unitar tangențial se trasează pentru secțiunea 2 a grinzii, unde $T = 30 \text{ kN}$.

a) Efortul unitar tangențial maxim se calculează cu relația:

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot S}{(2t) I_z},$$

unde S este momentul static față de axa neutră al jumătății de secțiune, iar $2t$ este lățimea efectivă a grinzii în axa neutră (Fig. 4.4, *b*),

$$S = 10t \cdot 5t \cdot 2,5t - 8t \cdot 4t \cdot 2t = 61t^3 = 61 \cdot 1,4^3 = 167,4 \text{ cm}^3,$$

$$I_z = W_z \cdot y_{max} = 98,4 t^3 \cdot 5t = 492 t^4 \cdot 1,4^4 = 1890 \text{ cm}^4,$$

$$\tau_{max} = \frac{3000 \cdot 167,4}{2 \cdot 1,4 \cdot 1890} = 95 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar tangențial în fibra $B-B$ are o discontinuitate determinată de variația lățimii grinzii de la $10 t = 14 \text{ cm}$, la $2 t = 2,8 \text{ cm}$. Momentul static al suprafeței de sub fibra $B-B$ în raport cu axa neutră este:

$$S' = 10t \cdot t \cdot 4,5t = 45t^3 = 45 \cdot 1,4^3 = 123,5 \text{ cm}^3.$$

Eforturile unitare sînt:

$$\tau'_B = \frac{TS'}{10t \cdot I_z} = \frac{3000 \cdot 123,5}{10 \cdot 1,4 \cdot 1890} = 14 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau''_B = \frac{TS'}{2t \cdot I_z} = \frac{3000 \cdot 123,5}{2 \cdot 1,4 \cdot 1890} = 70 \text{ daN/cm}^2.$$

Diagrama de variație a efortului unitar τ este dată în figura 4.4, *g*.

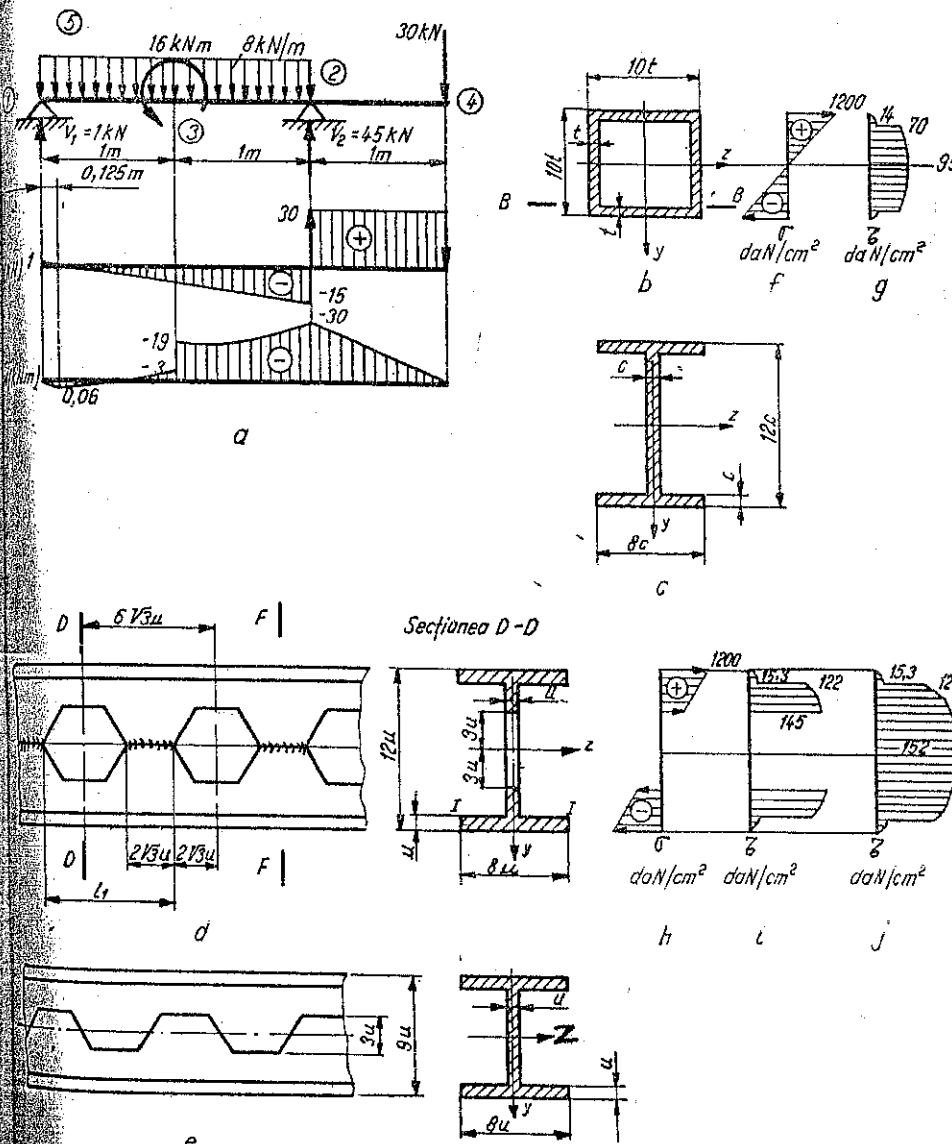


Fig. 4.4

c) Se calculează eforturile unitare tangențiale pentru secțiunile $D-D$ și $F-F$ (Fig. 4.4, d).

În secțiunea $D-D$:

$$I_z = W_z \cdot y_{max} = 91,77 u^3 \cdot 6u = 550,62u^4 = 550,62 \cdot 1,4^4 = 2115 \text{ cm}^4,$$

$$S = 8 u^2 \cdot 5,5u + 2u^2 \cdot 4u = 52u^3 = 52 \cdot 1,4^3 = 142,7 \text{ cm}^3,$$

$$\tau_{max} = \frac{TS}{u \cdot I_z} = \frac{3000 \cdot 142,7}{1,4 \cdot 2115} = 145 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar tangențial în fibra $I-I$ are două valori:

$$\tau'_{I-I} = \frac{TS'}{8u \cdot I_z} = \frac{3000 \cdot 120,7}{8 \cdot 1,4 \cdot 2115} = 15,3 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau''_{I-I} = \frac{TS'}{u \cdot I_z} = \frac{3000 \cdot 120,7}{1,4 \cdot 2115} = 122 \text{ daN/cm}^2,$$

unde: $S' = 8u^2 \cdot 5,5u = 44u^3 = 44 \cdot 1,4^3 = 120,7 \text{ cm}^3$.

În secțiunea $F-F$ efortul unitar tangențial este maxim în axa neutră și are valoarea:

$$\tau_{max} = \frac{TS_1}{u I_z} = \frac{3000 \cdot 155}{1,4 \cdot 2185} = 152 \text{ daN/cm}^2,$$

unde: $S_1 = 8u^2 \cdot 5,5u + 5u^2 \cdot 2,5u = 56,5 \cdot u^3 = 56,5 \cdot 1,4^3 = 155 \text{ cm}^3$,

$$I_z = \frac{8u(12u)^3}{12} - 2 \frac{3,5u(10u)^3}{12} = 568,66 u^4 = 2185 \text{ cm}^4.$$

Diagramele de variație a efortului unitar τ în secțiunile $D-D$ și $F-F$ sînt date în figurile 4.4, i și j.

4) Verificarea sudurii se face pentru porțiunea de grindă 2-4, pe care forța tăietoare este maximă. Forța de alunecare longitudinală pe un interval de lungime $l_1 = 6\sqrt{3}u$ se calculează cu relația (4.13):

$$N_1 = \frac{l_1 TS}{I_z} = \frac{6\sqrt{3}u \cdot T \cdot 56,5u^3}{568,66 u^4} = 1,032 T = 1,032 \cdot 3000 = 3096 \text{ daN}.$$

$$\tau_{efs} = \frac{N_1}{u \cdot 2\sqrt{3}u} = \frac{3096}{2\sqrt{3} \cdot 1,4^2} = 456 \text{ daN/cm}^2 < \tau_{as}.$$

4.5. O grindă simplu rezemată la capete este alcătuită din două profile U 20, așezate ca în figura 4.5, a. Se cere:

1) valoarea sarcinii uniform distribuite pe care o poate suporta grinda;

2) mărimea sarcinii concentrate așezată la mijloc, care poate fi aplicată grinzii;

3) mărimea sarcinii concentrate care poate fi aplicată grinzii la mijlocul deschiderii, prin intermediul profilului I 5, figura 4.5, b.

Se dă: $\sigma_a = 1500 \text{ daN/cm}^2$; $l = 2 \text{ m}$.

Rezolvare. 1) Din anexa 8, pentru profilul U 20, I_{z1} este 1910 cm^4 , iar $A = 32,2 \text{ cm}^2$;

$$I_z = 2 \cdot 1910 = 3820 \text{ cm}^4;$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{3820}{10} = 382 \text{ cm}^3,$$

$$M_{cap} = W_z \cdot \sigma_a = 382 \cdot 1500 = 573000 \text{ daNm},$$

$$M_{max} = \frac{pl^3}{8}; \quad p = \frac{8 \cdot M_{cap}}{l^2} = \frac{8 \cdot 573000}{200^2} = 114,6 \text{ daN/cm}.$$

Sarcina totală este $pl = 22920 \text{ daN}$.

2) Momentul capabil este același, iar momentul maxim al grinzii cu forța concentrată este:

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}; \quad P = \frac{4 \cdot M_{cap}}{l} = \frac{4 \cdot 573000}{200} = 11460 \text{ daN}.$$

3) Conform schemei de încărcare din figura 4.5, c, momentul încovoiator maxim al grinzii sete:

$$M_{max} = \frac{Pl}{8}; \quad P = \frac{8 \cdot M_{cap}}{l} = \frac{8 \cdot 573000}{200} = 22920 \text{ daN}.$$

Se observă că în variantele 1 și 3 grinda preia aceeași sarcină, dublă decât cea din varianta 2.

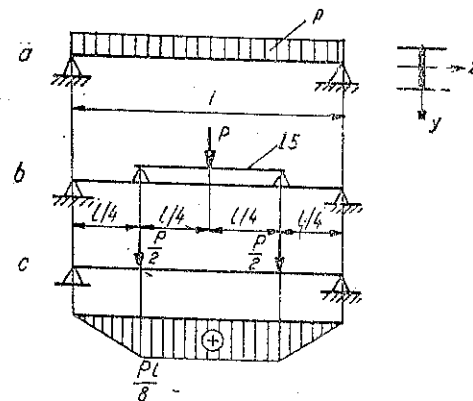


Fig. 4.5

4.6. Să se calculeze momentul încovoietor capabil al unei grinzi de oțel, având secțiunea ca în figura 4.6, dacă este așezată întâi ca în figura 4.6, a și apoi ca în figura 4.6, b.

Se dă $\sigma_a = 1200 \text{ daN/cm}^2$.

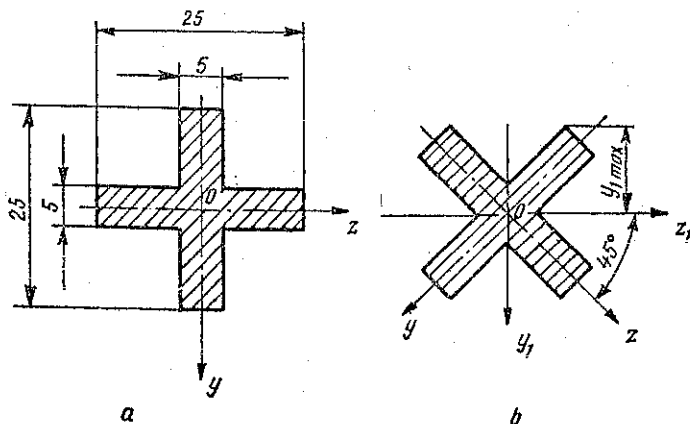


Fig. 4.6

Rezolvare. a) $I_z = \frac{2,5^3 \cdot 0,5}{12} + \frac{2 \cdot 0,5^3 \cdot 1}{12} = 0,67 \text{ cm}^4$;

$$W'_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{0,67}{1,25} = 0,536 \text{ cm}^3,$$

$$M'_{cap} = \sigma_a \cdot W'_z = 1200 \cdot 0,536 = 644 \text{ daN cm}.$$

b) Pentru calculul lui I_z , se va aplica relația (2.13):

$$I_z = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha.$$

În cazul de față: $I_z = I_y$; $\alpha = 45^\circ$ și $I_{zy} = 0$ (din cauza simetriei figurii), rezultă:

$$I_{z1} = I_z; y_{1\max} = 1,25 \sin 45^\circ + 0,25 \cos 45^\circ = 1,06 \text{ cm},$$

$$W''_z = \frac{I_{z1}}{y_{1\max}} = \frac{0,67}{1,06} = 0,632 \text{ cm}^3,$$

$$M''_{cap} = \sigma_a \cdot W''_z = 1200 \cdot 0,632 = 759 \text{ daN cm}.$$

Rezultă o creștere cu 18% a momentului capabil.

4.7. O grindă de lemn, simplu rezemată la capete, este încărcată cu o forță $P = 2000 \text{ daN}$ ca în figura 4.7. Știind că secțiunea grinzii este dreptunghiulară, având înălțimea $h = 24 \text{ cm}$ și lățimea $b = 16 \text{ cm}$, să se determine pozițiile forței P pe grindă, astfel încât să nu se depășească rezistența admisibilă $\sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Momentul este maxim în dreptul forței P și are valoarea:

$$M(x) = \frac{Px(l-x)}{l},$$

$$M_{cap} = \sigma_a \frac{bh^2}{6}. \text{ Trebuie ca } M(x) \leq M_{cap}, \text{ de unde rezultă inegalitatea:}$$

$$\frac{Px(l-x)}{l} \leq \sigma_a \frac{bh^2}{6}$$

sau:

$$x^2 - lx + \frac{bh^2 l \sigma_a}{6P} \geq 0; x^2 - 450x + \frac{16 \cdot 24^2 \cdot 450 \cdot 100}{6 \cdot 2000} \geq 0.$$

Inegalitatea este satisfăcută pentru:

$$0 \leq x \leq 98,5 \text{ cm}; 351,5 \text{ cm} \leq x \leq 450 \text{ cm}.$$

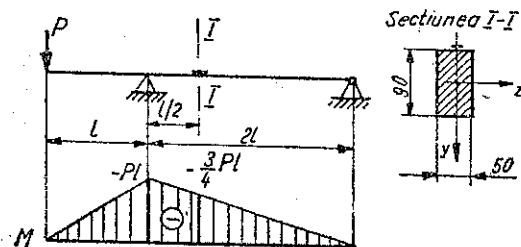


Fig. 4.8

4.8. Pe bara din figura 4.8 este montat un extensometru pe direcție longitudinală în secțiunea I-I. Bara este din oțel, de secțiune dreptunghiulară. Să se afle forța P , aplicată barei, care produce alungirea $\epsilon = 260 \cdot 10^{-6}$ indicată de extensometru.

Se dă: $l = 80 \text{ cm}$; $\sigma_a = 1000 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. În secțiunea I-I, efortul unitar maxim este:

$$\sigma = E\epsilon = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 260 \cdot 10^{-6} = 546 \text{ daN/cm}^2,$$

$$M_{cap} = \sigma \cdot W_z = 546 \cdot \frac{5 \cdot 9^2}{6} = 36855 \text{ daNcm},$$

$$M_{cap} = \frac{3Pl}{4}; P = \frac{4 \cdot 36855}{3 \cdot 80} = 614 \text{ daN}.$$

Se verifică secțiunea grinzii unde momentul încovoiător este maxim,
 $M_{max} = Pl$.

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{Pl}{bh^2} = \frac{6 \cdot 614,2 \cdot 80}{5 \cdot 9^3} = 728 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

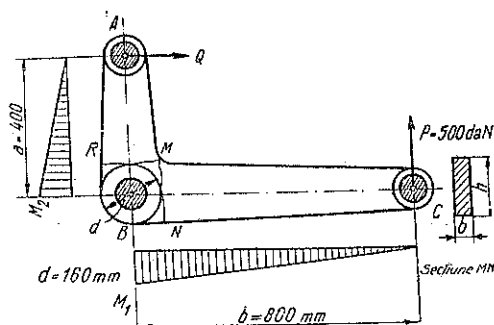


Fig. 4.9

ca în figura 4.9. Se calculează momentele încovoiătoare în secțiunile MN și MR:

$$M_{MN} = P \left(b - \frac{d}{2} \right) = 500(80 - 8) = 36\,000 \text{ daNcm};$$

$$Pb = Qa = M_1 = M_2, \quad Q = P \frac{b}{a} = 500 \frac{800}{400} = 1\,000 \text{ daN};$$

$$M_{MR} = Q \left(a - \frac{d}{2} \right) = 1\,000(40 - 8) = 32\,000 \text{ daNcm}.$$

Formula (4.1) dă pentru cele două pîrghii:

$$W_{necMN} = \frac{M_{MN}}{\sigma_a} = \frac{36\,000}{600} = 60 \text{ cm}^3;$$

$$W_{necMR} = \frac{M_{MR}}{\sigma_a} = \frac{32\,000}{600} = 53,3 \text{ cm}^3.$$

Ambele pîrghii se construiesc astfel încît să aibă aceeași grosime b în secțiunile MN și MR. Se ia în secțiunea MN: $h/b = 3$.

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{\frac{h}{3}h^2}{6} = \frac{h^3}{18}; \quad W_{necMN} = \frac{h_{MN}^3}{18} = 60,$$

$$h_{MN} = \sqrt[3]{18 \cdot 60} = 10,25 \text{ cm}; \quad b = \frac{h_{MN}}{3} = \frac{10,25}{3} = 3,42 \text{ cm}.$$

4.9. Să se dimensioneze pîrghia cîrnată ABC din figura 4.9 pe baza încărcărilor și a dimensiunilor din desen. Forța P fiind variabilă între zero și 500 daN, se alege rezistența admisibilă $\sigma_a = 600 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Considerînd brațele de pîrghie AB și CB ca grînzii libere la un capăt și încastrate în B, se construiesc diagramele de momente

Pentru secțiunea MR, b este același, deci:

$$W_{necMR} = \frac{bh_{MR}^2}{6} = \frac{3,42 h_{MR}^2}{6} = 53,3; \quad h_{MR} = \sqrt{\frac{6 \cdot 53,3}{3,42}} = 9,66 \text{ cm}.$$

Se iau dimensiunile rotunjite:

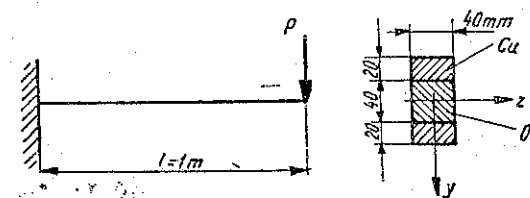
$$b = 34 \text{ mm}; \quad h_{MN} = 103 \text{ mm}; \quad h_{MR} = 97 \text{ mm}.$$

4.10. O grînză executată din două metale, oțel și cupru, este sollicitată de forța P (fig. 4.10). Să se calculeze valoarea sarcinii capabile P , dacă $\sigma_{aOL} = 1\,500 \text{ daN/cm}^2$, $\sigma_{aCu} = 400 \text{ daN/cm}^2$, $E_{OL} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$, $E_{Cu} = 1,15 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Momentul încovoiător produs de forța P este preluat de cele două elemente, astfel:

$$M_{OL} + M_{Cu} = M. \quad (1)$$

Fig. 4.10



Fibra medie este aceeași pentru ambele elemente, deci condiția de deformare este:

$$\frac{1}{\rho_{OL}} = \frac{1}{\rho_{Cu}}; \quad \frac{M_{OL}}{E_{OL}I_{OL}} = \frac{M_{Cu}}{E_{Cu}I_{Cu}};$$

$$I_{OL} = \frac{4^4}{12} = \frac{64}{3} \text{ cm}^4, \quad I_{Cu} = 2 \left(\frac{4 \cdot 2^3}{12} + 4 \cdot 2 \cdot 3^2 \right) = \frac{448}{3} \text{ cm}^4,$$

$$\frac{M_{OL}}{M_{Cu}} = \frac{E_{OL}I_{OL}}{E_{Cu}I_{Cu}} = \frac{2,1 \cdot 10^6}{1,15 \cdot 10^6} \frac{64}{448} = 0,26. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă: $M_{OL} = 0,207 M$; $M_{Cu} = 0,793 M$. Admițînd că se atinge rezistența admisibilă în oțel

$$M_{OL} = W_{OL} \sigma_{aOL} = \frac{4^3}{6} 1500 = 16\,000 \text{ daNcm},$$

deci momentul încovoiător preluat de întreaga secțiune este

$$M = \frac{M_{OL}}{0,207} = \frac{16\,000}{0,207} = 77\,295 \text{ daNcm}.$$

Dacă se atinge rezistența admisibilă în cupru

$$M_{Cu} = W_{Cu} \sigma_{aCu} = \frac{448}{3,4} 400 = 14\,933 \text{ daNcm},$$

la care corespunde

$$M'' = \frac{M_{Cu}}{0,793} = \frac{14\,933}{0,793} = 18\,831 \text{ daNcm.}$$

Se alege valoarea cea mai mică, $M = 18\,831 \text{ daNcm}$ și rezultă sarcina capabilă

$$P_{cap} = \frac{M}{l} = \frac{18\,831}{100} = 18,8 \text{ daN.}$$

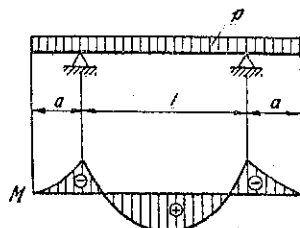


Fig. 4.11

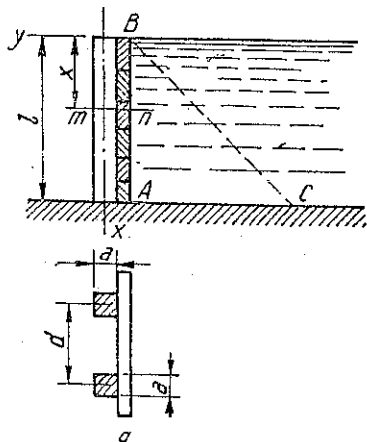


Fig. 4.12

4.11. Dacă lungimea totală $l + 2a$ a grinzii din figura 4.11 este dată, să se determine relația între lungimile a și l , astfel încât efortul unitar care se produce în grindă să fie minim.

Rezolvare. Condiția pusă este satisfăcută când momentul maxim negativ (pe reazem) este egal în valoare absolută cu cel pozitiv (în mijloc):

$$\begin{aligned} p \frac{a^2}{2} &= \frac{p(l+2a)}{2} \cdot \frac{l}{2} \\ -\frac{p\left(a + \frac{l}{2}\right)^2}{2} &= \frac{p}{2} \left(\frac{l^2}{4} - a^2\right) \\ a &= \frac{l}{\sqrt{8}} = 0,354 \, l. \end{aligned}$$

4.12. Un baraj de lemn este alcătuit din scinduri așezate orizontal, care se reazemă pe doi stâlpi de lemn încastrați în pământ, cum se arată în figura 4.12; a . Se cere dimensionarea stâlpilor, știind că distanța dintre ei este $d = 0,9 \text{ m}$, au lungimea $l = 1,80 \text{ m}$ și $\sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Presiunea apei variază liniar cu adâncimea. În punctul A este $p_A = \gamma h = 18 \text{ kN/m}^2$. Distanța dintre stâlpii de susținere fiind $d = 0,9 \text{ m}$, fiecare

stîlp va prelua o sarcină variind triunghiular, ca în figura 4.12, b, cu presiunea maximă

$$p = 18 \cdot 0,9 = 16,2 \text{ kN/m} = 16,2 \text{ daN/cm.}$$

$$|M_{max}| = \frac{P_{max} \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{16,2 \cdot 180}{2} \cdot \frac{180}{3} = 87\,500 \text{ daN cm,}$$

$$W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{87\,500}{100} = 875 \text{ cm}^3 = \frac{a^3}{6},$$

$$a = \sqrt[3]{875 \cdot 6} = 17,4 \text{ cm} = 18 \text{ cm.}$$

4.13. De capătul liber al unei grinzii încastrate AB (Fig. 4.13) este prinsă o bară BC. Grinda are secțiunea inelară, cu $d = 5 \text{ cm}$ și $D = 7 \text{ cm}$ și lungimea $l = 2,4 \text{ m}$; bara BC are secțiunea circulară, cu diametrul $d_1 = 3 \text{ mm}$. Atît grinda AB cît și bara BC sînt confecționate dintr-un oțel care are limita de curgere $\sigma_c = 3\,200 \text{ daN/cm}^2$. Pentru ce valoare a forței P , cu care se încarcă la întindere bara BC, se atinge în una din cele două piese limita de curgere?

Fig. 4.13

Rezolvare. Se face ipoteza că datorită încărcării se atinge limita de curgere în una din bare (de exemplu BC); se verifică apoi cealaltă bară pentru a se vedea dacă efortul unitar are o valoare mai mică decît σ_c . Forța la care se atinge limita de curgere în bara BC este: $P_c = \sigma_c A = 0,0708 \cdot 3\,200 = 226 \text{ daN}$, unde:

$$A = 0,0708 \text{ cm}^2.$$

Momentul incovoietor produs în încastrare de această forță este:

$$M_i = P_c \cdot l = 226 \cdot 2,4 = 542 \text{ daNm} = 54\,200 \text{ daNcm.}$$

Se calculează efortul unitar maxim în grinda AB

$$\sigma_{ef} = \frac{M_i}{W} = \frac{M_i}{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}} = \frac{54\,200}{\frac{\pi(7^4 - 5^4)}{32 \cdot 7}} = 2\,160 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_c.$$

Deci limita de curgere se atinge mai întîi în bara BC.

4.14. Să se verifice grinda de lemn de secțiune pătrată din figura 4.14, știind că $P = 600$ daN, $l_1 = 150$ cm, $l_2 = 50$ cm, $a = 20$ cm. În secțiunile 1 și 2 grinda are două găuri de diametru $d = 10$ cm.

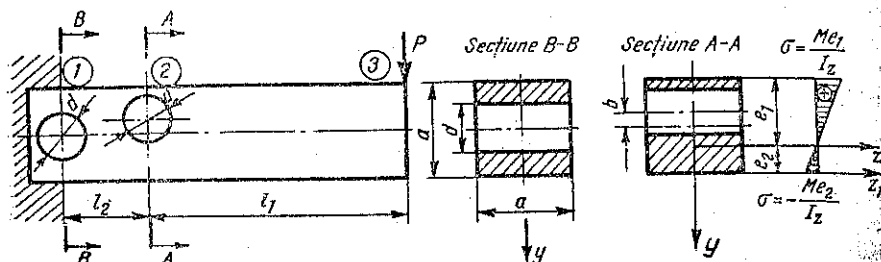


Fig. 4.14.

Axa găurii din secțiunea 1 este pe axa grinzii, iar a celei din secțiunea 2, deplasată la distanța $b = 2$ cm, deasupra axei grinzii. Se da $\sigma_a = 110$ daN/cm².

Rezolvare. a) Verificarea secțiunii 1:

$$M_1 = 600 \cdot 200 = 120\,000 \text{ daNcm},$$

$$W_1 = \left(\frac{a^4}{12} - \frac{d^3 a}{12} \right) \frac{1}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3 - d^3}{6} = \frac{20^3 - 10^3}{6} = 1\,167 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_{1ef} = \frac{M_1}{W_1} = \frac{120\,000}{1\,167} = 103 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

b) Verificarea secțiunii 2:

$$M_2 = 600 \cdot 150 = 90\,000 \text{ daN cm}.$$

Secțiunea 2 este nesimetrică, din cauza găurii deplasate față de axa grinzii. Poziția centrului de greutate al secțiunii găurite, în raport cu axa z_1 este:

$$e_2 = \frac{a^2 \cdot \frac{a}{2} - ad \left(\frac{a}{2} + b \right)}{a^2 - ad} = \frac{\frac{a^3}{2} - d \left(\frac{a^2}{2} + ab \right)}{a(a-d)} = \frac{\frac{20^3}{2} - 10 \left(\frac{20^2}{2} + 20 \cdot 2 \right)}{20 - 10} = 8 \text{ cm}.$$

Momentul de inerție al suprafeței secțiunii găurite în raport cu axa z este:

$$I_z = \frac{a^4}{12} + a^2 \cdot \left(\frac{a}{2} - e_2 \right)^2 - \left[\frac{a \cdot d^3}{12} + ad \cdot \left(\frac{a}{2} + b - e_2 \right)^2 \right] = \frac{20^4}{12} + 20^2 \left(\frac{20}{2} - 8 \right)^2 - \left[\frac{20 \cdot 10^3}{12} + 20 \cdot 10 \left(\frac{20}{2} + 2 - 8 \right)^2 \right] \approx 10\,066 \text{ cm}^4.$$

Efortul unitar maxim în secțiunea 2 este:

$$\sigma_{max} = \frac{M e_1}{I_z} = \frac{90\,000 \cdot 12}{10\,066} \approx 107 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

4.15. Ce forță concentrată, așezată în capătul consolei, poate suporta o grindă de oțel slăbită ca în figura 4.15, știind că $\sigma_a = 1\,100$ daN/cm²?

Rezolvare. Efortul unitar maxim poate apărea fie în secțiunea 2, unde momentul încovoiator este maxim, fie în secțiunea 3, unde modulul de rezistență este minim. Forța capabilă se calculează admitînd că una dintre secțiuni este periculoasă și verificînd efortul unitar în cea de-a doua. Considerînd ca periculoasă secțiunea de pe reazemul 2, rezultă:

$$M_{cap} = \sigma_a W_{ef} = M_{t2}; \quad \sigma_a \frac{\pi d^3}{32} = P'_{cap} \cdot a,$$

$$P'_{cap} = \frac{\pi \cdot \sigma_a d^3}{32 a} = \frac{\pi \cdot 1\,100 \cdot 5^3}{32 \cdot 40} = 337 \text{ daN}.$$

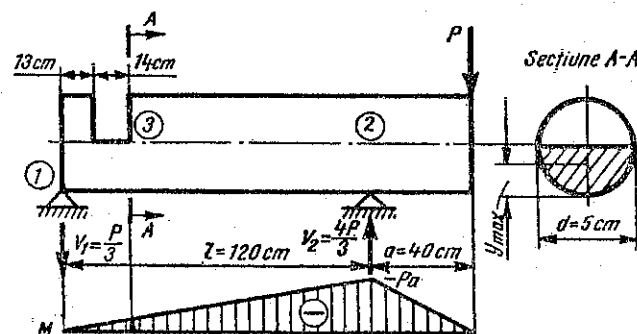


Fig. 4.15

Verificarea secțiunii slăbite 3:

$$M_{13} = \frac{337}{3} \cdot 27 = 3\,030 \text{ daNcm}; \quad I_{z3} = 0,00686 d^4, \quad (\text{v. problema 2.8})$$

$$W_{z3} = \frac{I_{z3}}{y_{3\max}} = \frac{0,00686 d^4}{\frac{d}{2} - \frac{2d}{3\pi}} = 0,0238 d^3,$$

$$\sigma_{ef\max} = \frac{M_{13}}{W_{z3}} = \frac{3\,030}{0,0238 \cdot 5^3} = 1\,018 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Secțiunea 2 este deci periculoasă, forța capabilă fiind $P_{cap} = 337 \text{ daN}$.

4.16. O macara rotativă este sprijinită pe coloana B (Fig. 4.16, a) și are lungimea $a + b$, unde $a = 8 \text{ m}$ și $b = 5 \text{ m}$; greutatea proprie este considerată ca o sarcină uniform repartizată $q = 20 \text{ kN/m}$. Secțiunea grinzii este formată din patru profile LL $100 \times 150 \times 12$, așezate ca în figura 4.16, b. Se cere:

- forța P care trebuie aplicată în C, spre a avea echilibru;
- reacțiunea din coloana B;
- momentul încovoietor maxim și secțiunea unde are loc acest moment;
- determinarea dimensiunii d din figura 4.16 b, considerind $\sigma_a = 1\,000 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. a) Se scrie ecuația de momente față de B:

$$qa \cdot \frac{a}{2} - qb \cdot \frac{b}{2} - P \cdot b = 0; \quad P = \frac{q(a^2 - b^2)}{2b} = \frac{20(8^2 - 5^2)}{2 \cdot 5} = 78 \text{ kN}. \quad (1)$$

b) Ecuația de proiecții pe verticală:

$$q(a + b) + P - R_B = 0;$$

$$R_B = q(a + b) + P = 20(8 + 5) + 78 = 338 \text{ kN}. \quad (2)$$

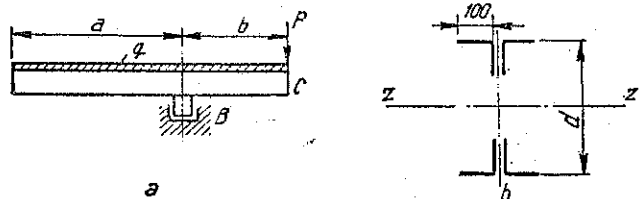


Fig. 4.16

c) Momentul maxim are loc în reazem:

$$M_{\max} = M_B = q \frac{a^2}{2} = \frac{20 \cdot 8^2}{2} = 640 \text{ kNm} = 6\,400\,000 \text{ daNcm}. \quad (3)$$

$$d) W_{nec} = \frac{M_{\max}}{\sigma_a} = \frac{6\,400\,000}{1\,000} = 6\,400 \text{ cm}^3. \quad (4)$$

Pentru a determina modulul de rezistență al secțiunii, se calculează, în prealabil, momentul de inerție.

Pentru un singur profil se găsește în anexa 7:

$$I_{z1} = 650 \text{ cm}^4; \quad A_1 = 28,7 \text{ cm}^2; \quad e = 4,89 \text{ cm}.$$

Pentru întreg ansamblul de patru corniere, momentul de inerție este:

$$I_z = 4 \left[I_{z1} + A_1 \left(\frac{d}{2} - e \right)^2 \right].$$

Rezultă modulul de rezistență:

$$W_z = \frac{I_z}{\frac{d}{2}} = \frac{2I_z}{d} = \frac{8}{d} \left[I_{z1} + A_1 \left(\frac{d}{2} - e \right)^2 \right],$$

de unde:

$$W_z = \frac{8}{d} \left[650 + 28,7 \left(\frac{d}{2} - 4,89 \right)^2 \right] = \frac{10\,688 + 57,4 d^2 - 1\,123 d}{d}. \quad (5)$$

Egalind valorile (4) și (5), rezultă.

$$\frac{10\,688 + 57,4 d^2 - 1\,123 d}{d} = 6\,400 \text{ sau } 57,4 d^2 - 7\,523 d + 10\,688 = 0.$$

Soluțiile ecuației sînt:

$$d_1 = 129,5 \text{ cm}; \quad d_2 = 1,5 \text{ cm}.$$

Se vede că numai prima rădăcină, adică $d_1 = 129,5 \text{ cm}$, este valabilă, cealaltă necorespunzînd desenului.

4.17. O macara ca în figura 4.17, *a* se poate deplasa pe două șine simplu rezemate, formate din profile I. Să se determine poziția cea mai defavorabilă a macaralei pe calea de rulare și apoi să se dimensioneze șinele dacă $\sigma_a = 1\,400\text{ daN/cm}^2$, $l = 9\text{ m}$, $a = 3,6\text{ m}$, $d = 1,8\text{ m}$. Greutatea proprie a macaralei este $G = 4\,500\text{ daN}$, iar sarcina ridicată este $P = 900\text{ daN}$. Se admite că forțele sînt cuprinse în planul de simetrie al celor două șine și, în consecință, se repartizează egal asupra celor două șine.

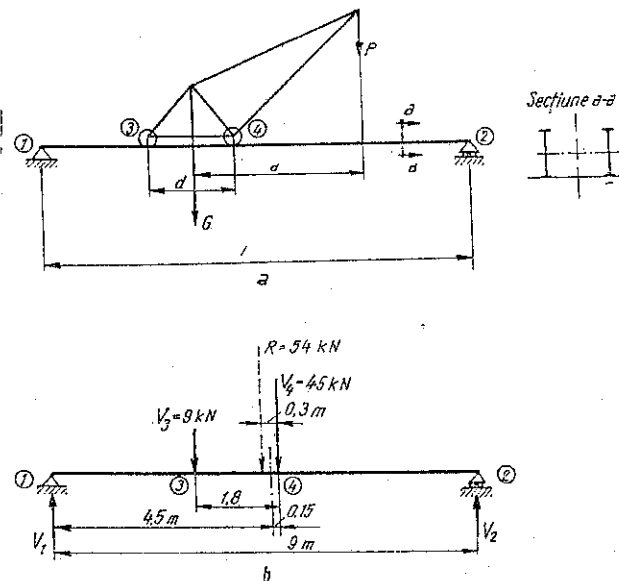


Fig. 4.17

tatea proprie a macaralei este $G = 4\,500\text{ daN}$, iar sarcina ridicată este $P = 900\text{ daN}$. Se admite că forțele sînt cuprinse în planul de simetrie al celor două șine și, în consecință, se repartizează egal asupra celor două șine.

Rezolvare. Pentru dimensionarea grinzilor este necesar să se stabilească momentul maxim maximorum. Se calculează mărimea sarcinilor care se transmit grinzii prin roțile 3 și 4. Ecuația de momente, față de roata 4, dă:

$$1,8V_3 - \frac{1,8}{2} \cdot 45 + \left(3,6 - \frac{1,8}{2}\right) 9 = 0; \quad V_3 = 9\text{ kN}; \quad V_4 = 45\text{ kN}.$$

Schema de calcul a grinzii este reprezentată în figura 4.17, *b*.

Se stabilește poziția rezultantei conforului, prin distanța ei b la roata 4, scriind momentele față de 4:

$$b = \frac{V_3 d}{R} = \frac{9 \cdot 1,8}{54} = 0,3\text{ m}.$$

Poziția care dă moment maxim maximorum este aceea pentru care mijlocul grinzii este simetric așezat față de sarcina V_4 și de rezultanta R , ca în figura 4.17, *b*. Reacțiunile sînt:

$$V_1 = \frac{45 \cdot 4,35 + 9 \cdot 6,15}{9} = \frac{196 + 55,3}{9} = 28\text{ kN}; \quad V_2 = 26\text{ kN}.$$

Momentul maxim maximorum este în dreptul forței V_4 :

$$M_{\max \max} = V_2 \left(\frac{l}{2} - \frac{b}{2} \right) = 26 \left(\frac{9}{2} - \frac{0,3}{2} \right) = 113\text{ kNm}.$$

Întrucît cele două grinzi sînt egal încărcate, fiecare suportă un moment încovoietor:

$$M_1 = \frac{1}{2} M_{\max \max} = 56,5\text{ kNm}; \quad W_{\text{nee}} = \frac{565\,000}{1\,400} \approx 404\text{ cm}^3.$$

Se alege I 26, cu $W_{ef} = 442\text{ cm}^3$ (v. Anexa 9).

Se face o verificare:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_1}{W_{ef}} = \frac{565\,000}{442} = 1\,278\text{ daN/cm}^2 < 1\,400\text{ daN/cm}^2.$$

4.18. O grindă de lemn de secțiune dreptunghiulară $20 \cdot 30\text{ cm}$ cu lungimea $l = 2\text{ m}$ este solicitată de o sarcină $P = 6\,000\text{ daN}$, aplicată la mijlocul ei. Se cere să se calculeze eforturile σ și τ care apar într-un punct M , din grindă, de coordonate $x_M = 50\text{ cm}$, $y_M = -6\text{ cm}$; $z_M = 0$, precum și eforturile unitare principale din acel punct (Fig. 4.18).

Rezolvare. Momentul încovoietor în secțiunea $x_M = 50\text{ cm}$ este: $M = V_0 x_M = 3\,000 \cdot 50 = 150\,000\text{ daNm}$. Rezultă:

$$\sigma = \frac{M \cdot y_M}{I_z} = \frac{150\,000 \cdot (-6)}{45\,000} = -20\text{ daN/cm}^2,$$

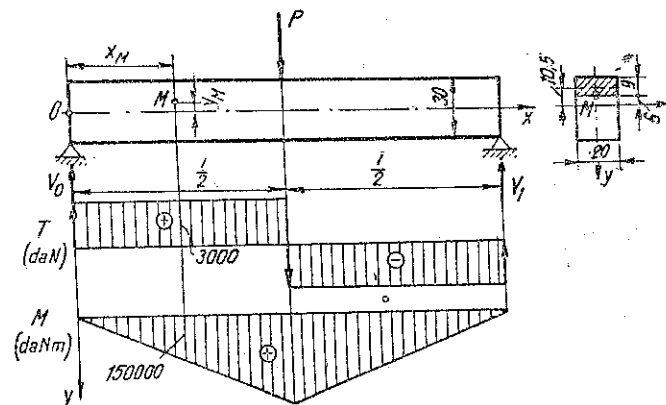


Fig. 4.18

unde :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45\,000 \text{ cm}^4.$$

Efortul unitar tangențial se calculează cu relația (4.12) :

$$\tau = \frac{T \cdot S}{b I_z} = \frac{3\,000 \cdot 1\,890}{20 \cdot 45\,000} = 6,3 \text{ daN/cm}^2,$$

unde :

$$T = 3\,000 \text{ daN}; S = 20 \cdot 9 \cdot 10,5 = 1\,890 \text{ cm}^3; b = 20 \text{ cm}.$$

Eforturile unitare principale sînt date de relația (7.3), unde $\sigma_x = -20 \text{ daN/cm}^2$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 6,3 \text{ daN/cm}^2$:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= -\frac{20}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-20)^2 + 4 \cdot 6,3^2} = -10 \pm 11,8, \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = 1,8 \text{ daN/cm}^2; \sigma_2 = -21,8 \text{ daN/cm}^2.$$

4.19. La grinda de oțel din figura 4.19, a se cunoaște : $l = 2 \text{ m}$, $\sigma_a = 1\,200 \text{ daN/cm}^2$, $d = 8 \text{ cm}$. Se cere să se calculeze :1) valoarea sarcinii repartizate, astfel ca efortul unitar maxim să nu depășească σ_a , grinda avînd poziția din figura 4.19, b ;

2) valoarea efortului unitar tangențial maxim pentru secțiunea din figura 4.19, c ;

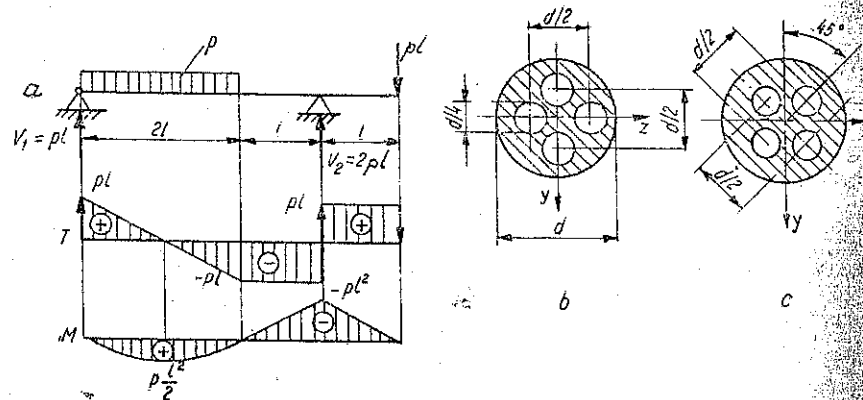
3) valorile eforturilor unitare σ_{max} și τ_{max} dacă secțiunea se rotește cu 45° (Fig. 4.19, c).

Fig. 4.19

Rezolvare

$$1) I_z = \frac{\pi d^4}{64} - 2 \frac{\pi \left(\frac{d}{4}\right)^4}{64} - 2 \left[\frac{\pi \left(\frac{d}{4}\right)^4}{64} + \frac{\pi \left(\frac{d}{4}\right)^2}{4} \left(\frac{d}{4}\right)^2 \right] = 0,042 d^4,$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{0,042 d^4}{\frac{d}{2}} = 0,084 d^3,$$

$$M_{cap} = \sigma_a \cdot W_z = 1\,200 \cdot 0,084 \cdot 8^3 = 51\,609,6 \text{ daNcm},$$

$$M_{max} = pl^2; p = \frac{M_{cap}}{l^2} = \frac{51\,609,6}{200^2} = 1,29 \text{ daN/cm}.$$

2) $\tau_{max} = \frac{TS}{b I_z}$, unde $T_{max} = pl$, S este momentul static al jumătății de secțiune calculat față de axa neutră, iar b — lățimea efectivă a grinzii în axa neutră,

$$S = \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{2d}{3\pi} - \frac{\pi \left(\frac{d}{4}\right)^2}{4} \cdot \frac{d}{4} - 2 \frac{\pi \left(\frac{d}{4}\right)^2}{8} \cdot \frac{2 \left(\frac{d}{4}\right)}{3\pi} = 0,0749 d^3.$$

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{pl \cdot 0,0749 d^3}{\left(d - 2 \frac{d}{4}\right) \cdot 0,042 d^4} = \frac{0,0749 pl}{0,021 \cdot d^2} = \\ &= \frac{0,0749 \cdot 1,29 \cdot 200}{0,021 \cdot 8^2} = 14,4 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned}$$

3) Pentru secțiunea rotită cu 45° se calculează I_z cu relația (2.13) :

$$I_z = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha,$$

dar

$$I_z = I_y; \quad I_{xy} = 0,$$

deci

$$I_z = I_y; \quad W_z = W_y.$$

Valorile maxime ale eforturilor unitare sînt :

$$\sigma_{max} = 1\,200 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau_{max} = \frac{TS}{d \cdot I_z}; S = \frac{\pi \cdot d^2}{8} \cdot \frac{2d}{3\pi} - 2 \frac{\pi \left(\frac{d}{4}\right)^2}{4} \cdot \frac{d \sqrt{2}}{4} = 0,0659 d^3,$$

$$\tau_{max} = \frac{pl \cdot 0,0659 d^3}{d \cdot 0,042 d^4} = \frac{0,0659 \cdot 1,29 \cdot 200}{0,042 \cdot 8^2} = 6,3 \text{ daN/cm}^2.$$

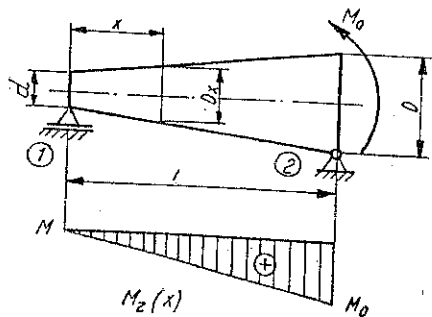


Fig. 4.20

4.20. Bara de secțiune tronconică din figura 4.20 este solicitată de cuplul M_0 . Cunosând: $d = 4$ cm, $D = 3d$, $l = 1$ m, să se calculeze valoarea lui M_0 , astfel ca efortul unitar maxim să nu depășească rezistența admisibilă a materialului barei,

$$\sigma_a = 900 \text{ daN/cm}^2.$$

Rezolvare. Se determină secțiunea x unde efortul unitar σ este maxim

$$\sigma_{(x)} = \frac{M_z(x)}{W_z(x)}; \quad M_z(x) = \frac{M_0}{l} x,$$

$$W_z = \frac{\pi D_x^3}{32}; \quad D_x = \frac{D-d}{l} x + d,$$

$$\sigma_{(x)} = \frac{\frac{M_0}{l} x}{\frac{\pi}{32} \left(\frac{D-d}{l} x + d \right)^3} \quad (1)$$

Notînd: $\frac{M_0}{\frac{\pi}{32}} = k$ și $\frac{D-d}{l} = \alpha$, relația (1) devine:

$$\sigma_{(x)} = \frac{kx}{(\alpha x + d)^3};$$

$$\frac{d\sigma_{(x)}}{dx} = \frac{k(\alpha x + d)^3 - 3kx(\alpha x + d)^2\alpha}{(\alpha x + d)^6} = \frac{k(\alpha x + d) - 3k\alpha x}{(\alpha x + d)^4} = 0,$$

$$k(d - 2\alpha x) = 0; \quad d - 2\frac{D-d}{l}x = 0,$$

$$x = \frac{dl}{2(D-d)}.$$

Pentru $D = 3d$, se obține $x = \frac{l}{4}$.

Efortul unitar maxim se calculează cu relația (1) întocmind $x = \frac{l}{4}$ și $D = 3d$:

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{M_0}{l} \cdot \frac{l}{4}}{\frac{\pi}{32} \left(\frac{2d}{l} \cdot \frac{l}{4} + d \right)^3} = \frac{8M_0}{\pi \left(\frac{3d}{2} \right)^3} = \sigma_a$$

$$M_0 = \frac{27}{64} \pi \sigma_a \cdot d^3 = \frac{27}{64} \pi \cdot 900 \cdot 4^3 = 76\,340 \text{ daN cm}.$$

4.21. Grinda din figura 4.21, încastrată la un capăt și liberă la celălalt, suportă o sarcină distribuită triunghiular, de intensitate maximă p . Cunosând dimensiunile grinzii a și l precum și rezistența admisibilă a materialului, σ_a , să se calculeze mărimea sarcinii pe care poate fi aplicată grinzii.

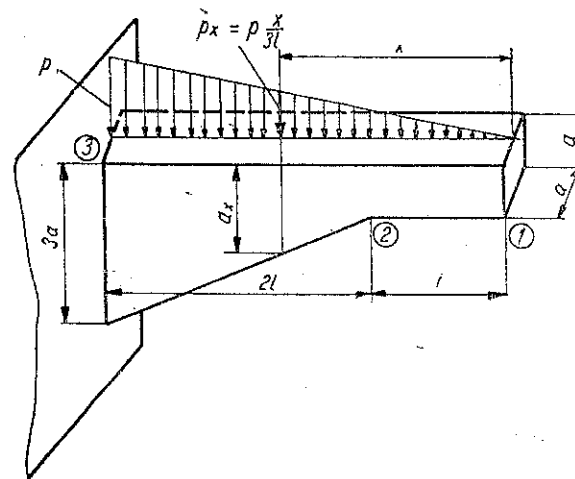


Fig. 4.21

Rezolvare. $M_z(x) = -\frac{1}{2} x \frac{px}{3l} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{px^3}{18l}.$

Se calculează eforturile unitare maxime pe intervalele 1 - 2 și 2 - 3.

Intervalul 1 - 2 ($0 \leq x \leq l$):

$$|M_2| = \frac{pl^2}{18}; \quad W_z(x) = \frac{a^3}{6}; \quad \sigma_2 = \frac{M_2}{W_z(x)} = \frac{18}{a^3} = \frac{pl^2}{3a^3}.$$

Intervalul 2 - 3 ($l \leq x \leq 3l$):

$$W_z(x) = \frac{a \cdot a_x^2}{6}; \quad a_x = a \frac{x}{l}; \quad \sigma_x = \frac{M_z(x)}{W_z(x)} = \frac{\frac{px^3}{18l}}{\frac{a^3}{6l^2} x^2} = \frac{pl}{3a^3} x.$$

Efortul unitar maxim se produce în incastare, pentru $x = 3l$,

$$\sigma_{\max} = \frac{pl^2}{a^3}; \quad p = \frac{\sigma_a \cdot a^3}{l^2}.$$

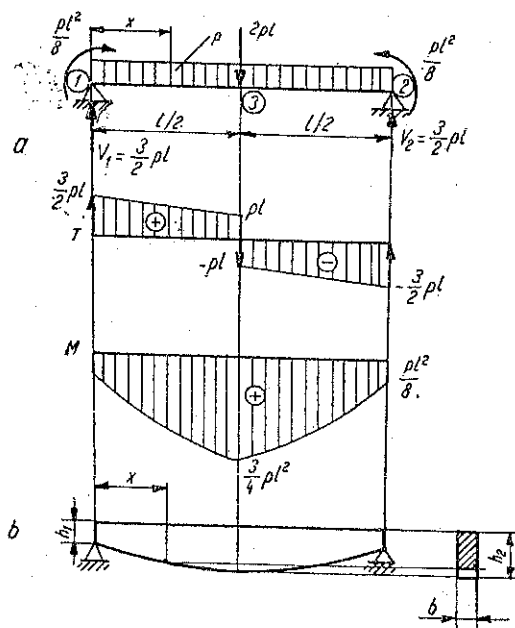


Fig. 4.22

4.22. Să se determine forma barei de egală rezistență pentru grinda solicitată ca în figura 4.22, a. Secțiunea grinzii este dreptunghiulară avînd lățimea b constantă și înălțimea h variabilă.

Rezolvare. Se trasează diagramele T și M .

Momentul încovoierei într-o secțiune x , pe intervalul 1 - 3, este:

$$M_x = \frac{pl^2}{8} + \frac{3}{2} plx - \frac{px^2}{2},$$

iar

$$W_z = \frac{M_x}{\sigma_a} = \frac{bh^2}{6}, \quad \frac{bh^2}{6} = \frac{p}{\sigma_a} \left(\frac{l^2}{8} + \frac{3}{2} lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

Dacă se menține constantă lățimea b , atunci înălțimea h , în secțiunea x , este:

$$h = \sqrt{\frac{6p}{b\sigma_a} \left(\frac{l^2}{8} + \frac{3}{2} lx - \frac{x^2}{2} \right)},$$

iar bara are forma din figura 4.22, b, cu înălțimea

$$h_1 = \sqrt{\frac{6pl^2}{8b\sigma_a}} = 0,866 l \sqrt{\frac{p}{b\sigma_a}},$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{9pl^2}{2b\sigma_a}} = 2,12 l \sqrt{\frac{p}{b\sigma_a}}.$$

4.23. O grindă simplu rezemată de lungime $l = 8$ m, formată dintr-un profil I 14, suportă o sarcină uniform distribuită q . Cunoscind că rezistența admisibilă este $\sigma_a = 1400$ daN/cm², se cere să se calculeze mărimea sarcinii q pe care o poate suporta grinda.

Dacă această grindă, în stare neîncărcată, este consolidată prin sudarea la talpa de jos a unei platbande de grosime $t = 10$ mm (Fig. 4.23), se cere să se calculeze suplimentul de încărcare pe care îl poate prelua grinda.

Rezolvare. Sarcina maximă admisibilă q rezultă din formula (4.3) și din formula momentului maxim la o grindă rezemată la capete, încărcată cu o sarcină uniform repartizată:

$$M_{\max} = \frac{1}{8} ql^2; \quad q = \frac{8M_{\max}}{l^2},$$

$$M_{\text{cap}} = \sigma \cdot W_{ef} = 1400 \cdot 81,9 = 114\,660 \text{ daNm},$$

$$q = \frac{8 \cdot 114\,660}{8^2} = 143,3 \text{ daN/m}.$$

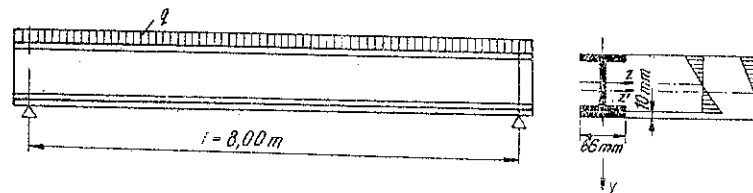


Fig. 4.23

Prin adăugarea unei platbande $66 \cdot 10$ mm, modulul de rezistență al grinzii se mărește.

Se determină poziția centrului de greutate al secțiunii consolidate față de centrul de greutate al profilului I neconsolidat:

$$y = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{6,6 \cdot 1 \cdot 7,5}{6,6 \cdot 1 + 18,3} \approx 2 \text{ cm.}$$

Momentul de inerție față de noua axă neutră este:

$$I_z' = 573 + 18,3 \cdot 2^2 + \frac{6,6 \cdot 1^3}{12} + 6,6 \cdot 1 \cdot (7,5 - 2)^2 = 846 \text{ cm}^4.$$

Distanțele fibrelor extreme la noua axă neutră sunt:

$$y_1 = 7 + 2 = 9 \text{ cm} = y_{\max}; \quad y_2 = 7 - 2 + 1 = 6 \text{ cm.}$$

Modulul de rezistență este:

$$W_z' = \frac{I_z'}{y_{\max}} = \frac{846}{9} = 94 \text{ cm}^3.$$

Sarcina capabilă după consolidare este:

$$M'_{\text{cap}} = W_z' \cdot \sigma_a = 94 \cdot 1400 = 131600 \text{ daNcm} = 1316 \text{ daNm.}$$

$$q' = \frac{8 \cdot 1316}{8^2} = 165 \text{ daN/m.}$$

În concluzie, un spor de 36% al secțiunii, deci al greutății grinzii, duce la o creștere de 15% a sarcinii capabile.

4.24. Să se verifice grinda de fontă din figura 4.24, știind că $\sigma_{at} = 300 \text{ daN/cm}^2$ și $\sigma_{ac} = 1000 \text{ daN/cm}^2$. Să se traseze apoi diagrama de variație a eforturilor unitare tangențiale pe secțiunea din încăstrare.

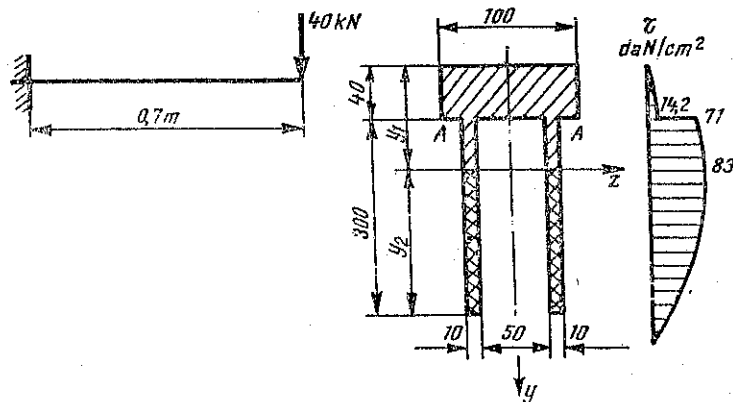


Fig. 4.24

$$\text{Rezolvare. } y_1 = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 30 \cdot 1 \cdot 19}{10 \cdot 4 + 2 \cdot 30 \cdot 1} = 12,2 \text{ cm}; \quad y_2 = 21,8 \text{ cm,}$$

$$I_z = \frac{10 \cdot 4^3}{12} + 10 \cdot 4 \cdot 10,2^2 + 2 \left(\frac{1 \cdot 30^3}{12} + 1 \cdot 30 \cdot 6,8^2 \right) = 11485 \text{ cm}^4,$$

$$|M_t|_{\max} = 40 \cdot 0,7 = 28 \text{ kNm} = 2,8 \cdot 10^5 \text{ daN cm,}$$

$$\sigma_{\max \text{ ef}} = \frac{M_t y_1}{I_z} = \frac{2,8 \cdot 10^5 \cdot 12,2}{11485} = 298 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{at},$$

$$\sigma_{\max \text{ cf}} = \frac{M_t y_2}{I_z} = \frac{2,8 \cdot 10^5 \cdot 21,8}{11485} = 532 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac}.$$

Efortul unitar tangențial maxim apare în axa neutră:

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot S}{b I_z} = \frac{4000 \cdot 475}{2 \cdot 11485} = 83 \text{ daN/cm}^2,$$

unde:

$$S = 2(1 \cdot 21,8 \cdot 10,9) = 475 \text{ cm}^3$$

reprezintă momentul static față de axa neutră al suprafeței hașurate dublu, iar $b = 2 \cdot 1 = 2 \text{ cm}$ este lățimea efectivă a grinzii în axa neutră. Efortul unitar tangențial în fibra $A - A$ are o discontinuitate determinată de variația lățimii grinzii de la $b' = 2 \text{ cm}$ la $b'' = 10 \text{ cm}$. Momentul static S' al suprafeței de deasupra fibrei $A - A$ în raport cu axa neutră este $S' = 10 \cdot 4 \cdot 10,2 = 408 \text{ cm}^3$.

Eforturile unitare sunt:

$$\tau'_A = \frac{TS'}{b' I_z} = \frac{4000 \cdot 408}{2 \cdot 11485} = 71 \text{ daN/cm.}$$

$$\tau''_A = \frac{TS'}{b'' I_z} = \frac{4000 \cdot 408}{10 \cdot 11485} = 14,2 \text{ daN/cm}^2.$$

4.25. Să se calculeze dimensiunea x a grinzii de fontă reprezentată în figura 4.25, a, solicitată la încovoiere, astfel încât efortul unitar maxim

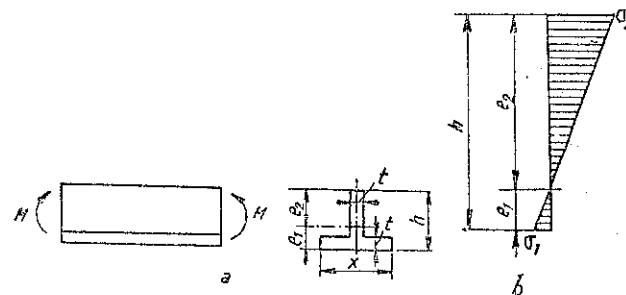


Fig. 4.25

de întindere să fie $1/4$ din efortul unitar maxim de compresiune. Înălțimea grinzii este $h = 100$ mm, iar grosimea minii și a aripii, $t = 25$ mm.

Rezolvare. Variația eforturilor unitare pe secțiune este reprezentată în figura 4.25, b. Cu datele din figură se scriu relațiile :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{e_2}{e_1} = 4,$$

unde $e_2 = 4e_1$.

$$e_1 + e_2 = h; 4e_1 = e_2; e_1 = \frac{h}{5} = \frac{100}{5} = 20 \text{ mm}; e_2 = 80 \text{ mm}.$$

Poziția centrului de greutate este dată de relația :

$$e_1 = \frac{x \frac{t^2}{2} + t(h-t) \left(\frac{h-t}{2} + t \right)}{xt + t(h-t)} = \frac{h}{5}$$

sau :

$$\frac{h}{5} = \frac{\frac{xt}{2} + \frac{1}{2}(h^2 - t^2)}{x + h - t}$$

Pentru $h = 10$ cm, $t = 2,5$ cm se obține :

$$1,25x + \frac{100 - 6,25}{2} = 2x + 20 - 5, \text{ de unde } x = 42,5 \text{ cm}.$$

4.26. Să se calculeze efortul unitar normal maxim care se produce în grinda din figura 4.26, a, de secțiune dreptunghiulară $3t \times 4t$, dacă în punctul 4 este slăbită ca în figura 4.26, b.

Rezolvare. Se trasează diagramele de eforturi T și M .

Eforturile unitare σ pot fi maxime în secțiunea în care momentul încovoietor este maxim, sau acolo unde secțiunea este slăbită.

Se determină secțiunea în care momentul încovoietor este maxim

$$T_x = pl - p \frac{x}{2l} \frac{x}{2} = 0; x = 2l.$$

Deci

$$M_{max} = M_3 = pl \cdot l - p \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2l = \frac{1}{3} pl^2.$$

Rezultă :

$$\sigma_3 = \frac{M_3}{W_z} = \frac{1}{3} \frac{pl^2}{\frac{3t(4t)^2}{6}} = \frac{pl^2}{24t^3}$$

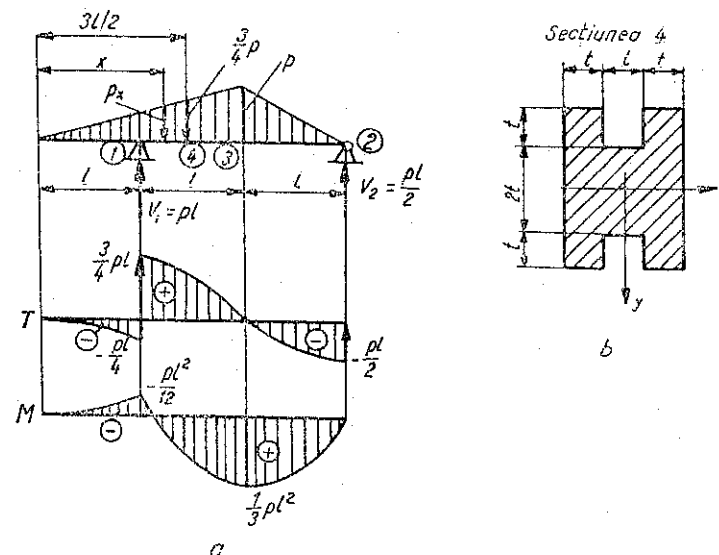


Fig. 4.26

Se calculează σ în secțiunea slăbită

$$M_4 = pl \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \frac{3}{4} p \cdot \frac{3l}{2} - \frac{1}{3} \frac{3l}{2} = \frac{7}{32} pl^2$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{2t \frac{(4t)^3}{12} + \frac{t \cdot (2t)^3}{12}}{2t} = \frac{17}{3} t^3$$

$$\sigma_4 = \frac{21}{17 \cdot 32} \cdot \frac{pl^2}{t^3} = \frac{1}{24} \cdot \frac{63}{68} \frac{pl^2}{t^3} = 0,92 \sigma_3.$$

Deci efortul unitar maxim este în secțiunea 3

$$\sigma_{max} = \sigma_3 = \frac{pl^2}{24t^3}$$

4.27. O grindă simplu rezemată, formată dintr-un profil I 18 și un profil U 14, așezate ca în figura 4.27 și solidarizate prin sudură, suportă o sarcină P la mijlocul deschiderii. Se cere :

1. Sarcina maximă P care se poate așeza pe grindă, dacă lungimea este $l = 4$ m și rezistența admisibilă $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².
2. Să se dimensioneze sudura care solidarizează cele două profile, cu $\tau_{as} = 910$ daN/cm².

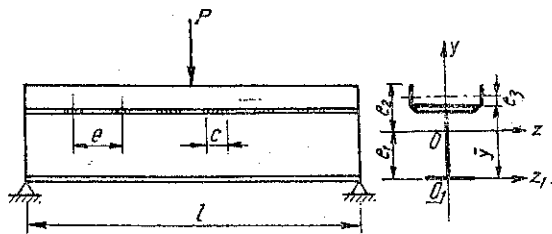


Fig. 4.27

Rezolvare. a) Din anexele 8 și 9 se obțin caracteristicile celor două profile :

$$I\,18 : A = 27,9 \text{ cm}^2; I_z = 1\,450 \text{ cm}^4; h = 18 \text{ cm.}$$

$$U\,14 : A = 20,4 \text{ cm}^2; I_y = 62,7 \text{ cm}^4; e = 1,75 \text{ cm.}$$

Coordonatele centrului de greutate al ansamblului, față de axele O_1z_1 și O_1y sînt :

$$\bar{z} = 0, \bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{27,9 \cdot 9 + 20,4 \cdot (18 + 1,75)}{27,9 + 20,4} = 13,5 \text{ cm.}$$

Momentul de inerție față de axa care trece prin centrul de greutate :

$$I_z = 1\,450 + 4,5^2 \cdot 27,9 + 62,7 + 6,25^2 \cdot 20,4 = 2\,875 \text{ cm}^4.$$

Distanțele de la axa neutră la fibrele cele mai depărtate sînt :

$$e_1 = 13,5 \text{ cm}; e_2 = 4,5 + 6 = 10,5 \text{ cm.}$$

Efortul unitar maxim este (4.9) :

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot e_2}{I_z} = \frac{Pl \cdot e_2}{4I_z} = \sigma_a.$$

Sarcina maximă pe care o poate suporta grinda este :

$$P = \frac{4 \cdot I_z \cdot \sigma_a}{le_2} = \frac{4 \cdot 2\,875 \cdot 1\,400}{400 \cdot 13,5} = 2\,980 \text{ daN.}$$

b) Forța tăietoare maximă este :

$$T_{max} = V_1 = \frac{P}{2} = \frac{2\,980}{2} = 1\,490 \text{ daN.}$$

Forța de alunecare longitudinală pe distanța e între două cordonane de sudură este (4.13) :

$$N_1 = \frac{STe}{I_z},$$

unde S este momentul static al părții de secțiune care caută să alunece (în cazul problemei este momentul static al suprafeței profilului $U\,14$ față de axa z). Forța de alunecare trebuie preluată de către sudură :

$$N_1 = 2ac\tau_{as} = \frac{STe}{I_z},$$

unde c este lungimea cordonului de sudură. Se obține raportul :

$$\frac{e}{c} = \frac{2a\tau_{as}I_z}{ST}.$$

Momentul static al profilului $U\,14$ este :

$$S = 20,4 \cdot 6,25 = 127,5 \text{ cm}^3.$$

Alegînd grosimea cordonului de sudură $a = 5$ mm, se obține :

$$\frac{e}{c} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 910 \cdot 2\,875}{127,5 \cdot 1\,490} = 13,8.$$

Alegînd lungimea cordonului de sudură :

$$c = 4 \text{ cm,}$$

rezultă distanța între cordonanele de sudură :

$$e = 13,8 \cdot 4 = 55,2 \text{ cm.}$$

Se alege distanța mai mică :

$$e = 55 \text{ cm.}$$

4.28. O grindă încastrată de 2,5 m lungime este alcătuită dintr-un profil L , cu înălțimea de 20 cm (Fig. 4.28, a). Grindă este solicitată la capătul liber de o forță concentrată $P = 400 \text{ daN}$. Să se determine valorile eforturilor unitare maxime și minime.

Rezolvare. Poziția axelor principale de inerție este dată de unghiul $\alpha = 17^\circ 20'$ pe care axa 1 îl face cu axa Ox . Pentru a aplica formula (4.10), se observă că, în cazul de față, M_x și M_y sunt componentele momentului încovoietor M_x pe axele $0-1$ și $0-2$, respectiv M_1 și M_2 , y și z — distanțele de la aceste axe la muchiile cele mai solicitate, iar I_y și I_z — momentele de inerție principale, respectiv I_1 și I_2 .

Valorile lui I_1 și I_2 sunt:

$$I_1 = 2\,510 \text{ cm}^4; I_2 = 147 \text{ cm}^4;$$

$$\cos \alpha = \cos 17^\circ 20' = 0,954; \sin \alpha = \sin 17^\circ 20' = 0,297.$$

Momentul din încastrare este:

$$M_x = Pl = 400 \cdot 2,5 = 1\,000 \text{ daNm}.$$

Componentele sale pe axele principale sunt:

$$M_1 = M_x \cos \alpha = 1\,000 \cdot 0,954 = 954 \text{ daNm};$$

$$M_2 = M_x \sin \alpha = 1\,000 \cdot 0,297 = 297 \text{ daNm}.$$

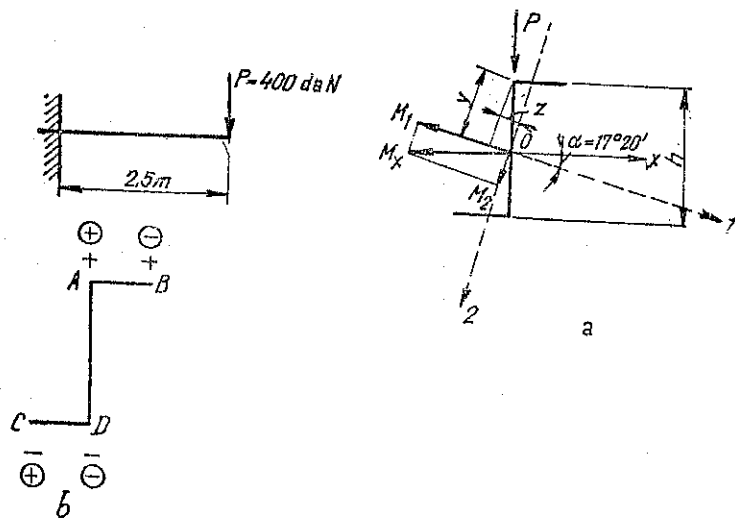


Fig. 4.28

Interesează punctele unde se cumulează eforturile unitare de întindere, respectiv de compresiune.

Ținând seama de semnul momentului (negativ, fiind vorba de grindă încastrată) și notind întinderea cu plus și compresiunea cu minus, se obține schema din figura 4.28, b. Astfel M_1 (moment negativ) produce întindere în punctele A și B și compresiune în C și D. În schemă s-au notat semnele + respectiv -.

Momentul M_2 (moment pozitiv) produce întindere în punctele C și A și compresiune în punctele D și B. Pe schemă s-au notat semnele + și - în cerceulețe. Se vede că punctele în care eforturile unitare sînt de același semn, deci se adună, sînt A și D.

Distanțele de la axele principale pînă la aceste puncte, notate în figura 4.28, a cu y și z , sînt:

$$y = \frac{h}{2} \cos \alpha = 10 \cdot 0,954 = 9,54 \text{ cm}; z = \frac{h}{2} \sin \alpha = 10 \cdot 0,297 = 2,97 \text{ cm},$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{M_1 y}{I_1} + \frac{M_2 z}{I_2} = \frac{95\,400 \cdot 9,54}{2\,510} + \frac{29\,700 \cdot 2,97}{147} = 963 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_D = -963 \text{ daN/cm}^2.$$

4.29. Să se dimensioneze din lemn, cu secțiunea circulară, grindă încastrată la un capăt din figura 4.29 și încărcată cu un sistem de sarcini cuprinse în două plane perpendiculare, luînd $\sigma_a = 90 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Se trasează diagramele de momente încovoietoare în planul orizontal, respectiv vertical și se calculează momentul încovoietor resultant maxim, ce apare în încastrare:

$$M_r = \sqrt{M_{ry}^2 + M_{rz}^2} = \sqrt{(556)^2 + (360)^2} = 662 \text{ daNm}.$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{r \max}}{\pi \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6,62 \cdot 10^4}{\pi \cdot 90}} = 19,6 \text{ cm}.$$

Se alege $d = 20 \text{ cm}$.

4.30. O grindă simplu rezemată la capete este încărcată ca în figura 4.30, a. Cunoșcînd: $P = 1\,000 \text{ daN}$, $l = 50 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$, să se calculeze dimensiunea c a secțiunii, astfel încît efortul unitar maxim să nu depășească $\sigma_a = 1\,200 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Se trasează diagramele de momente încovoietoare produse de componentele forțelor P și $2P$ în plan vertical și orizontal.

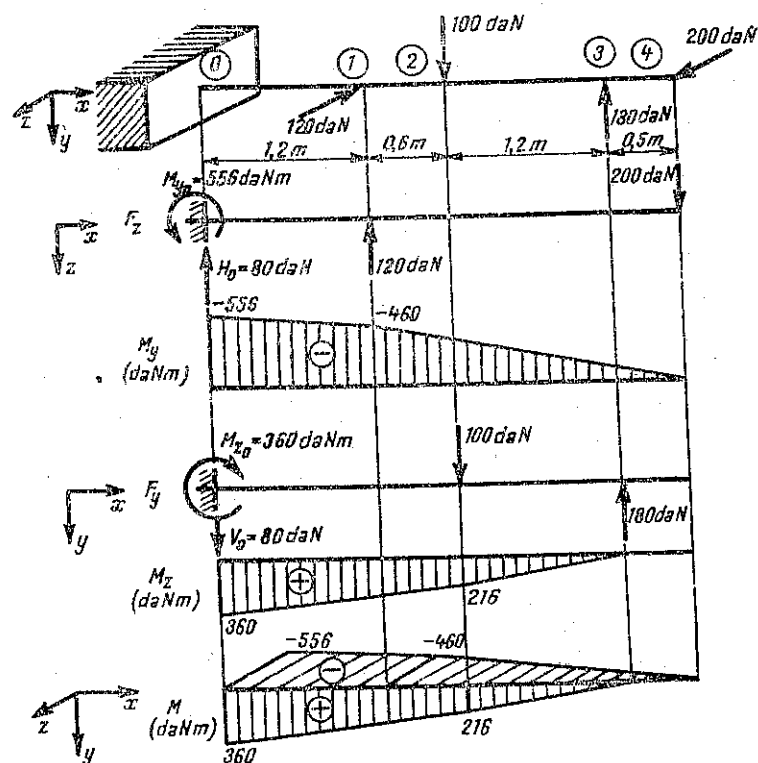


Fig. 4.29

Pentru calculul de dimensionare al secțiunii se folosește relația
 (4.11): $\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}$

$$I_z = \frac{c \left(\frac{3}{2} c \right)^3}{12} - \frac{c}{12} c^3 = \frac{13}{48} c^4; \quad W_z = \frac{\frac{13}{48} c^4}{\frac{3}{4} c} = \frac{13}{36} c^3;$$

$$I_y = \frac{\frac{3}{2} c \cdot c^3}{12} - \frac{c \cdot \left(\frac{c}{2} \right)^3}{12} = \frac{11}{96} c^4; \quad W_y = \frac{\frac{11}{96} c^4}{\frac{c}{2}} = \frac{11}{48} c^3.$$

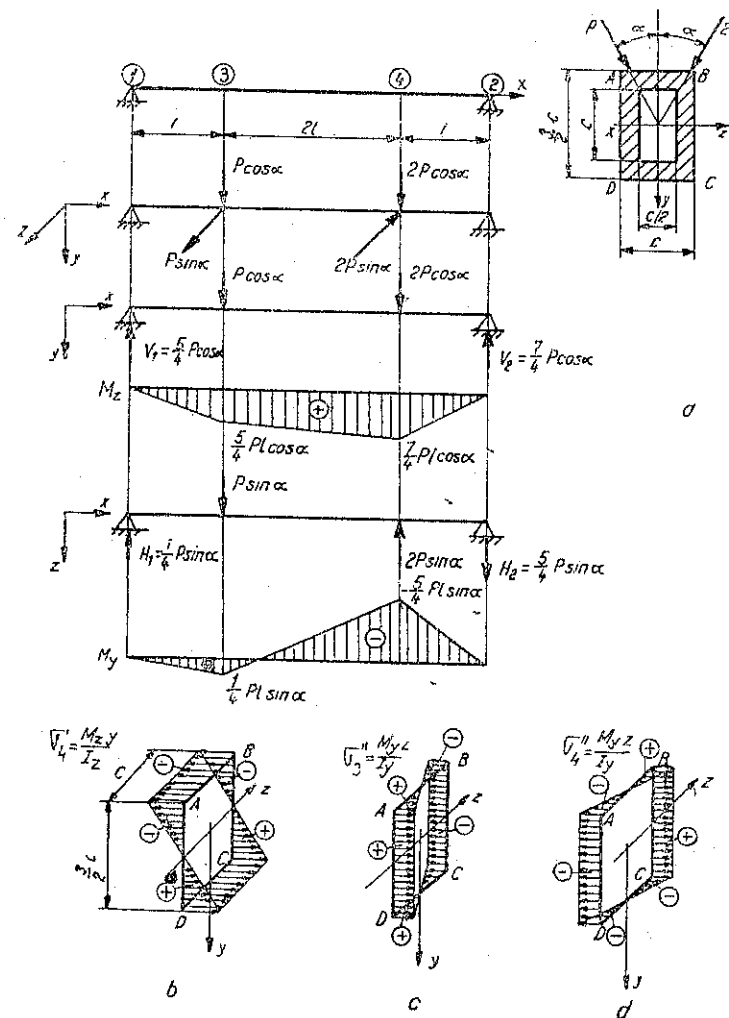


Fig. 4.30

Variația eforturilor unitare, produse de momentele încovoietoare M_z și M_y , în secțiunile 3 și 4, este arătată în figurile 4.30, b, c, d.

Eforturile unitare rezultante se obțin din însumarea algebrică a eforturilor unitare produse de momentele încovoietoare M_z și M_y . Eforturile unitare sînt maxime în punctele în care σ' și σ'' au același semn. În secțiunea 3, semnele eforturilor unitare σ'_z , produse de M_z , sînt aceleași ca în figura 4.30, b. Deci în secțiunea 3, eforturile unitare maxime se produc în punctele B și D (Fig. 4.30, b și c), $|\sigma_B| = \sigma_D$,

$$\sigma_n = \frac{\frac{5}{4} Pl \cos \alpha}{\frac{13}{36} c^3} + \frac{\frac{1}{4} Pl \sin \alpha}{\frac{11}{48} c^3} = \frac{Pl}{c^3} \left(\frac{45}{13} \cos \alpha + \frac{12}{11} \sin \alpha \right). \quad (1)$$

În secțiunea 4, eforturile unitare maxime sînt în punctele A și C (Fig. 4.30, b și d), $|\sigma_A| = \sigma_C$,

$$\sigma_c = \frac{\frac{7}{4} Pl \cos \alpha}{\frac{13}{36} c^3} + \frac{\frac{5}{4} Pl \sin \alpha}{\frac{11}{48} c^3} = \frac{Pl}{c^3} \left(\frac{63}{13} \cos \alpha + \frac{60}{11} \sin \alpha \right). \quad (2)$$

Din compararea relațiilor (1) și (2) rezultă că $\sigma_c > \sigma_D$.

Pentru dimensionarea secțiunii, se pune condiția ca $\sigma_{max} = \sigma_c = \sigma_A$ de unde rezultă:

$$c^3 = \frac{Pl}{\sigma_a} \left(\frac{63}{13} \cos \alpha + \frac{60}{11} \sin \alpha \right) = \frac{1000 \cdot 50}{1200} \left(\frac{63}{13} \cos 30^\circ + \frac{60}{11} \sin 30^\circ \right) = 288,5 \text{ cm}^3$$

$$c = 6,6 \text{ cm}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

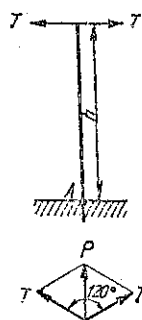


Fig. 4.31

4.31. Care este efortul unitar maxim, ce se produce într-un stîlp de colț neancorat al unei linii electrice (Fig. 4.31), dacă forța de întindere în fir este $T = 100 \text{ daN}$, unghiul în plan al firelor 120° , înălțimea stîlpului $h = 8 \text{ m}$ și diametrul stîlpului la partea inferioară $d = 18 \text{ cm}$? Stîlpul este din lemn avînd $\sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns: $\sigma_{ef} = 140 \text{ daN/cm}^2$.

Întrucît efortul unitar depășește rezistența admisibilă stîlpul trebuie ancorat sau sprijinit spre a micșora efectul forței P .

4.32. Care este sarcina uniform repartizată pe care o poate suporta grinda din lemn simplu rezemată avînd

secțiunea din figura 4.32 (cotele sînt date în cm), cu $\sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2$, dacă deschiderea sa este de 10 m și dacă se neglijează greutatea proprie?

Răspuns: $q = 1360 \text{ daN/m}$.

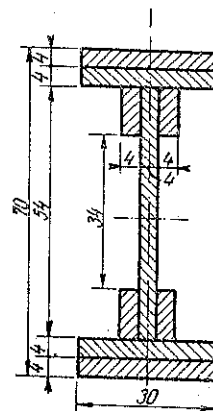


Fig. 4.32

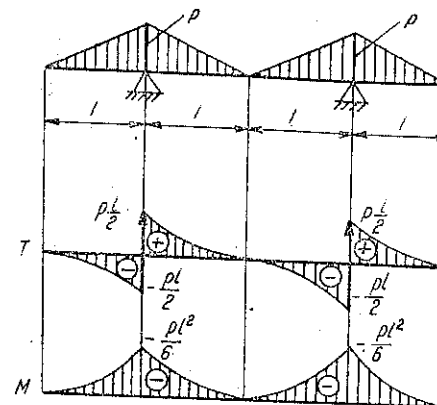


Fig. 4.33

4.33. Grinda din figura 4.33 este de secțiune circulară, cu diametrul $d = 60 \text{ mm}$. Materialul grinzii are $\sigma_a = 1500 \text{ daN/cm}^2$. Să se calculeze valoarea maximă p a sarcinii repartizate triunghiular care poate fi aplicată grinzii. Se dă $l = 1 \text{ m}$.

Răspuns: $p = 19 \text{ daN/cm}$, iar diagramele de eforturi sînt date în figură.

4.34. O grindă din fontă (Fig. 4.34) suportă o sarcină uniform repartizată p . Cunoscînd secțiunea grinzii, ca mărime și formă și rezistențele

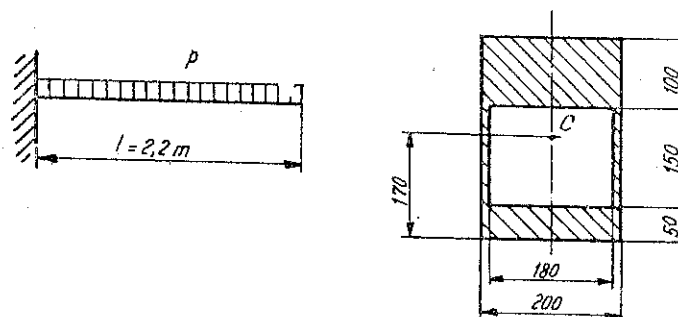


Fig. 4.34

admisibile ale fontei $\sigma_{at} = 120 \text{ daN/cm}^2$, $\sigma_{ac} = 500 \text{ daN/cm}^2$, să se calculeze mărimea sarcinii p care poate fi aplicată.

Răspuns : $p = 14 \text{ daN/cm}$.

4.35. O grindă încadrată la un capăt și liberă la celălalt poate fi executată din profil I 30 sau din bară de secțiune pătrată ($a = 83 \text{ mm}$) sau din bară de secțiune dreptunghiulară ($40 \times 170 \text{ mm}^2$). Dimensiunile secțiunilor au fost alese în așa fel ca mărimile ariilor să fie aproape egale. Să se calculeze lungimea l a grinzii în cele trei variante astfel ca în secțiunea cea mai solicitată, efortul unitar, produs de greutate proprie, să nu depășească $\sigma_a = 1200 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns : $l = 17 \text{ m}$; $l = 6,5 \text{ m}$; $l = 9,31 \text{ m}$.

4.36. Să se verifice grinda de lemn din figura 4.36, de secțiune $12 \times 25 \text{ cm}^2$, avind deschiderea $l = 2 \text{ m}$ și la mijloc o sarcină concentrată $P = 25 \text{ kN}$. Grinda este slăbită prin o gaură verticală cu diametrul de 20 mm în secțiunea 3 situată la $0,5 \text{ m}$ de reazemul 1. Se dă $\sigma_a = 110 \text{ daN/cm}^2$.

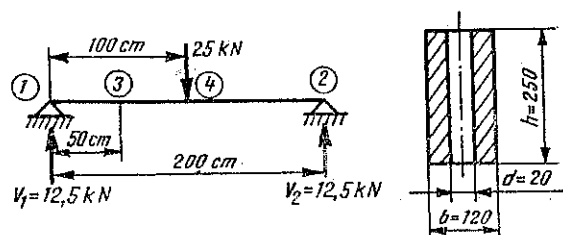


Fig. 4.36

Răspuns : $\sigma_{c/3} = 60 \text{ daN/cm}^2$,
 $\sigma_{c/4} = 100 \text{ daN/cm}^2$.

4.37. O grindă de lemn avind deschiderea $l = 4 \text{ m}$ și secțiunea $18 \times 24 \text{ cm}^2$, așezată pe două reazeme, este înclinată față de orizontală cu unghiul $\alpha = 30^\circ$ (Fig. 4.37). Grinda este solicitată la mijloc de sarcina $P = 10 \text{ kN}$. Știind că $\sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2$, să se arate dacă grinda rezistă sau nu.

Răspuns : $\sigma_B = -88,6 \text{ daN/cm}^2$,
 $\sigma_G = 88,6 \text{ daN/cm}^2$.

Deci grinda rezistă.

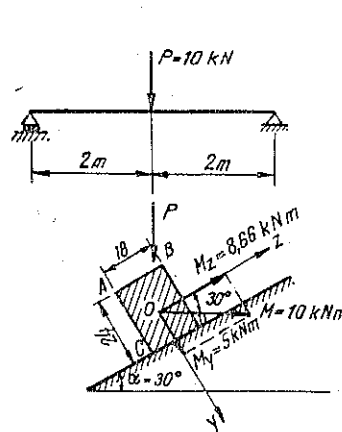


Fig. 4.37

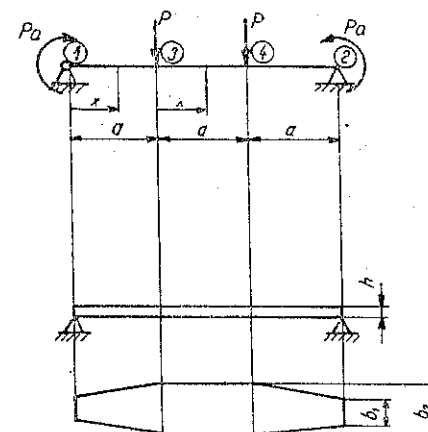


Fig. 4.38

4.38. Să se determine forma barei de egală rezistență pentru grinda solicitată ca în figura 4.38. Secțiunea grinzii este dreptunghiulară cu înălțimea h constantă și lățimea b variabilă.

Răspuns : $b_1 = \frac{6Pa}{h \cdot \sigma_a}$, $b_3 = \frac{12Pa}{h^2 \sigma_a}$, $b_3 = 2b_1$.

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Ecuația diferențială a fibrei deformate a unei bare solicitate la încovoieră este :

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M, \quad (5.1)$$

valabilă cu convenția de axe din figura 5, a, M fiind momentul încovoietor într-o secțiune oarecare, funcție de x .

2. Fibra medie este un *arc de cerc* pe porțiunea pe care momentul încovoietor este constant, deoarece ecuația exactă a fibrei medii deformate este :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (5.2)$$

3. Ecuația (5.1) se integrează pe cale analitică, ținând seamă de expresia analitică a momentului încovoietor pe diferite intervale ale barei și de condițiile pe reazeme. În general, se întâlnesc următoarele condiții pe reazeme :

- reazem simplu : săgeata nulă ;
- încăstrare : săgeata și unghiul format de tangenta în reazem la fibra medie deformată cu axa Ox , nule.

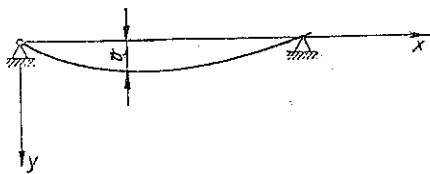


Fig. 5, a

4. *Metoda grinzii reciproce*. Bara studiată se consideră încărcată cu o sarcină distribuită, care este diagrama de momente încovoietoare, numită sarcină fictivă. Grinda încărcată cu sarcina fictivă se numește grindă reciprocă a celei reale. Sarcina fictivă $M = p$, satisface condițiile :

$$\frac{d^2M_r}{dx^2} = \frac{dT_r}{dx} = -p,$$

și, prin integrare, se obțin ecuațiile :

$$EI \frac{dv}{dx} = T_r; \quad EIv = M_r. \quad (5.3)$$

Din aceste relații rezultă că :

- unghiul fibrei medii deformate al grinzii reale într-o secțiune oarecare este egal cu forța tăietoare a grinzii reciproce, împărțită prin EI ;
- săgeata grinzii reale într-o secțiune oarecare este egală cu momentul încovoietor al grinzii reciproce, împărțit prin EI .

La aplicarea acestei metode se ține seama de următoarele corespundențe :

— reciproca grinzii simplu rezemate la extremități este tot o grindă simplu rezemată la extremități ;

— reciproca grinzii încăstrate la o extremitate și liberă la cealaltă este o grindă la care reazemul este încăstrat de la prima și corespunde un capăt liber, iar capătul liber de la prima îi corespunde o încăstrare ;

— reciproca grinzii cu două reazeme simple și o consolă este o grindă la care reazemul simplu de la o extremitate rămâne simplu, reazemul simplu intermediar se transformă în articulație, iar extremitatea liberă devine încăstrare ; analog pentru grinda cu două console.

5. Când de-a lungul unei bare momentul încovoietor are mai multe expresii analitice, metoda integrării analitice devine dificilă datorită numărului mare de relații ce trebuie stabilite și numărului mare de constante de integrare ce trebuie determinate. În astfel de cazuri se aplică metoda parametrilor inițiali, în care intervin totdeauna numai două constante de integrare : valorile inițiale (în origine) ale săgeții și unghiului de deformare.

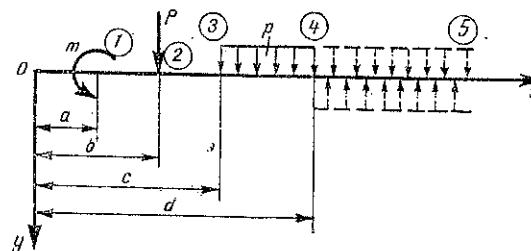


Fig. 5, b

Schema corespunzătoare acestei metode este arătată în figura 5, b. La bara schițată nu se precizează modul de rezemare. Se notează cu a, b, c , distanțele de la origine la punctele unde expresia analitică a momentului încovoietor se schimbă. Pe intervalele de felul 4-5 nu există sarcină

distribuită. Se stabilesc următoarele ecuații de deformații, pe care le comportă aplicarea acestei metode:

$$EI\varphi = EI\varphi_0 \Big|_{01} + m(x-a) \Big|_{12} + P \frac{(x-b)^2}{2} \Big|_{23} + p \frac{(x-c)^3}{6} \Big|_{34} - p \frac{(x-d)^3}{6} \Big|_{45} \quad (5.4)$$

$$EIv = EIv_0 + EI\varphi_0 x \Big|_{01} + m \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{12} + P \frac{(x-b)^3}{6} \Big|_{23} + p \frac{(x-c)^4}{24} \Big|_{34} - p \frac{(x-d)^4}{24} \Big|_{45} \quad (5.5)$$

În aceste ecuații, o linie verticală oarecare, de exemplu, $|_{23}$ arată că ecuația deformației pe intervalul 2-3 este dată de toți termenii care se află în stînga acestui semn.

La scrierea acestor ecuații apar cu semnul plus toți termenii care în secțiunea x dau moment încovoiător negativ și cu semnul minus ceilalți.

Ordinea termenilor în ecuațiile (5.4) și (5.5) corespunde succesiunii sarcinilor de pe bara respectivă.

Constantele de integrare φ_0 și v_0 se stabilesc după modul de rezemare a barei în origine.

6. Pentru barele cu moment de inerție variind în trepte, se aplică metoda celor trei necunoscute¹.

Se consideră bara solicitată prin forțe concentrate, uniform distribuite și cupluri, cu moment de inerție variind în trepte. Se împarte bara în o serie de intervale, determinate fie prin salturi ale momentului de inerție, fie prin discontinuități ale sarcinilor (puncte de aplicare a forțelor concentrate sau cuplurilor, de începere sau de terminare a sarcinilor distribuite).

Se consideră două astfel de intervale succesive, de lungimi l_k și l_{k+1} . Cu notațiile din figura 5, c se stabilește următoarea relație de recurență:

$$-v_{k-1}l_{k+1} + v_k(l_k + l_{k+1}) - v_{k+1}l_k = \frac{l_k l_{k+1}}{6E} [(M_{k-1} + 2M_k)\lambda_k + (M_{k+1} + 2M_k)\lambda_{k+1}] + \frac{l_k l_{k+1}}{24E} (p_{k+1}l_{k+1}^2\lambda_{k+1} + p_k l_k^2\lambda_k) \quad (5.6)$$

¹ Stabilită de prof. dr. ing. M. Blumenfeld de la catedra de Rezistența materialelor, Institutului politehnic—București.

unde s-a notat:

$$\lambda_k = l_k/I_k, \quad \lambda_{k+1} = l_{k+1}/I_{k+1} \quad (5.7)$$

Unghiul de deformație în secțiunea k este dat de relația:

$$\varphi_k = \frac{v_{k+1} - v_k}{l_{k+1}} + \frac{(M_{k+1} + 2M_k)\lambda_{k+1}}{6E} + \frac{p_{k+1}l_{k+1}^2\lambda_{k+1}}{24E} \quad (5.8)$$

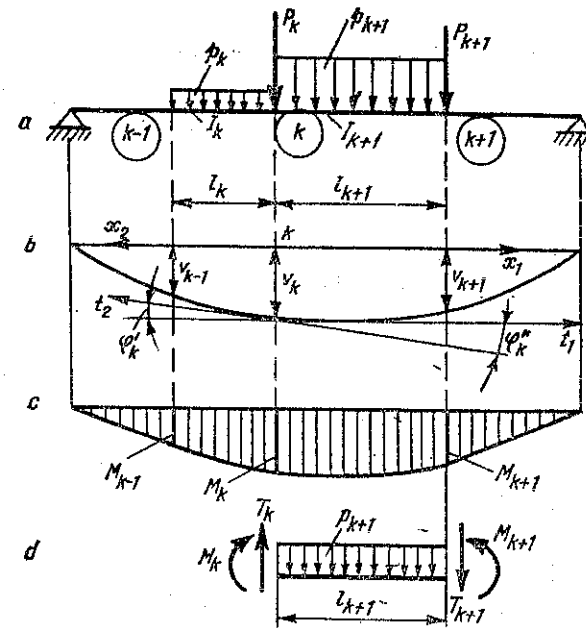


Fig. 5, c

Ecuația (5.6) poartă numele de ecuația celor trei necunoscute. Ea este ecuația de recurență între mărimile v_{k-1} , v_k , v_{k+1} de la extremitățile celor două intervale considerate. Ea se scrie de atâtea ori câte perechi de intervale se pot stabili pe bară.

B. PROBLEME REZOLVATE

5.1. Se dă o grîndă încastrată solicitată cu o sarcină concentrată P și un cuplu $M = Pl$, conform figurii 5.1. Se cere să se determine valoarea săgeții maxime prin următoarele metode:

- a integrării analitice;
- a parametrilor inițiali.

Rezolvare. a) Prin metoda integrării analitice:

$$M_{21} = -P(l-x).$$

$$M_{10} = -P(l-x) + Pl = Px.$$

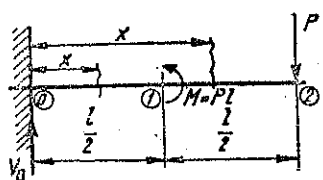


Fig. 5.1

Intervalul 1-2:

$$EI \frac{dv}{dx} = Plx - \frac{Px^2}{2} + C_1, \quad (1)$$

$$EIv = \frac{Plx^2}{2} - \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2. \quad (2)$$

Intervalul 0-1:

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_3, \quad (3)$$

$$EIv = -\frac{Px^3}{6} + C_3x + C_4. \quad (4)$$

Pentru determinarea constantelor de integrare se pun condițiile la limită. În relația (3) pentru $x=0$; $dv/dx=0$; $C_3=0$. În relația (4) pentru $x=0$; $v=0$; $C_4=0$.

Pentru $x=l/2$, săgețile și unghiurile date de cele două perechi de ecuații sînt egale:

$$\frac{Pl^2}{2} - \frac{Pl^2}{8} + C_1 = -\frac{Pl^2}{8}; \text{ din (1) și (3); } C_1 = -\frac{Pl^2}{2}.$$

$$\frac{Pl^3}{8} - \frac{Pl^3}{48} - \frac{Pl^3}{4} + C_2 = \frac{Pl^3}{48}; \text{ din (2) și (4); } C_2 = \frac{Pl^3}{8}.$$

Pe intervalul 1-2, săgeata maximă va avea loc în punctul unde panta tangentei este nulă:

$$EI_z \frac{dv}{dx} = Plx - \frac{Px^2}{2} - \frac{Pl^2}{2} = 0; x=l.$$

Înlocuind în (2), rezultă.

$$EIv_2 = \frac{Pl^3}{2} - \frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^3}{2} + \frac{Pl^3}{8} = -\frac{Pl^3}{24}; v_2 = -\frac{Pl^3}{24EI_z}.$$

Pe intervalul 0-1, valoarea maximă a săgeții este la $x=l/2$:

$$EIv_1 = -\frac{P}{6} \left(\frac{l}{2} \right)^3 = -\frac{Pl^3}{48}; v_1 = -\frac{Pl^3}{48EI_z}.$$

$v_2 > v_1$, săgeata maximă este cea din capătul liber al grinzii.

b) Prin metoda parametrilor inițiali. În punctul 0 apare numai reacțiunea verticală pozitivă $V_0 = P$.

Se aplică formulele (5.4), (5.5) cu $\varphi_0 = 0$ și $v_0 = 0$. Rezultă:

$$EI\varphi = EI \frac{dv}{dx} = -P \frac{x^2}{2} \Big|_{01} + Pl \left(x - \frac{l}{2} \right) \Big|_{12},$$

$$EIv = -\frac{Px^3}{6} \Big|_{01} + Pl \frac{\left(x - \frac{l}{2} \right)^2}{2} \Big|_{12}.$$

Pe intervalul 0-1:

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2}, \quad EIv = -\frac{Px^3}{6}.$$

Pe intervalul 1-2:

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + Pl \left(x - \frac{l}{2} \right) = -\frac{Px^2}{2} + Plx - \frac{Pl^2}{2},$$

$$EIv = -\frac{Px^3}{6} + Pl \frac{\left(x - \frac{l}{2} \right)^2}{2} = -\frac{Px^3}{6} + \frac{Plx^2}{2} - \frac{Pl^2x}{2} + \frac{Pl^3}{8}.$$

Se obțin deci aceleași ecuații ca în prima soluție.

5.2. Să se scrie ecuația fibrei medii deformate pentru grinda din figura 5.2, a, solicitată la capete prin două cupluri, M_1 și M_2 . Să se găsească unghiurile pe reazeme, săgeata la mijlocul grinzii și să se traseze fibra medie deformată.

Rezolvare. Prin metoda integrării analitice:

$$V_1 = \frac{M_2 - M_1}{l}, \quad V_2 = -\frac{M_2 - M_1}{l},$$

$$M = M_1 + V_1x = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l}x.$$

Ecuația fibrei medii deformate:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -M = -M_1 - \frac{M_2 - M_1}{l}x;$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -M_1x - \frac{M_2 - M_1}{l} \frac{x^2}{2} + C_1; \quad (1)$$

$$EIv = -\frac{M_1x^2}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l} \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2. \quad (2)$$

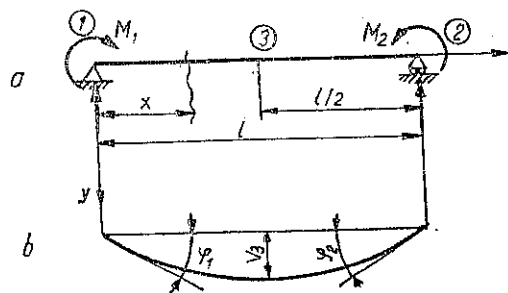


Fig. 5.2

Înlocuind în (1) și (2), se obține:

$$EI \frac{dv}{dx} = -M_1 x - \frac{M_2 - M_1}{l} \frac{x^2}{2} + \frac{l(2M_1 + M_2)}{6}, \quad (3)$$

$$EI v = -M_1 \frac{x^2}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l} \frac{x^3}{6} + \frac{l(2M_1 + M_2)}{6} x; \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=0} = \frac{(2M_1 + M_2)l}{6EI},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=l} = \left[-M_1 l - \frac{M_2 - M_1}{l} \frac{l^2}{2} + \frac{l(2M_1 + M_2)}{6} \right] \frac{1}{EI} = -\frac{(M_1 + 2M_2)l}{6EI}.$$

Săgeata la mijlocul grinzii [$x = l/2$ în (4)]:

$$v_3 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{M_1}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 - \frac{M_2 - M_1}{6l} \left(\frac{l}{2} \right)^3 + \frac{l(2M_1 + M_2)}{6} \cdot \frac{l}{2} \right] = \frac{l^3(M_1 + M_2)}{16EI}. \quad (5)$$

Fibra medie deformată este desenată în figura 5.2, b.

5.3. Să se scrie ecuația fibrei medii deformată pentru grinda din figura 5.3 și să se găsească unghiurile pe reazeme și săgeata în mijlocul grinzii prin:

- 1) metoda parametrilor inițiali;
- 2) metoda grinzii reciproce.

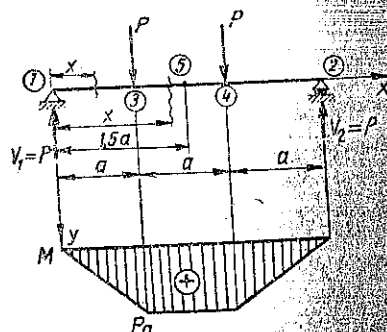


Fig. 5.3

Rezolvare. 1) Prin metoda parametrilor inițiali.

Se aplică formulele (5.4), (5.5) cu $\varphi_0 = \varphi_1$ și $v_0 = v_1 = 0$. Rezultă:

$$EI \varphi = EI \varphi_1 - P \frac{x^2}{2} \Big|_{13} + P \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{34} + P \frac{(x-2a)^2}{2} \Big|_{42} \quad (1)$$

$$EI v = EI \varphi_1 x - P \frac{x^3}{6} \Big|_{13} + P \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_{34} + P \frac{(x-2a)^3}{6} \Big|_{42} \quad (2)$$

Parametrul φ_1 se determină din condiția $v_2 = 0$ pentru $x = 3a$.

$$EI v_2 = 0 = EI \cdot \varphi_1 3a - P \frac{(3a)^3}{6} + P \frac{(2a)^3}{6} + \frac{Pa^3}{6},$$

$$\varphi_1 = \frac{Pa^2}{EI}$$

Înlocuind expresia lui φ_1 în ecuațiile (1) și (2), acestea devin:

$$EI \varphi = Pa^2 - P \frac{x^2}{2} \Big|_{13} + P \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{34} + P \frac{(x-2a)^2}{2} \Big|_{42} \quad (3)$$

$$EI v = Pa^2 x - \frac{Px^3}{6} \Big|_{13} + P \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_{34} + P \frac{(x-2a)^3}{6} \Big|_{42} \quad (4)$$

Pentru $x = 3a$, din relația (3), se obține:

$$EI \varphi_2 = Pa^2 - P \frac{(3a)^2}{2} + \frac{P(2a)^2}{2} + \frac{Pa^2}{2} = -Pa^2; \quad \varphi_2 = -\frac{Pa^2}{EI}.$$

Se vede că la grinda încărcată simetric, unghiurile pe reazeme sunt egale, dar de semne contrare.

Pentru $x = \frac{3}{2}a$, din relația (4), se obține:

$$EI v_5 = Pa^2 \cdot \frac{3}{2}a - P \frac{\left(\frac{3}{2}a\right)^3}{6} + P \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^3}{6} = \frac{23Pa^3}{24}; \quad v_5 = \frac{23Pa^3}{24EI}.$$

2) Prin metoda grinzii reciproce:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot Pa \cdot a + Pa \frac{a}{2} \right) = \frac{Pa^2}{EI},$$

$$v_5 = \frac{1}{EI} \left[Pa^2 \frac{3a}{2} - \frac{1}{2} Pa \cdot a \left(\frac{1}{3}a + \frac{a}{2} \right) - Pa \frac{a}{2} \frac{a}{4} \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{3Pa^3}{2} - \frac{5Pa^3}{12} - \frac{Pa^3}{8} \right] = \frac{23Pa^3}{24EI}.$$

5.4. Să se scrie ecuația fibrei medii deformate la grinda din figura 5.4. Să se calculeze unghiurile din reazeme și săgeata maximă prin metoda integrării analitice și metoda grinzii reciproce.

Rezolvare. a) Prin metoda integrării analitice:

$$M_{13} = V_1 x = \frac{pc}{2} x; \quad M_{35} = V_1 x - \frac{p(x-a)^2}{2} = \frac{pc}{2} x - \frac{p(x-a)^2}{2}.$$

Intervalul 1 - 3:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{pc}{2} x; \quad EI \frac{dv}{dx} = -\frac{pc}{2} \frac{x^2}{2} + C_1, \quad (1)$$

$$EI v = -\frac{pc}{2} \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2. \quad (2)$$

Intervalul 3 - 5:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{pc}{2} x + \frac{p(x-a)^2}{2}; \quad EI \frac{dv}{dx} = -\frac{pc}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{p}{2} \frac{(x-a)^3}{3} + C_3 \quad (3)$$

$$EI v = -\frac{pc}{2} \frac{x^3}{6} + \frac{p}{2} \frac{(x-a)^4}{12} + C_3 x + C_4. \quad (4)$$

Condițiile la limită sînt:

1) Săgeata în reazemul 1 este nulă, deci pentru $x = 0, v = 0$; rezultă $C_2 = 0$.

2) Săgeata este maximă la mijlocul grinzii, deci pentru $x = a + c/2$; $dv/dx = 0$.

$$0 = -\frac{pc}{4} \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{p}{6} \left(\frac{c}{2}\right)^3 + C_3; \quad C_3 = \frac{pc}{4} \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48}.$$

3) Panta tangentei în 3 din ecuația (1) trebuie să fie egală cu cea din ecuația (3)

$$-\frac{pc}{4} \cdot a^2 + C_1 = -\frac{pc}{4} a^2 - \frac{pc^3}{48} + \frac{pc}{4} \left(a + \frac{c}{2}\right)^2,$$

$$C_1 = -\frac{pc^3}{48} + \frac{pc}{4} \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 = C_3.$$

4) Săgeata în punctul 3 din ecuațiile (2) și (4) trebuie să fie aceeași:

$$-\frac{pc}{2} \frac{a^3}{6} + C_1 a = -\frac{pc}{2} \frac{a^3}{6} + C_3 a + C_4; \quad C_4 = 0.$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\left[\frac{pc}{4} x^2 + \frac{pc}{4} \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48} \right] \quad 0 \leq x \leq a. \quad (5)$$

$$EI v = -\frac{pc}{12} x^3 + \left[\frac{pc}{4} \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48} \right] x \quad (6)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{pc}{4} x^2 + \frac{p}{6} (x-a)^3 + \frac{pc}{4} \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48} \quad a \leq x \leq a + \frac{c}{2}, \quad (7)$$

$$EI v = -\frac{pc}{12} x^3 + \frac{p}{24} (x-a)^4 + \left[\frac{pc}{4} \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48} \right] x \quad (8)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{EI} \left[\frac{pc}{4} \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{pc^3}{48} \right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{pca^2}{4} + \frac{pc^2a}{4} + \frac{pc^3}{24} \right).$$

Săgeata maximă se calculează din ecuația (8), înlocuind $x = a + c/2$

$$v_{max} = \frac{1}{EI} \left[\frac{pc}{6} \left(a + \frac{c}{2}\right)^3 - \frac{pc^3}{48} \left(a + \frac{3}{8}c\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{pca^3}{6} + \frac{pc^2a^2}{4} + \frac{5pc^3a}{48} - \frac{5pc^4}{384} \right).$$

b) Prin metoda grinzii reciproce:

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi_1 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{pca}{2} a + \frac{pca}{2} \frac{c}{2} + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{3} \left(\frac{pca}{2} + \frac{pc^2}{8} - \frac{pca}{2} \right) \frac{c}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{pca^2}{4} + \frac{pc^2a}{4} + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{3} \cdot \frac{pc^2}{8} \frac{c}{2} \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{pca^2}{4} + \right. \\ &+ \left. \frac{pc^2a}{4} + \frac{pc^3}{24} \right] \end{aligned}$$

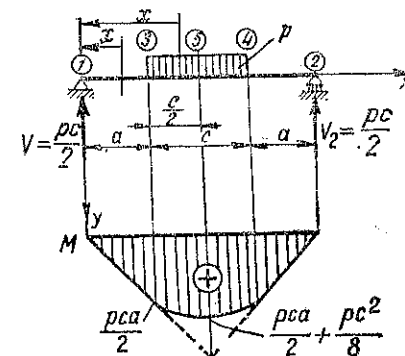


Fig. 5.4

$$v_{max} = v_s = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{pca^2}{4} + \frac{pc^2a}{4} + \frac{pc^3}{24} \right) \left(a + \frac{c}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{pca}{2} a \left(\frac{a}{3} + \frac{c}{2} \right) - \frac{pca}{2} \frac{c}{2} \frac{c}{4} - \frac{2}{3} \frac{pc^2}{8} \frac{c}{2} \frac{3}{8} \frac{c}{2} \right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{pca^3}{6} + \frac{pc^2a^2}{4} + \frac{5pc^3a}{48} - \frac{5pc^4}{384} \right).$$

5.5. Să se calculeze săgeata maximă și să se deseneze fibra medie deformată pentru grinda din figura 5.5, a.

Rezolvare. Se aplică metoda grinzii reciproce.

În figura 5.5, b este prezentată grinda reciprocă.

Variația forței tăietoare în lungul axei grinzii reciproce, redată în figura 5.5, c, dă, conform relației (5.3), variația unghiului fibrei medii deformată al grinzii reale.

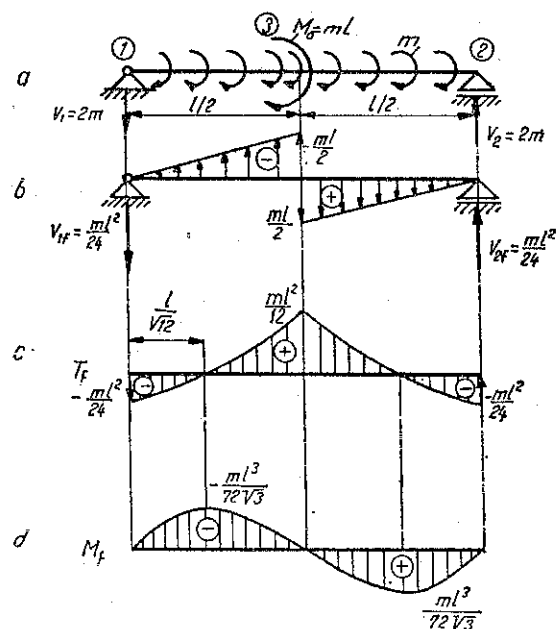


Fig. 5.5

În figura 5.5, d este prezentată variația momentului încovoietor în lungul grinzii reciproce, care, conform relației (5.3), dă variația săgeții grinzii reale, deci reprezintă și fibra medie deformată.

Din figura 5.5, d rezultă:

$$v_{max} = \frac{ml^3}{72\sqrt{3}EI}$$

5.6. Să se calculeze unghiul fibrei medii deformată și săgeata în punctele 1 și 2 la grinda din figura 5.6, a.

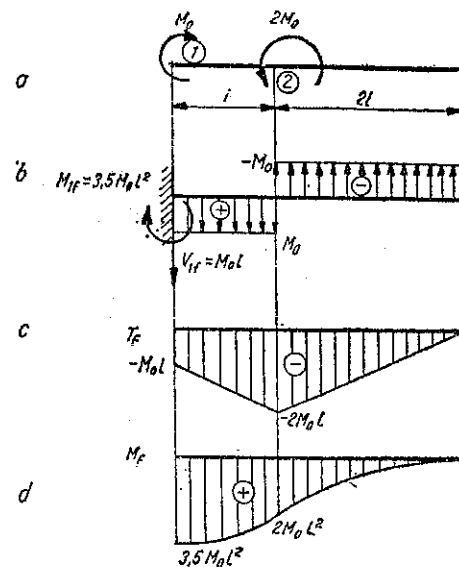


Fig. 5.6

Rezolvare. Se aplică metoda grinzii reciproce. Grinda reciprocă este reprezentată în figura 5.6, b. Din figura 5.6, c rezultă:

$$\varphi_1 = -\frac{M_0 l}{EI}; \quad \varphi_2 = -\frac{2M_0 l}{EI}.$$

Din figura 5.6, d rezultă:

$$v_1 = \frac{3.5 M_0 l^2}{EI}; \quad v_2 = \frac{2M_0 l^2}{EI}.$$

5.7. Să se calculeze unghiul fibrei medii deformată în punctele 2 și 3 și săgeata în punctul 4, la grinda din figura 5.7, articulată în punctul 2.

Rezolvare. Se aplică metoda parametrilor inițiali:

$$\varphi_1 = 0; \quad v_1 = 0.$$

Reacțiunile se determină separînd bara în articulație :

$$V_2 = V_3 = \frac{pl}{2}; \quad V_1 = \frac{pl}{2}; \quad M_1 = -\frac{pl^2}{2}$$

$$EI\varphi = \frac{pl^2}{2}x - \frac{pl}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{12} - EI\alpha_2 + p \frac{(x-l)^3}{6} \Big|_{23}$$

$$EIv = \frac{pl^2x^2}{4} - \frac{plx^3}{12} \Big|_{12} - EI\alpha_2(x-l) + p \frac{(x-l)^4}{24} \Big|_{23}$$

În secțiunea 2 s-a introdus un salt de pantă (variație a unghiului tangentei la fibra medie deformată) considerat negativ. Valoarea acestui salt se determină scriind că pe reazemul 3 săgeata este nulă, pentru $x = 2l$:

$$0 = \frac{pl^2}{4} \cdot 4l^2 - \frac{pl}{12} \cdot 8l^3 - EI\alpha_2 l + p \frac{l^4}{24}$$

$$EI\alpha_2 l = pl^4 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{24} \right) = \frac{3pl^4}{8}; \quad \alpha_2 = \frac{3pl^3}{8EI}$$

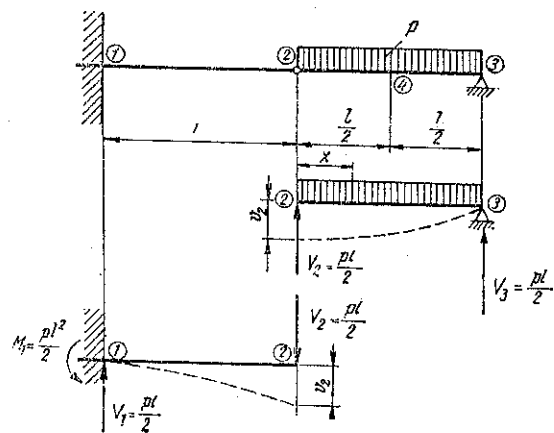


Fig. 5.7

Pe 1 — 2:

$$EI\varphi = -\frac{plx^2}{4} + \frac{pl^2x}{2}; \quad EIv = -\frac{plx^3}{12} + \frac{pl^2x^2}{4}$$

Pe 2 — 3:

$$EI\varphi = -\frac{plx^2}{4} + \frac{pl^2x}{2} - \frac{3pl^3}{8} + p \frac{(x-l)^3}{6}$$

$$EIv = -\frac{plx^3}{12} + \frac{pl^2x^2}{4} - \frac{3pl^3}{8}(x-l) + p \frac{(x-l)^4}{24}$$

$$EIv_2 = -\frac{pl^4}{12} + \frac{pl^4}{4} = \frac{pl^4}{6}$$

$$EIv_3 = -\frac{pl}{12} \frac{27l^3}{8} + \frac{pl^2}{4} \frac{9l^2}{4} - \frac{3pl^3}{8} \frac{l}{2} +$$

$$+ \frac{p}{24} \frac{l^4}{16} = pl^4 \left(-\frac{9}{32} + \frac{9}{16} - \frac{3}{16} + \frac{1}{384} \right) = \frac{37pl^4}{384}$$

$$EI\varphi_2 = -\frac{pl}{4} l^2 + \frac{pl^2}{2} l - \frac{3pl^3}{8} = pl^3 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \right) = -\frac{pl^3}{8}$$

$$EI\varphi_3 = -\frac{pl}{4} 4l^2 + \frac{pl^2}{2} 2l - \frac{3pl^3}{8} + \frac{pl^3}{6} = pl^3 \left[-1 + 1 - \frac{3}{8} + \frac{1}{6} \right] = -\frac{5pl^3}{24}$$

5.8. Să se determine ecuația fibrei medii deformate a unei grinzi simplu rezemate, încărcată cu o sarcină distribuită sinusoidal, așa cum se arată în figura 5.8.

Rezolvare. Într-o secțiune de abscisă x , $p_x = p_0 \sin \alpha x$; α se determină prin condiția: pentru $x = l$, $p_x = 0$; $p_0 \sin \alpha l = 0$, $\alpha l = 0, \pi, 2\pi$ etc. Pentru cazul din figura 5.8 corespunde valoarea $\alpha l = \pi$, deci $\alpha = \pi/l$:

$$p_x = p_0 \sin \frac{\pi x}{l}$$

Între săgeata v și sarcina p_x există relația:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{p_x}{EI}; \quad \frac{d^4v}{dx^4} = \frac{p_0}{EI} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Integrînd de patru ori:

$$v = \frac{p_0 l^4}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{l} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

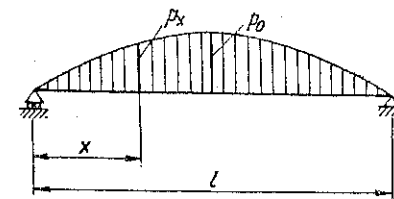


Fig. 5.8

Condițiile la limită: $v = 0$ pentru $x = 0$ și $x = l$ și $v'' = 0$ pentru $x = 0$ și $x = l$ (pe reazeme, momentele încovoietoare fiind nule, fibra medie deformată are puncte de inflexiune).

$$C_4 = 0; C_1 l^3 + C_2 l^2 + C_3 l + C_4 = 0; C_2 = 0; 6C_1 l + 2C_2 = 0.$$

$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Ecuația fibrei medii deformată:

$$v = \frac{P_0 l^4}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

5.9. Să se calculeze săgeata în secțiunea 3, la grinda încastrată din figura 5.9, dacă momentele de inerție pe cele două intervale sunt I_1 și I_2 .

Rezolvare. Integrarea ecuației fibrei medii deformată se face separat pe cele două intervale.

$$M_{23} = -P(l - x); M_{12} = -P(l - x).$$

Intervalul 1 - 2:

$$EI_1 \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_{12} = P(l - x),$$

$$EI_1 \frac{dv}{dx} = P \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1, \quad (1)$$

$$EI_1 v = P \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2. \quad (2)$$

Intervalul 2 - 3:

$$EI_2 \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_{23} = P(l - x),$$

$$EI_2 \frac{dv}{dx} = P \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_3, \quad (3)$$

$$EI_2 v = P \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_3 x + C_4. \quad (4)$$

Condițiile la limită:

1) $x = 0, v = 0$; din expresia (2) rezultă: $C_2 = 0$,

2) $x = 0, dv/dx = 0$; din relația (1) se obține: $C_1 = 0$,

3) unghiul tangentei la fibra medie în 2, pentru $x = a$, din relațiile (1) și (3), este același:

$$\frac{P}{EI_1} \left(la - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{P}{EI_2} \left(la - \frac{a^2}{2} \right) + \frac{C_3}{EI_2}, \quad C_3 = Pa \left(l - \frac{a}{2} \right) \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right).$$

4) În 2, săgețile date de ecuațiile (2) și (4) sunt egale:

$$\frac{P}{EI_1} \left(\frac{la^2}{2} - \frac{a^3}{6} \right) = \frac{P}{EI_2} \left(\frac{la^2}{2} - \frac{a^3}{6} \right) + \frac{Pa}{EI_2} \left(l - \frac{a}{2} \right) \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) a + \frac{C_4}{EI_2}.$$

$$C_4 = -Pa^2 \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{3} \right).$$

Ecuația (4) devine:

$$EI_2 v = P \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + Pa \left(l - \frac{a}{2} \right) \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) x - Pa^2 \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{3} \right).$$

Făcând $x = l$ în această ecuație, se obține săgeata la capătul liber:

$$v_3 = \frac{Pl^3}{3EI_2} + \frac{Pa}{EI_2} \left(\frac{I_2}{I_1} - 1 \right) \left(l^2 - al + \frac{a^2}{3} \right).$$

5.10. Să se calculeze săgeata maximă f și raza de curbura ρ a arcului de cerc dintre reazeme, la grinda cu secțiune circulară din figura 5.10.

Aplicație numerică: $P = 70 \text{ kN}$, $a = 300 \text{ mm}$, $l = 1500 \text{ mm}$, $d = 200 \text{ mm}$.

Rezolvare. Între reazeme, grinda are moment încovoietor constant, deci se deformează după un arc a cărui rază se obține din relația (5.2):

$$\rho = \frac{EI_2}{M}; \quad M = Pa = 7000 \cdot 30 = 210000 \text{ daNcm},$$

$$I_2 = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 20^4}{64} = 7854 \text{ cm}^4.$$

$$\rho = \frac{EI_2}{M} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 7854}{210000} = 78540 \text{ cm} = 785,4 \text{ m}.$$

Efortul unitar de încovoiere maxim în grindă:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{M}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{210000 \cdot 32}{\pi \cdot 20^3} = 268 \text{ daN/cm}^2.$$

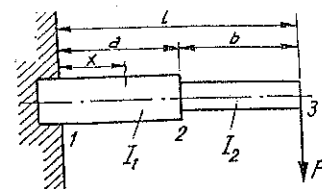


Fig. 5.9

Pentru calculul săgeții maxime f , se scrie relația :

$$1A^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 = f(2\rho - f),$$

f fiind neglijabilă față de 2ρ ,

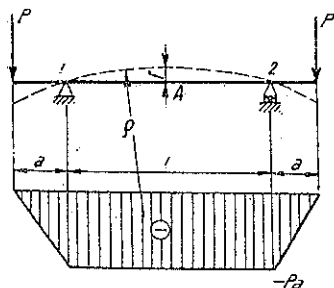


Fig. 5.10

$$f = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\rho} = \frac{l^2}{8\rho} = \frac{1,5^2}{8 \cdot 785} = 0,000358 \text{ m} = 0,358 \text{ mm}.$$

Utilizând relația (5.2) :

$$v = \frac{l^2}{8\rho}$$

Grinda studiată este osia unui vagon de cale ferată.

Observație: La același rezultat se ajunge și pe calea integrării ecuației diferențiale a fibrei medii deformate. Porțiunea dintre reazeme poate fi asimilată cu grinda de la problema 5.2, unde $M_1 = M_2 = M$:

$$v = \frac{2l^2 M}{16EI} = \frac{l^2 M}{8EI}$$

5.11. Pentru grinda de oțel I 10 din figura 5.11 se cere să se calculeze săgeata maximă. Se dă : $P = 1000 \text{ daN}$, $a = 50 \text{ cm}$.

Rezolvare. Se aplică metoda parametrilor inițiali.

$$EI\varphi = EI\varphi_0 + 2P\frac{x^2}{2}\Big|_{01} - 2,5P\frac{(x-2a)^2}{2}\Big|_{12} + P\frac{(x-5a)^2}{2}\Big|_{23} - 3,5P\frac{(x-6a)^2}{2}\Big|_{34} \quad (1)$$

$$EIv = EI\varphi_0 x + EIv_0 + 2P\frac{x^3}{6}\Big|_{01} - 2,5P\frac{(x-2a)^3}{6}\Big|_{12} + P\frac{(x-5a)^3}{6}\Big|_{23} - 3,5P\frac{(x-6a)^3}{6}\Big|_{34} \quad (2)$$

Condițiile la limită sînt :

$$x = 2a; \quad v_1 = 0;$$

$$x = 6a; \quad v_3 = 0.$$

$$\begin{cases} EI\varphi_0 2a + EIv_0 + 2P\frac{(2a)^3}{6} = 0, \\ EI\varphi_0 6a + EIv_0 + 2P\frac{(6a)^3}{6} - 2,5P\frac{(4a)^3}{6} + \frac{Pa^3}{6} = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} EI\varphi_0 2a + EIv_0 + P\frac{16a^3}{6} = 0, \\ EI\varphi_0 6a + EIv_0 + P\frac{273a^3}{6} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Din rezolvarea sistemului (3), rezultă :

$$\varphi_0 = -\frac{257Pa^2}{24EI}; \quad v_0 = \frac{225Pa^3}{12EI} \quad (4)$$

Înlocuind expresia lui φ_0 și v_0 în ecuațiile (1) și (2) se obține :

$$EI\varphi = -\frac{257Pa^2}{24} + 2P\frac{x^2}{2}\Big|_{01} - 2,5P\frac{(x-2a)^2}{2}\Big|_{12} + P\frac{(x-5a)^2}{2}\Big|_{23} - 3,5P\frac{(x-6a)^2}{2}\Big|_{34}$$

$$EIv = -\frac{257Pa^2}{24}x + \frac{225Pa^3}{12} + 2P\frac{x^3}{6}\Big|_{01} - 2,5P\frac{(x-2a)^3}{6}\Big|_{12} + P\frac{(x-5a)^3}{6}\Big|_{23} - 3,5P\frac{(x-6a)^3}{6}\Big|_{34}$$

Săgeata este maximă în secțiunea unde $\varphi = 0$. Anulînd expresia lui φ se obține :

$$0 = P\left[-\frac{257}{24}a^2 + x^2 - \frac{2,5}{2}(x-2a)^2 + \frac{1}{2}(x-5a)^2 - \frac{3,5}{2}(x-6a)^2\right],$$

$$1,5x^2 - 21ax + 66,2a^2 = 0,$$

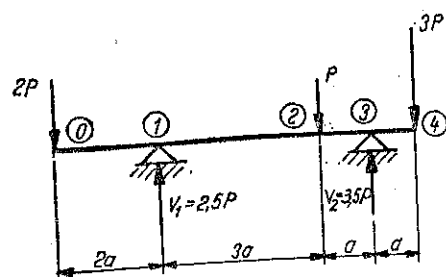


Fig. 5.11

Din anexa 9, pentru profilul I 10, $I_x = 171 \text{ cm}^4$.

$$v_{\max} = -\frac{118,4}{24} \frac{Pa^3}{EI} = -\frac{118,4}{24} \frac{1000 \cdot 50^3}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 171} = -1,717 \text{ cm}.$$

5.12. Să se determine x (fiind cunoscute L și p) pentru grinda din figura 5.12 ca:

- a) săgeata în jos să fie maximă; b) săgeata în jos să fie minimă; c) săgeata în sus să fie maximă.

Rezolvare. Datorită simetriei grinzii, valori extreme ale săgeților au loc în secțiunile A sau B. Calculul săgeților v_A și v_B se face cu metoda parametrilor inițiali (ecuația 5.5). Originea sistemului este considerată în secțiunea A, iar parametrii inițiali φ_A și v_A se determină din condițiile:

$$EIv_1 = EIv_A + EI\varphi_A \frac{L-x}{2} +$$

$$+ p \frac{\left(\frac{L-x}{2}\right)^4}{24} = 0$$

$$EI\varphi_B = EI\varphi_A + p \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{6} -$$

$$- \frac{pL}{2} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = 0. \quad (2)$$

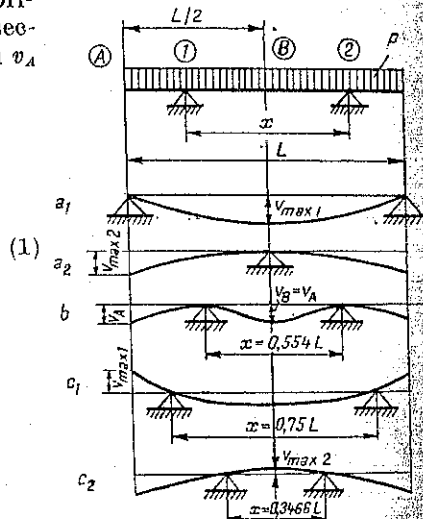


Fig. 5.12

Se obține:

$$EI\varphi_A = \frac{pLx^2}{16} - \frac{pL^3}{48} \quad (3)$$

$$EIv_A = \frac{pLx^3}{24} - \frac{3pL^2x^2}{64} + \frac{pL^4}{128} \quad (4)$$

$$EIv_B = -\frac{px^4}{384} + \frac{pLx^3}{32} - \frac{pL^2x^2}{64} \quad (5)$$

Săgeata în jos este maximă în unul din următoarele cazuri limită:
a₁) reazemele 1 și 2 se află la extremitățile grinzii (Fig. 5.12, a₁, $x = L$):

$$v_{\max_1} = v_B = \frac{5pL^4}{384EI} \quad (6)$$

a₂) reazemele 1 și 2 se suprapun pe mijlocul grinzii (Fig. 5.12, a₂, $x = 0$):

$$v_{\max_2} = v_A = \frac{3pL^4}{384EI} \quad (7)$$

Comparind valorile (6) și (7) rezultă:

$$v_{\max} = \frac{5pL^4}{384EI}$$

deci condiția este: $x = L$.

b) Săgeata în jos are valoarea minimă dacă este îndeplinită condiția (Fig. 5.12, b):

$$v_A = v_B. \quad (8)$$

Înlocuind expresiile (4) și (5) în relația (8) și notind $\frac{x}{L} = \alpha$, se obține ecuația:

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 0,75 = 0 \quad (9)$$

a cărei soluție reală, obținută prin încercări, este:

$$\alpha = 0,554.$$

Se obține, deci, $x = 0,554 L$.

c) Săgeata în sus maximă se poate realiza fie în secțiunea A (Fig. 5.12, c₁), fie în secțiunea B (Fig. 5.12, c₂).

c₁) Săgeata v_A ca funcție de x are o valoare extremă dacă este îndeplinită condiția:

$$\frac{dv_A}{dx} = \frac{1}{EI} \left(p \frac{Lx^2}{8} - \frac{3pL^2x}{32} \right) = 0. \quad (10)$$

Ecuția are două rădăcini:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0,75 L.$$

Prima rădăcină corespunde cazului a_2 prezentat anterior; a doua rădăcină, înlocuită în expresia (4), dă:

$$v_{max.} = -\frac{1}{1024} \frac{pL^4}{EI} = -9,766 \cdot 10^{-4} \frac{pL^4}{EI}. \quad (11)$$

c₂) Săgeata v_B ca funcție de x are o valoare extremă dacă este îndeplinită condiția:

$$\frac{dv_B}{dx} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{px^3}{96} + \frac{3pLx^2}{32} - \frac{pL^2x}{32} \right) = 0. \quad (12)$$

Ecuția are trei rădăcini:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0,3466 L; \quad x_3 = 8,653 L.$$

Rădăcina x_3 nu satisface condiția problemei $x \leq L$; pentru $x = x_2$, săgeata v_B este nulă și pentru $x = x_1$, săgeata v_B are valoarea:

$$v_{max.} = -6,134 \cdot 10^{-4} \frac{pL^4}{EI}. \quad (13)$$

Comparând valorile (11) și (13) se constată că săgeata maximă în sus se realizează în secțiunea A, pentru $x = 0,75 L$.

5.13. La grinda din figura 5.13, să se stabilească relația dintre sarcina p și cuplul M_0 astfel ca săgeata în punctul 4 să fie nulă:

$$\text{Rezolvare. } V_1 = 1,5 pl - 0,5 \frac{M_0}{l}; \quad V_3 = 0,5 \frac{M_0}{l} - 0,5 pl.$$

Se aplică metoda parametrilor inițiali

$$EIv = EI\varphi_1 x + EIv_1 - \left(1,5 pl - \frac{0,5 M_0}{l} \right) \frac{x^3}{6} + \frac{px^4}{24} \Big|_{12} + \\ + \frac{pl(x-l)^3}{6} - \frac{p(x-l)^4}{24} \Big|_{23} - \left(\frac{0,5 M_0}{l} - 0,5 pl \right) \frac{(x-2l)^3}{6} - \frac{p(x-2l)^4}{24} \Big|_{34}. \quad (1)$$

Condițiile la limită sînt: în punctele 1 și 3 săgețile sînt nule

$$v_1 = 0; \quad v_3 = 0,$$

$$EIv_3 = EI\varphi_1 2l - \left(1,5 pl - \frac{0,5 M_0}{l} \right) \frac{(2l)^3}{6} + \frac{p(2l)^4}{24} + \\ + pl \frac{l^3}{6} - \frac{pl^4}{24} = 0,$$

de unde:

$$EI\varphi_1 = \frac{29}{48} pl^3 - \frac{M_0 l}{3}. \quad (2)$$

Pentru $x = 3l$, din ecuația (1) se obține:

$$EIv_4 = \left(\frac{29 pl^3}{48} - \frac{M_0 l}{3} \right) 3l - \left(1,5 pl - \frac{0,5 M_0}{l} \right) \frac{(3l)^3}{6} + p \frac{(3l)^4}{24} + \\ + pl \frac{(2l)^3}{6} - p \frac{(2l)^4}{24} - \left(\frac{0,5 M_0}{l} - 0,5 pl \right) \frac{l^3}{6} - \frac{pl^4}{24} = \frac{7 M_0 l^2}{6} - \frac{41 pl^4}{48}.$$

Din condiția $v_4 = 0$, rezultă: $M_0 = \frac{41}{56} pl^2$.

5.14. Pentru grinda cu încărcările și dimensiunile din figura 5.14, se cere să se scrie expresiile deformației unghiulare și săgeții în general și să se calculeze valorile lor la mijlocul deschiderii dintre reazeme.

Rezolvare. Se aplică metoda parametrilor inițiali.

$$V_1 = \frac{11}{4} qa;$$

$$EI\varphi = EI\varphi_0 + q \frac{x^3}{6} \Big|_{01} - \frac{11}{4} qa \frac{(x-a)^2}{2} - q \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_{12} + 4qa \frac{(x-2a)^2}{2} \Big|_{23},$$

$$EIv = EIv_0 + EI\varphi_0 x +$$

$$+ q \frac{x^4}{24} \Big|_{01} - \frac{11}{4} qa \frac{(x-a)^3}{6} - \\ - q \frac{(x-a)^4}{24} \Big|_{12} + 4qa \frac{(x-2a)^3}{6} \Big|_{23}.$$

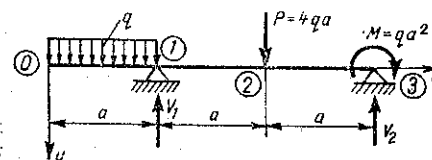


Fig. 5.14

Constantele φ_0 , v_0 se determină prin ecuațiile de condiții la limită: în 1 și 3 săgețile sînt nule:

$$EIv_1 = EIv_0 + EI\varphi_0 a + q \frac{a^4}{24} = 0;$$

$$EIv_3 = EIv_0 + EI\varphi_0 \cdot 3a + q \frac{81}{24} a^4 - \frac{11}{4} qa \cdot \frac{8a^3}{6} - q \frac{16a^4}{24} + 4qa \cdot \frac{a^3}{6} = 0;$$

de unde:

$$EIv_0 + EIa\varphi_0 = -\frac{qa^4}{24};$$

$$EIv_0 + 3EIa\varphi_0 = \frac{7qa^4}{24}.$$

De aici:

$$\varphi_0 = \frac{qa^3}{6EI}, \quad v_0 = -\frac{5qa^4}{24EI}.$$

$$\begin{aligned} EIv_2 &= -\frac{5qa^4}{24} + \frac{qa^3}{6} 2a + \frac{q16a^4}{24} - \frac{11}{4} qa \cdot \frac{a^3}{6} - \frac{q}{24} \cdot a^4 = \\ &= \frac{qa^4}{24} (-5 + 8 + 16 - 11 - 1) = \frac{7qa^4}{24}, \end{aligned}$$

$$v_2 = \frac{7qa^4}{24EI}.$$

5.15. Să se calculeze săgeata maximă a unei grinzi de lemn, cu secțiunea dreptunghiulară, simplu rezemată la capete, încărcată cu o sarcină uniform repartizată $p = 400 \text{ daN/m}$, avînd deschiderea $l = 5 \text{ m}$, dimensionată cu $\sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Dimensionarea grinzii:

$$W_{\text{rec}} = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{pl^2}{8\sigma_a} = \frac{4 \cdot 500^2}{8 \cdot 100} = 1250 \text{ cm}^3 = \frac{bh^2}{6}$$

Cu $h/b = 1,5$:

$$\frac{b \cdot 2,25b^2}{6} = 1250; \quad b = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1250}{2,25}} = 14,95 \text{ cm}.$$

Se aleg dimensiunile:

$$b = 15 \text{ cm și } h = 23 \text{ cm}; \quad I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{15 \cdot 23^3}{12} = 15200 \text{ cm}^4.$$

Săgeata maximă:

$$f = \frac{5pl^4}{384EI_z} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 500^4}{384 \cdot 10^5 \cdot 15200} = 2,14 \text{ cm}.$$

Față de deschiderea grinzii:

$$f = 2,14 \approx \frac{500}{235} \approx \frac{l}{235}.$$

5.16. Să se calculeze eforturile unitare care se produc în grinda din figura 5.16, a, dacă reazemul intermediar este denivelat față de reazemele extreme cu $\delta = 2 \text{ mm}$. Grinda este din oțel, de secțiune circulară, cu $d = 10 \text{ cm}$.

Rezolvare. Reazemul 2 fiind denivelat, grinda se sprijină numai pe reazemele extreme 1 și 3. Pentru a realiza fixarea grinzii și în punctul 2, se aplică o forță P (Fig. 5.16, b) capabilă să producă o deplasare egală cu δ .

Pentru bara 1—3, simplu rezemată la capete, încărcată cu o sarcină concentrată la mijloc, deplasarea pe verticală a secțiunii 2 este:

$$\delta = \frac{P(2l)^3}{48EI}; \quad P = \frac{6\delta EI}{l^3}.$$

$$M_{\text{max}} = M_2 = \frac{Pl}{2} = \frac{3\delta EI}{l^2},$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W} = \frac{3\delta EI}{l^2 W} =$$

$$= \frac{3\delta E \frac{\pi d^4}{64}}{l^2 \frac{\pi d^3}{32}} =$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{3\delta Ed}{2l^2} = \frac{3 \cdot 0,2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10}{2(100)^2} = 630 \text{ daN/cm}^2.$$

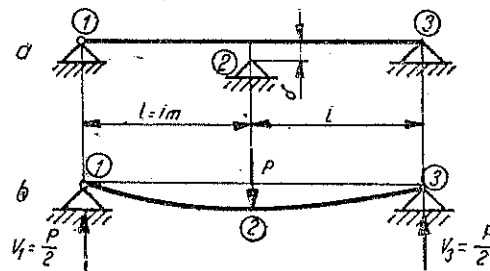


Fig. 5.16

5.17. O țevă de oțel, cu diametrul exterior $D = 60 \text{ mm}$ și cu diametrul interior $d = 51 \text{ mm}$, este încastrată la un capăt și liberă la celălalt, și prin ea curge apă. Să se determine lungimea l a țevii, astfel încât să nu se depășească rezistența admisibilă $\sigma_a = 800 \text{ daN/cm}^2$ și să se afle săgeata f în capătul liber. Se dă $\gamma_{\text{ot}} = 7,8 \text{ daN/dm}^3$, $\gamma_{\text{ap}} = 1 \text{ daN/dm}^3$.

Rezolvare. Sarcina p , datorită greutateii proprii a țevii și a apei din interiorul ei:

$$p = p_1 + p_2,$$

$$p_1 = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \cdot 1 \cdot \gamma_{ol} = \frac{\pi}{4} (6^2 - 5,1^2) \cdot \frac{7,8}{1\,000} = 6,11 \cdot 10^{-2} \text{ daN/cm},$$

$$p_2 = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot 1 \cdot \gamma_{apa} = \frac{\pi}{4} \cdot 5,1^2 \cdot \frac{1}{1\,000} = 2,04 \cdot 10^{-2} \text{ daN/cm},$$

$$p = p_1 + p_2 = 6,11 \cdot 10^{-2} + 2,04 \cdot 10^{-2} = 8,15 \cdot 10^{-2} \text{ daN/cm},$$

$$W_{ef} = \frac{I}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi (6^4 - 5,1^4)}{32 \cdot 6} = 10,13 \text{ cm}^3.$$

Momentul încovoietor maxim:

$$M_t = W_{ef} \sigma_a = 10,13 \cdot 800 = 8\,104 \text{ daNcm},$$

$$M_t = \frac{p l^2}{2} = \frac{8,15 \cdot 10^{-2} l^2}{2} = 4,075 \cdot 10^{-2} l^2$$

Egalind cele două expresii:

$$M_t = 8\,104 = 4,075 \cdot 10^{-2} l^2; \quad l^2 = \frac{8\,104 \cdot 10^2}{4,075} = 199\,000 \text{ cm}^2;$$

$$l = 446 \text{ cm}.$$

Săgeata maximă este:

$$f = \frac{p l^4}{8EI}; \quad I = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi (6^4 - 5,1^4)}{64} = 30,4 \text{ cm}^4,$$

$$f = \frac{8,15 \cdot 10^{-2} \cdot 446^4}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 30,4} = 6,32 \text{ cm}.$$

5.18. Să se dimensioneze o grindă dintr-un profil I, ca în figura 5.18, de lungime $l = 4 \text{ m}$, încărcată cu o sarcină concentrată $P = 500 \text{ daN}$, astfel încât săgeata în capătul liber să fie $f = \frac{1}{200} l$.

$$\text{Rezolvare. } f = \frac{l}{200} = \frac{400}{200} = 2 \text{ cm};$$

$$f = \frac{P l^3}{3EI};$$

$$I_z = \frac{P l^3}{3E f} = \frac{500 \cdot 400^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 2} = 2\,540 \text{ cm}^4.$$

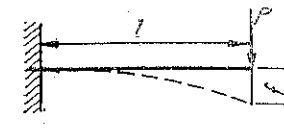


Fig. 5.18

Din anexa 9 se alege un profil I 22 care are $I_z = 3\,060 \text{ cm}^4$ și $W_z = 278 \text{ cm}^3$. Efortul unitar în secțiunea din încăstrare este:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{500 \cdot 400}{278} = 720 \text{ daN/cm}^2.$$

5.19. O grindă simplu rezemată la capete, de deschidere $l = 7,5 \text{ m}$, este încărcată la mijloc cu o forță $P = 10 \text{ kN}$ (Fig. 5.19). Dacă se ia rezistența admisibilă $\sigma_a = 1\,200 \text{ daN/cm}^2$, să se dimensioneze grinda din profil I și din oțel rotund. Să se scrie apoi raportul săgeților obținute în cele două cazuri.

Rezolvare. Dimensionarea grinzii:

$$W_{nec} = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{P \frac{l}{4}}{\sigma_a} = \frac{1\,000 \cdot 750}{4 \cdot 1\,200} = 156,25 \text{ cm}^3.$$

În prima alternativă se alege din anexa 9 un profil I 18, avind $W_z = 161 \text{ cm}^3$ și $I_z = 1\,450 \text{ cm}^4$.

Pentru secțiunea circulară,

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = 156,25 \text{ cm}^3; \quad d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 156,25}{\pi}} = 11,66 \approx 12 \text{ cm};$$

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 12^4}{64} = 1\,018 \text{ cm}^4.$$

Săgeata:

$$f = \frac{P l^3}{48EI_z}$$

Prin trecerea de la o soluție la alta:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{I_{z1}}{I_{z2}} = \frac{1\,450}{1\,018} = 1,43.$$

Secțiunea circulară dă o săgeată mai mare decât profilul I.

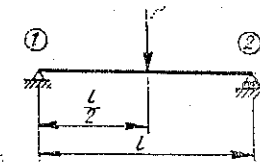


Fig. 5.19

5.20. Bara încastrată 1, 2, 3 din figura 5.20 se așază, în timpul deformăției, pe un cilindru cu raza ρ . Dacă partea 1-2 este aplicată pe cilindru iar partea 2-3, de lungime x , este liberă, se cere săgeata în capătul liber 3, precum și lungimea liberă x .

Aplicație numerică: $E = 10^5 \text{ daN/cm}^2$; $I = 45\,000 \text{ cm}^4$; $P = 1\,500 \text{ daN}$; $l = 2 \text{ m}$; $\rho = 500 \text{ m}$.

Rezolvare. Între momentul încovoietor M din secțiunea x și raza ρ a cilindrului trebuie să existe relația (5.2):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{Px}{EI},$$

$$x = \frac{EI}{P\rho} \quad (1)$$

Lungimea suprapusă pe cilindru:

$$s = l - x = l - \frac{EI}{P\rho}$$

Săgeata din punctul 3 se compune din:

- săgeata $v_2 = \rho(1 - \cos \varphi_2)$;
- săgeata datorită rotirii secțiunii 2 cu unghiul φ_2 ;
- săgeata datorită aplicării forței P pe porțiunea de grindă de lungime x . Deoarece secțiunea 3 s-a rotit față de cea inițială, forța care intră în calcul este proiecția $P \cos \varphi_2$, a forței P pe perpendiculara pe grindă. Săgeata astfel obținută este:

$$v'_3 = \frac{x^3 P \cos \varphi_2}{3EI}$$

Această săgeată este măsurată față de secțiunea rotită; pentru a măsura săgeata față de axele inițiale, ea trebuie proiectată pe verticală.

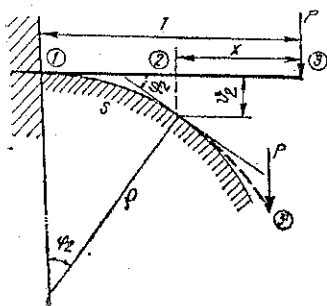
$$v''_3 = v'_3 \cos \varphi_2 = \frac{x^3 P \cos^2 \varphi_2}{3EI}$$

Săgeata totală în punctul 3 este:

$$v_3 = v_2 + x \sin \varphi_2 + v''_3,$$

$$v_3 = \rho(1 - \cos \varphi_2) + x \sin \varphi_2 + \frac{x^3 P \cos^2 \varphi_2}{3EI} \quad (2)$$

Fig. 5.20



Aplicație numerică:

$$x = \frac{EI}{P\rho} = \frac{10^5 \cdot 45\,000}{1\,500 \cdot 50\,000} = 60 \text{ cm}; \quad \rho \sin \varphi_2 = l - x,$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{l - x}{\rho} = \frac{255 - 60}{50\,000} = 0,0028.$$

Unghiul φ_2 fiind foarte mic, rezultă:

$$\cos \varphi_2 \approx 1.$$

Săgeata maximă este dată de formula (2):

$$v_3 = \rho(1 - 1) + 60 \cdot 0,0028 + \frac{60^3 \cdot 1\,500 \cdot 1^2}{3 \cdot 10^5 \cdot 45\,000} = 0,192 \text{ cm}.$$

5.21. O bară de secțiune dreptunghiulară, de lățime și grosime constantă, este așezată pe un plan rigid. O porțiune de lungime a se găsește în consolă. Bara se deformează așa cum se arată în figura 5.21, a. Se cere să se determine lungimea l a porțiunii în care nu mai există contact între bară și planul rigid.

Rezolvare. Fibra medie a barei trebuie să aibă în A tangenta orizontală. Bara se comportă ca o grindă cu consolă, rezemată în A și B (Fig. 5.21, b) la care se cere îndeplinită această condiție.

Reacțiunea în A este:

$$V_1 = \frac{p(l^2 - a^2)}{2l}$$

La distanța x de reazemul A, momentul încovoietor este:

$$M_x = \frac{p(l^2 - a^2)}{2l} x - \frac{px^2}{2}$$

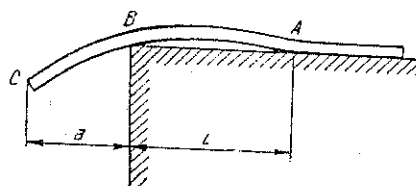


Fig. 5.21, a

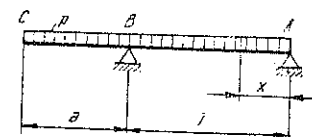


Fig. 5.21, b

Ecuatia diferențială este:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{p(l^2 - a^2)}{2l} x + \frac{px^2}{2}.$$

Integrând, se obține :

$$EIv = -\frac{p(l^2 - a^2)}{12l}x^3 + \frac{px^4}{24} + C_1x + C_2.$$

Punind condițiile : $v = 0$ pentru $x = 0$ și $x = l$, $v' = 0$ pentru $x = 0$, se obține : $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ și :

$$-\frac{p(l^2 - a^2)}{12l} \cdot l^3 + \frac{pl^4}{24} = 0,$$

de unde : $l = a\sqrt{2}$.

5.22. Să se calculeze săgeata în punctul 3 la grinda din figura 5.22, a, dacă : $\frac{pl}{2} = P$.

Rezolvare. Se aplică principiul suprapunerii efectelor :

- f' , săgeata în 3, datorită sarcinii P (Fig. 5.22, c);
- f'' , săgeata în 2, datorită sarcinii uniform distribuite (Fig. 5.22, b);
- f''' , săgeata în 3, provenită din rotirea secțiunii 2 cu unghiul φ_2 , în urma aplicării sarcinii uniform distribuite. (Fig. 5.22, b).

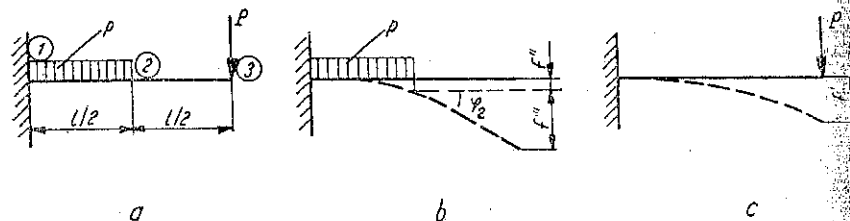


Fig. 5.22

$$f' = \frac{Pl^3}{3EI}; \quad f'' = \frac{pL^4}{8EI} = \frac{p\left(\frac{l}{2}\right)^4}{8EI} = \frac{pl^4}{128EI},$$

$$\varphi_2 = \frac{pL^3}{6EI} = \frac{p\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6EI} = \frac{pl^3}{48EI}; \quad f''' = \varphi_2 \frac{l}{2} = \frac{pl^3}{48EI} \frac{l}{2} = \frac{pl^4}{96EI}$$

$$f_3 = f' + f'' + f''' = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{pl^4}{128EI} + \frac{pl^4}{96EI} = \frac{71 Pl^3}{192 EI},$$

unde s-a înlocuit $pl/2 = P$.

5.23. Să se calculeze săgeata maximă la grinda din figura 5.23.

Rezolvare. Se aplică metoda parametrilor inițiali. Săgeata maximă are loc în secțiunea 4. Din cauza simetriei, relațiile pentru φ și v se vor scrie numai până în punctul 4.

$$EI\varphi = EI\varphi_1 - \frac{5P}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_{12} +$$

$$+ P \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{23} + P \frac{(x-2a)^2}{2} \Big|_{34}$$

$$EIv = EI\varphi_1 x + EIv_1 -$$

$$- \frac{5P}{2} \frac{x^3}{6} \Big|_{12} + P \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_{23} + P \frac{(x-2a)^3}{6} \Big|_{34}$$

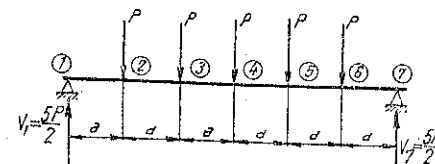


Fig. 5.23

Condițiile pentru determinarea constantelor sînt :

$$x = 0, \quad v_1 = 0; \quad x = 3a, \quad \varphi_4 = 0,$$

$$EI\varphi_4 = EI\varphi_1 - \frac{5P}{2} \frac{(3a)^2}{2} + P \frac{(2a)^2}{2} + P \frac{a^2}{2} = 0; \quad \varphi_1 = \frac{35}{4} \frac{Pa^2}{EI}$$

Deci

$$EIv_4 = \frac{35}{4} Pa^2 \cdot 3a - \frac{5P}{2} \frac{(3a)^3}{6} + P \frac{(2a)^3}{6} + P \frac{a^3}{6} = \frac{33}{2} Pa^3,$$

$$v_4 = v_{max} = \frac{33}{2} \frac{Pa^3}{EI}$$

5.24. Grinzile de lemn AC și ED din figura 5.24, a sînt încastrate la cîte un capăt, ca în desen, și legate între ele cu un bulon BD . Știind că grinzile au aceeași secțiune, se cere să fie dimensionate, cu secțiune drept-unghiulară, dacă în capătul grinzii AC este aplicată o forță P . Deformația bulonului BD este neglijabilă. Se dă : $l = 2$ m, $P = 36$ kN, $\sigma_a = 100$ daN/cm².

Rezolvare. Problema este static nedeterminată. Dacă se notează cu Q efortul din bulon, cu V_c și M_c , reacțiunea și momentul din încastrare al grinzii AC , apar trei necunoscute și numai două ecuații (proiecții pe verticală și momente).

Pentru calculul forței Q trebuie luată în considerare deformația ansamblului celor două bare.

Deoarece bulonul BD nu se deformează, trebuie ca săgeata grinzii ED în punctul D să fie egală cu săgeata grinzii AC în punctul B .

$$f_D = \frac{Ql^3}{3EI} \quad (1)$$

Săgeata în punctul B se poate obține suprapunind efectele forțelor P și Q . Datorită forței Q :

$$v'_B = -\frac{Q\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} = -\frac{Ql^3}{24EI}$$

Datorită forței P :

$$v''_B = \frac{5Pl^3}{48EI}; \quad v_B = v'_B + v''_B = \frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{Ql^3}{24EI} \quad (2)$$

Egalind relațiile (1) și (2), se obține:

$$\frac{Ql^3}{3EI} = \frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{Ql^3}{24EI}; \quad Q = \frac{5P}{18} = \frac{5 \cdot 3600}{18} = 1000 \text{ daN}. \quad (3)$$

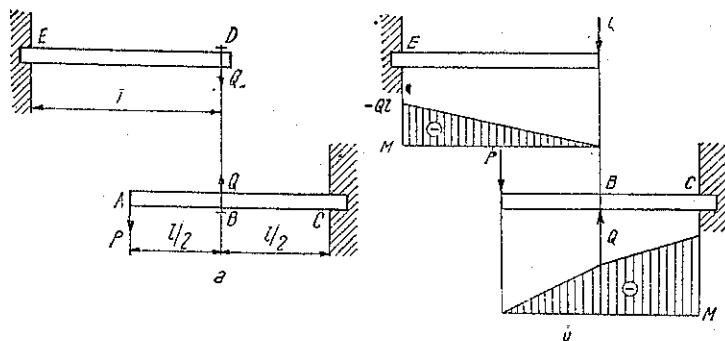


Fig. 5.24.

Diagramele momentelor încovoietoare au forma din figura 5.24, b:

$$M_E = -Ql = -1000 \cdot 200 = -200000 \text{ daNcm},$$

$$M_B = -P \frac{l}{2} = -3600 \cdot \frac{200}{2} = -360000 \text{ daNcm},$$

$$M_C = -Pl + Q \frac{l}{2} = -3600 \cdot 200 + 1000 \cdot \frac{200}{2} = -620000 \text{ daNcm}$$

Momentul maxim este M_C :

$$W_{nec} = \frac{M_C}{\sigma_a} = \frac{620000}{100} = 6200 \text{ cm}^3.$$

Luind $h = 1,5 b$:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{2,25b^3}{6} = 6200; \quad b = 26 \text{ cm}; \quad h = 39 \text{ cm}.$$

5.25. Se cere să se calculeze reacțiunea pe reazemul din interior la grinda din figura 5.25, a.

Rezolvare. Grinda este static nedeterminată, pentru că numărul reacțiunilor V_0, V_1, V_2 întrece cu o unitate numărul ecuațiilor de echilibru. Problema se poate rezolva luind în considerare modul cum se deformează grinda.

Dacă se suprimă reazemul 1, grinda devine static determinată. Săgeata luată de grinda static determinată în punctul 1 se poate calcula cu ajutorul ecuației (Fig. 5.25, b)

$$v = \frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right),$$

$$f_1 = \frac{p(l_1 + l_2)^4}{24EI} \left[\frac{l_1}{l_1 + l_2} - \frac{2l_1^3}{(l_1 + l_2)^3} + \frac{l_1^4}{(l_1 + l_2)^4} \right].$$

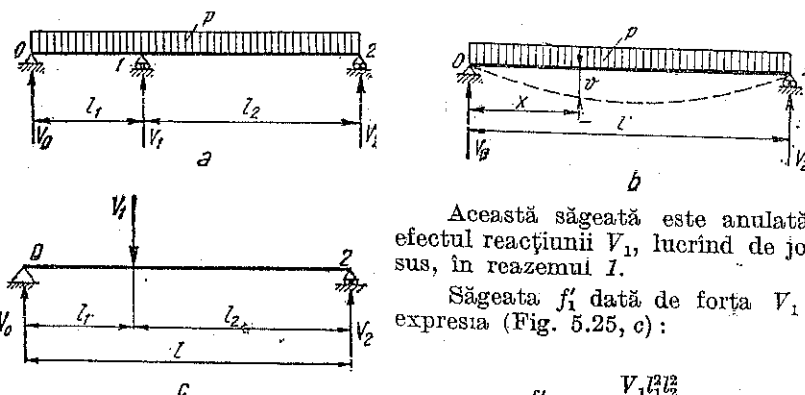


Fig. 5.25

Această săgeată este anulată de efectul reacțiunii V_1 , lucrând de jos în sus, în reazemul 1.

Săgeata f'_1 dată de forța V_1 are expresia (Fig. 5.25, c):

$$f'_1 = \frac{V_1 l_1^2 l_2^2}{3EI(l_1 + l_2)}$$

Egalind valorile celor două săgeți, se obține:

$$\frac{p(l_1 + l_2)^4}{24EI} \left[\frac{l_1}{l_1 + l_2} - 2 \frac{l_1^3}{(l_1 + l_2)^3} + \frac{l_1^4}{(l_1 + l_2)^4} \right] = \frac{V_1 l_1^2 l_2^2}{3EI(l_1 + l_2)}$$

Din această ecuație rezultă valoarea lui V_1 :

$$V_1 = \frac{p(l_1 + l_2)(l_1^2 + 3l_1l_2 + l_2^2)}{8l_1l_2}$$

În cazul particular: $l_1 = l_2 = l$, se obține:

$$V_1 = \frac{5}{4}pl.$$

5.26. Să se calculeze eforturile unitare care se produc în grinzile 1 și 2 din figura 5.26. Grinda 1 este sollicitată de forța $P = 6\,000$ daN și se sprijină pe grinda 2. Cele două grinzi sunt din oțel, de secțiune circulară, cu diametrele $d_1 = 8$ cm, $d_2 = 16$ cm. Se dă $l = 100$ cm.

Rezolvare. Forța P este preluată de ambele grinzi. Se notează cu P_1 forța ce acționează în punctul A asupra grinzii 1 și cu P_2 forța ce solictă grinda 2 în același punct,

$$P_1 + P_2 = P. \quad (1)$$

Problema este static nedeterminată deoarece în ecuația (1) sunt două necunoscute.

Deplasările celor două grinzi, în punctul A, sunt egale:

$$\frac{P_1 l^3}{48 EI_1} = \frac{P_2 (2l)^3}{48 EI_2}; \quad \frac{P_1}{8 I_1} = \frac{P_2}{I_2} = \frac{P_1 + P_2}{8 I_1 + I_2} = \frac{P}{8 I_1 + I_2}$$

$$P_1 = \frac{8 P I_1}{8 I_1 + I_2} = \frac{8 P d_1^4}{8 d_1^4 + d_2^4} = \frac{8 P}{8 + \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4} = \frac{8 P}{8 + 16} = \frac{P}{3}; \quad P_1 = 2\,000 \text{ daN}$$

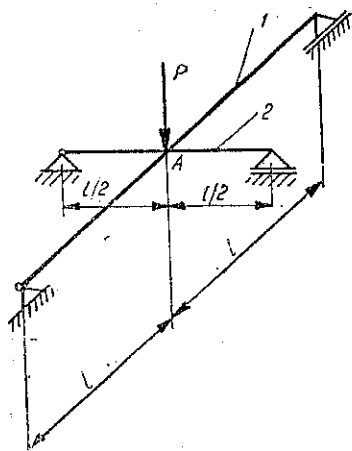


Fig. 5.26

$$P_2 = \frac{P I_2}{8 I_1 + I_2} = \frac{P}{8 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 + 1} = \frac{2P}{3},$$

$$P_2 = 4\,000 \text{ daN},$$

$$\sigma_1 = \frac{P_1 l}{W_1} = \frac{2\,000 \cdot 100}{4 \cdot \frac{\pi 8^3}{32}} = 995 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2 \frac{2l}{4}}{W_2} = \frac{4\,000 \cdot 100}{2 \cdot \frac{\pi 16^3}{32}} = 497 \text{ daN/cm}^2$$

5.27. Se dă sistemul de grinzi din figura 5.27 și se cere să se determine efortul în bara BD.

Rezolvare. Fie X efortul necunoscut din bara BD.

Expresia deplasării pe verticală a punctului B este:

$$\delta_B = \frac{(P + X \sin \alpha) l^3}{3 EI}$$

Expresia deplasării pe verticală a punctului D este:

$$\delta_D = \frac{(Q - X \sin \alpha) l_1^3}{3 EI_1}$$

Barele BA și DC sunt din același material, dar au momente de inerție diferite.

Neglijând scurtarea barei BD, se poate admite că cele două deplasări pe verticală sunt egale:

$$\delta_B = \delta_D; \quad \frac{(P + X \sin \alpha) l^3}{3 EI} = \frac{(Q - X \sin \alpha) l_1^3}{3 EI_1}$$

$$X = \frac{\frac{Q l_1^3}{I_1} - \frac{P l^3}{I}}{\left(\frac{l^3}{I} + \frac{l_1^3}{I_1}\right) \sin \alpha}$$

Deplasările pe verticală ale punctelor B și D au valoarea:

$$\delta_B = \delta_D = \delta = \frac{(P + Q) \frac{l^3 l_1^3}{I I_1}}{3 E \left(\frac{l^3}{I} + \frac{l_1^3}{I_1}\right)}$$

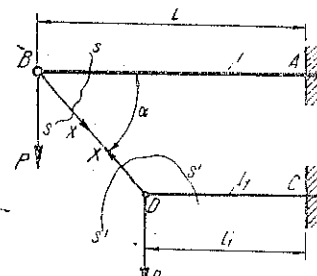


Fig. 5.27

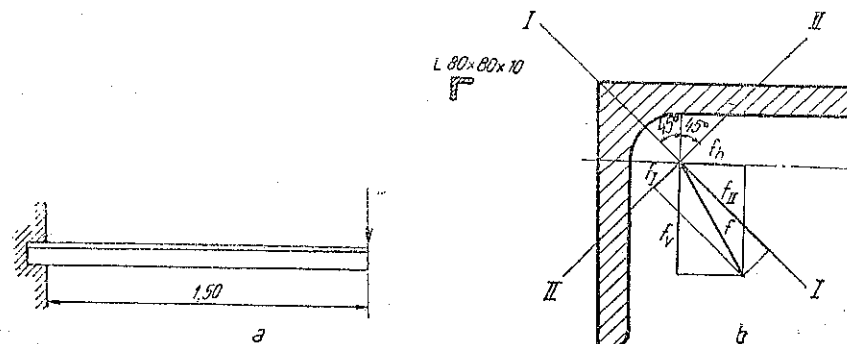


Fig. 5.28

5.28. Să se determine în mărime și direcție săgeata unei grinzi încastate la o extremitate și acționată la extremitatea liberă de o sarcină concentrată verticală $P = 200$ daN (Fig. 5.28, a), știind că lungimea grinzii este $l = 1,50$ m, iar secțiunea transversală, o cornieră $L80 \times 80 \times 10$ (Fig. 5.28, b).

Rezolvare. Se determină, în prealabil, deplasările extremității libere, pe direcțiile principale ale secțiunii. Corniera, având aripi egale, direcțiile principale vor face unghiuri de 45° cu suportul forței. Descompunând forța P , după aceste direcții, se obțin componentele:

$$P_I = P_2 = P \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 200 \cdot 0,707 = 141,4 \text{ daN.}$$

Săgeata unei grinzi încastate fiind dată de expresia:

$$v = \frac{Pl^3}{3EI},$$

se obține pentru cele două componente f_I și f_{II} ale săgeții din anexa 6: $I_1 = 139 \text{ cm}^4$, $I_2 = 35,9 \text{ cm}^4$

$$f_I = \frac{141,4 \cdot 150^3}{3 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 000 \cdot 139} \approx 0,55 \text{ cm,}$$

$$f_{II} = \frac{141,4 \cdot 150^3}{3 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 000 \cdot 35,9} \approx 2,11 \text{ cm.}$$

Mărimea săgeții totale va fi:

$$f = \sqrt{0,55^2 + 2,11^2} \approx 2,18 \text{ cm.}$$

Deplasările pe orizontală și pe verticală (Fig. 5.28, b):

$$f_h = 2,11 \cos 45^\circ - 0,55 \sin 45^\circ \approx 1,1 \text{ cm,}$$

$$f_v = 2,11 \sin 45^\circ + 0,55 \cos 45^\circ \approx 1,88 \text{ cm.}$$

5.29. Să se calculeze săgețile în punctele 2 și 4 și unghiul de deformare din punctul 1, la grinda din figura 5.29, dacă $I_2 = 2I$, $I_3 = 3I$ și $I_4 = I$.

Rezolvare. Se aplică relația (5.6) de două ori, pe intervalele 1-2-3 și 2-3-4, înlocuindu-se în această relație, pe rând, $k = 2$ și $k = 3$; deoarece nu există sarcină uniform distribuită $p_k = p_{k+1} = 0$.

Intervalul 1-2-3 ($k = 2$)

$$-v_1 l_3 + v_2(l_2 + l_3) - v_3 l_2 = \frac{l_2 l_3}{6E} [(M_1 + 2M_2)\lambda_2 + (2M_2 + M_3)\lambda_3].$$

Intervalul 2-3-4 ($k = 3$)

$$-v_2 l_4 + v_3(l_3 + l_4) - v_4 l_3 = \frac{l_3 l_4}{6E} [(M_2 + 2M_3)\lambda_3 + (2M_3 + M_4)\lambda_4].$$

Efectuind înlocuirile:

$$v_1 = 0; v_3 = 0; l_2 = l_3 = l/2;$$

$$l_4 = l/4; \lambda_2 = \frac{l_2}{I_2} = \frac{l}{4I},$$

$$\lambda_1 = \frac{l_3}{I_3} = \frac{l}{6I}; \lambda_4 = \frac{l_4}{I_4} = \frac{l}{4I};$$

$$M_1 = 0; M_2 = \frac{3Pl}{8},$$

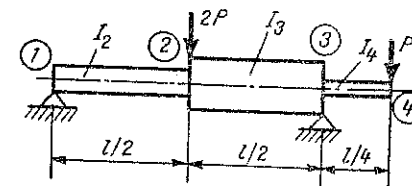


Fig. 5.29

$$M_3 = -\frac{Pl}{4}; M_4 = 0,$$

se obține:

$$v_2 \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} \right) = \frac{l}{6E} \cdot \frac{l}{2} \left[2 \cdot \frac{3Pl}{8} \cdot \frac{l}{4I} + \left(2 \cdot \frac{3Pl}{8} - \frac{Pl}{4} \right) \frac{l}{6I} \right],$$

$$-v_2 \frac{l}{4} - v_4 \frac{l}{2} = \frac{l}{6E} \cdot \frac{l}{4} \left[\left(3 \frac{Pl}{8} - 2 \frac{Pl}{4} \right) \frac{l}{6I} - 2 \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{4I} \right].$$

Din prima relație se obține: $v_2 = \frac{13 Pl^3}{1152 EI}$, pe care înlocuind-o în a

doua se determină $v_4 = \frac{Pl^3}{2304 EI}$.

Unghiul de deformare în 1 se calculează cu relația (5.8), înlocuind $k = 1$ și $p_{k+1} = 0$:

$$\varphi_1 = \frac{v_2 - v_1}{l_2} + \frac{(M_2 + 2M_1)\lambda_2}{6E}.$$

Se obține:

$$\varphi_1 = \frac{v_2}{l_2} + \frac{M_2 l}{24 EI} = \frac{13 Pl^3}{1152 EI} \cdot \frac{1}{l/2} + \frac{\frac{3Pl}{8} \cdot l}{24 EI} = \frac{11 Pl^2}{288 EI}.$$

5.30. Să se calculeze, pentru grinda din figura 5.30, săgețile în punctele 2, 3 și 4, știind că :

$$I_2 = 2I_3 = 3I_4 = I \text{ și } pa = P.$$

Rezolvare. Deoarece se cunosc $v_1 = 0$ și $\varphi_1 = 0$, se aplică relația (5.8), cu ajutorul căreia se determină săgeata în punctul 2. Se va avea în vedere că sarcina p este nulă.

$$v_2 = -\frac{(M_2 + 2M_1)l_2\lambda_2}{6E} = -\frac{(-5Pa - 2 \cdot 10Pa)a \frac{a}{I}}{6E} = \frac{25Pa^3}{6EI};$$

unde :

$$M_1 = -2Pa - p \cdot 2a \cdot 2a - P \cdot 4a = -10Pa,$$

$$M_2 = -p \cdot 2a \cdot a - P \cdot 3a = -5Pa,$$

$$l_2 = a; \lambda_2 = \frac{l_2}{I_2} = \frac{a}{I}.$$

Săgețile v_1 și v_2 fiind acum cunoscute, se aplică de două ori relația (5.6) sub forma :

$$v_{k+1} = -v_{k-1} \frac{l_{k+1}}{l_k} + v_k \frac{l_k + l_{k+1}}{l_k} - \frac{l_{k+1}}{6E} [(M_{k-1} + 2M_k)\lambda_k + (M_{k+1} + 2M_k)\lambda_{k+1}] - \frac{l_{k+1}}{24E} (p_{k+1}l_{k+1}^2\lambda_{k+1} + p_k l_k^2\lambda_k). \quad (1)$$

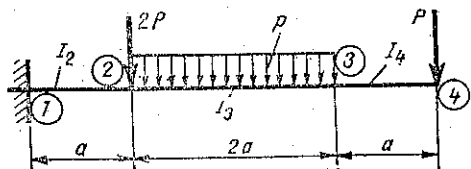


Fig. 5.30

Pentru determinarea săgeții în punctul 3 se înlocuiește $k = 2$ în (1):

$$v_3 = -v_1 \frac{l_3}{l_2} + v_2 \frac{l_2 + l_3}{l_2} - \frac{l_3}{6E} [(M_1 + 2M_2)\lambda_2 + (M_3 + 2M_2)\lambda_3] - \frac{l_3}{24E} [p_3 l_3^2 \lambda_3 + p_2 l_2^2 \lambda_2],$$

unde

$$M_3 = -Pa; p_2 = 0; p_3 = p; l_2 = 2a; \lambda_3 = \frac{l_3}{I_3} = \frac{2a}{I} = \frac{4a}{I},$$

$$v_3 = \frac{25Pa^3}{6EI} \cdot \frac{3a}{a} - \frac{2a}{6E} \left[(-10Pa - 2 \cdot 5Pa) \frac{a}{I} + (-Pa - 2 \cdot 5Pa) \frac{4a}{I} \right] - \frac{2a}{24E} \cdot p(2a)^2 \cdot \frac{4a}{I} = \frac{65Pa^3}{2EI}.$$

Pentru determinarea săgeții în 4 se înlocuiește $k = 3$ în (1):

$$v_4 = -v_2 \frac{l_4}{l_3} + v_3 \frac{l_3 + l_4}{l_3} - \frac{l_4}{6E} [(M_2 + 2M_3)\lambda_3 + (M_4 + 2M_3)\lambda_4] - \frac{l_4}{24E} [p_4 l_4^2 \lambda_4 + p_3 l_3^2 \lambda_3] = -\frac{25Pa^3}{6EI} \cdot \frac{a}{2a} + \frac{65Pa^3}{2EI} \frac{2a + a}{2a} - \frac{a}{6E} \cdot \left[(-5Pa - 2Pa) \frac{4a}{I} + (-2Pa) \frac{3a}{I} \right] - \frac{a}{24E} \cdot p(2a)^2 \cdot \frac{4a}{I} = \frac{155Pa^3}{3EI},$$

unde :

$$M_4 = 0; p_3 = p; p_4 = 0; l_4 = a; \lambda_4 = \frac{l_4}{I_4} = \frac{3a}{I}.$$

5.31. Să se calculeze săgeata maximă care se produce la arcul lamelar din figura 5.31, a format din n foi de aceeași grosime h .

Rezolvare. Se aplică metoda integrării analitice.

$$v'' = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{\frac{P}{2}x}{EI} \quad (1)$$

Momentul de inerție I al arcului lamelar se calculează ca pentru o bară de egală rezistență de secțiune dreptunghiulară cu înălțimea constantă și lățimea variind linear (Fig. 5.31, b).

$$I = \frac{b_x h^3}{12} = \frac{2x}{l} \cdot nc \cdot \frac{h^3}{12} = I_0 \frac{2x}{l}, \quad (2)$$

unde $I_0 = \frac{nc h^3}{12}$ este momentul de inerție al unei bare de secțiune dreptunghiulară cu înălțimea h și lățimea $B = nc$.

Înlocuind relația (2) în (1), rezultă :

$$v'' = -\frac{Pl}{4EI_0} \quad (3)$$

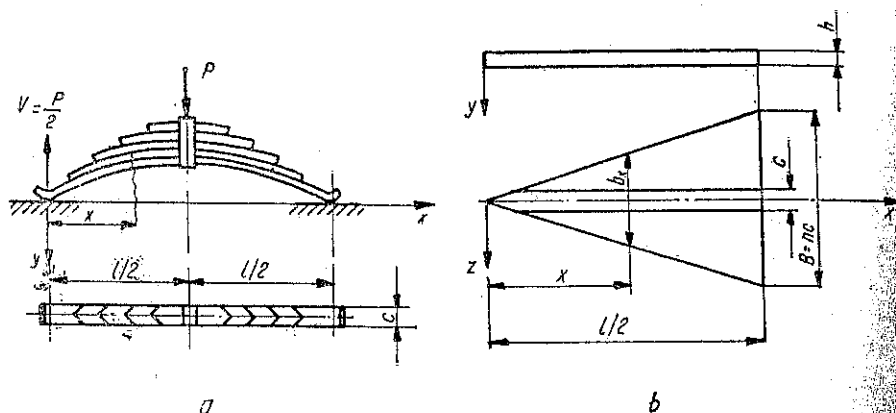


Fig. 5.31

Integrând relația (3) se obține :

$$v' = \varphi = -\frac{Pl}{4EI_0}x + C_1; \quad v = -\frac{Pl}{4EI_0} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

Condițiile pentru determinarea constantelor sînt :

$$x = \frac{l}{2}, \quad v' = 0; \quad x = 0, \quad v = 0.$$

Rezultă :

$$C_1 = \frac{Pl^2}{8EI_0}, \quad C_2 = 0,$$

$$v' = -\frac{Pl}{4EI_0}x + \frac{Pl^2}{8EI_0}; \quad v = -\frac{Pl}{8EI_0}x^2 + \frac{Pl^2}{8EI_0}x.$$

Pentru $x = \frac{l}{2}$ se obține $v_{max} = \frac{Pl^3}{32EI_0}$.

5.32. Să se calculeze săgeata maximă pentru grinda tronconică din figura 5.32. Se dă $D = 2d$.

Rezolvare. Se aplică metoda integrării analitice.

$$v'' = -\frac{M(x)}{EI(x)};$$

$$M(x) = \frac{M_0}{l}x,$$

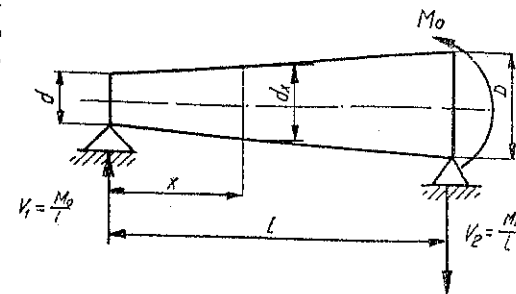


Fig. 5.32

$$I(x) = \frac{\pi d_x^4}{64} = \frac{\pi}{64} \left(d + \frac{D-d}{l}x \right)^4 = \frac{\pi d^4}{64} \left(1 + \frac{\frac{D}{d}-1}{l}x \right)^4,$$

$$I(x) = I_0 \left(1 + \frac{x}{l} \right)^4, \text{ pentru } D = 2d.$$

$$v'' = -\frac{M_0x}{EI_0l \left(1 + \frac{x}{l} \right)^4},$$

$$v' = \varphi = -\int \frac{M_0x}{EI_0l \left(1 + \frac{x}{l} \right)^4} dx + C_1 =$$

$$= -\frac{M_0}{EI_0l} \left(l \int \frac{\frac{x}{l} + 1 - 1}{\left(1 + \frac{x}{l} \right)^4} dx \right) + C_1 =$$

$$= -\frac{M_0}{EI_0} \int \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{l} \right)^3} - \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{l} \right)^4} \right] dx + C_1 =$$

$$= -\frac{M_0l}{EI_0} \left[-\frac{1}{2 \left(1 + \frac{x}{l} \right)^2} + \frac{1}{3 \left(1 + \frac{x}{l} \right)^3} \right] + C_1,$$

$$v = \frac{M_0 l}{EI_0} \int \left[\frac{1}{2 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^2} - \frac{1}{3 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^3} \right] dx + C_1 x + C_2,$$

$$v = \frac{M_0 l^2}{EI_0} \left[-\frac{1}{2 \left(1 + \frac{x}{l}\right)} + \frac{1}{6 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^2} \right] + C_1 x + C_2.$$

Condițiile pentru determinarea constantelor sînt: $x = 0, v_1 = 0$;
 $x = l, v_2 = 0$.

Rezultă:

$$C_2 = \frac{M_0 l^2}{3 EI_0}, \quad C_1 = -\frac{M_0 l}{8 EI_0},$$

$$v' = \varphi = \frac{M_0 l}{EI_0} \left[\frac{1}{2 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^2} - \frac{1}{3 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^3} - \frac{1}{8} \right],$$

$$v = \frac{M_0 l^2}{EI_0} \left[-\frac{1}{2 \left(1 + \frac{x}{l}\right)} + \frac{1}{6 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^2} \right] - \frac{M_0 l}{8 EI_0} x + \frac{M_0 l^2}{3 EI_0}$$

Săgeata este maximă în secțiunea unde $\varphi = 0$,

$$\varphi = \frac{M_0 l}{EI_0} \left[\frac{1}{2 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^2} - \frac{1}{3 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^3} - \frac{1}{8} \right] = 0,$$

$$3 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^3 - 12 \left(1 + \frac{x}{l}\right) + 8 = 0; \text{ rezultă } x = 0,48 l,$$

$$v_{max} = \frac{M_0 l^2}{EI_0} \left[-\frac{1}{2(1+0,48)} + \frac{1}{6(1+0,48)^2} \right] -$$

$$-\frac{M_0 l}{8 EI_0} 0,48 l + \frac{M_0 l^2}{3 EI_0} = 0,015 \frac{M_0 l^2}{EI_0}.$$

5.33. Să se determine săgeata în capătul liber al grinzii din figura 5.33.

Rezolvare. Se aplică metoda integrării analitice.

$$M = 2 plx - \frac{px^2}{2} - 2 pl^2,$$

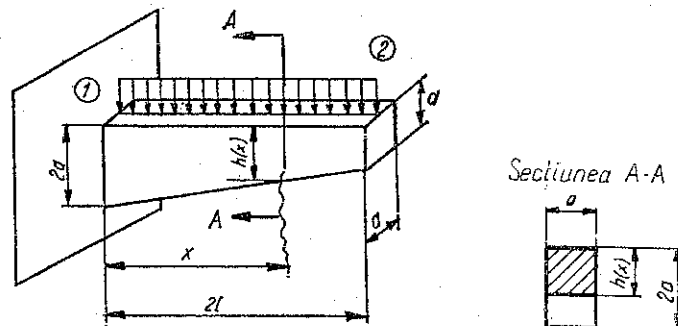


Fig. 5.33

$$I = \frac{a h^3(x)}{12} = \frac{a \left(2a - \frac{ax}{2l}\right)^3}{12} = \frac{a^4}{12} \left(2 - \frac{x}{2l}\right)^3 = I_0 \left(2 - \frac{x}{2l}\right)^3,$$

$$I_0 = \frac{a^4}{12}$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -2 plx + \frac{px^2}{2} + 2 pl^2 = -plx \left(2 - \frac{x}{2l}\right) + 2 pl^2,$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{EI_0} \cdot \frac{-plx \left(2 - \frac{x}{2l}\right) + 2 pl^2}{\left(2 - \frac{x}{2l}\right)^3} = \frac{pl}{EI_0} \left[\frac{-x}{\left(2 - \frac{x}{2l}\right)^2} + \frac{2l}{\left(2 - \frac{x}{2l}\right)^3} \right] =$$

$$= \frac{2 pl^2}{EI_0} \left[\frac{-\frac{x}{2l} + 2 - 2}{\left(2 - \frac{x}{2l}\right)^3} + \frac{1}{\left(2 - \frac{x}{2l}\right)^3} \right] =$$

$$= \frac{2 pl^2}{EI_0} \left[\frac{1}{2 - \frac{x}{2l}} - \frac{2}{\left(2 - \frac{x}{2l}\right)^2} + \frac{1}{\left(2 - \frac{x}{2l}\right)^3} \right],$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{4pl^3}{EI_0} \left[-\ln\left(2 - \frac{x}{2l}\right) - \frac{2}{\left(2 - \frac{x}{2l}\right)} + \frac{1}{2\left(2 - \frac{x}{2l}\right)^2} \right] + C_1,$$

$$v = \frac{8pl^4}{EI_0} \left\{ \left(2 - \frac{x}{2l}\right) \cdot \left[\ln\left(2 - \frac{x}{2l}\right) - 1 \right] + 2 \ln\left(2 - \frac{x}{2l}\right) + \frac{1}{2\left(2 - \frac{x}{2l}\right)} \right\} + C_1x + C_2.$$

Determinarea constantelor: pentru $x = 0$, $\varphi_1 = 0$, $v_1 = 0$,

$$C_1 = \frac{pl^3}{2EI_0} (8 \ln 2 + 7); C_2 = \frac{-2pl^4}{EI_0} (16 \ln 2 - 7).$$

Pentru $x = 2l$, rezultă:

$$v_2 = \frac{pl^4}{EI_0} (17 - 24 \ln 2).$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

5.34. Să se calculeze săgeata și unghiul fibrei medii deformate în punctul 3 la grinda din figura 5.34.

Răspuns: $f_3 = \frac{41}{384} \frac{pl^4}{EI}$; $\varphi_3 = \frac{7}{48} \frac{pl^3}{EI}$

5.35. O grindă încadrată, de lungime l și moment de inerție I (Fig. 5.35) este solicitată la extremitatea liberă de o sarcină P și un cuplu M_1 . Se cere să se stabilească relația dintre M_1 și P , astfel încât săgeata în capătul liber să fie nulă:

Răspuns:

$$M_1 = \frac{2}{3} Pl.$$

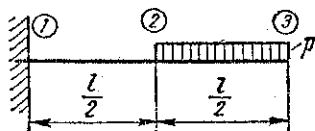


Fig. 5.34

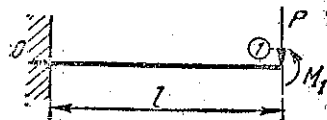


Fig. 5.35

5.36. Să se determine săgeata în punctul 3 la grinda din figura 5.36.

Răspuns:

$$f_3 = \frac{pa^4}{8EI}.$$

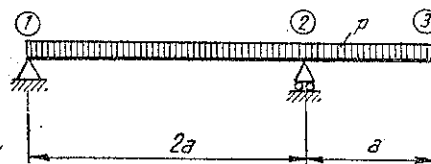


Fig. 5.36

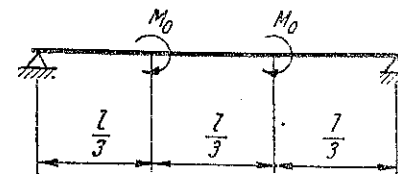


Fig. 5.37

5.37. Să se calculeze săgeata în mijlocul grinzii din figura 5.37.

Răspuns:

$$f = 0.$$

5.38. Să se determine lungimea a a consolei în funcție de deschiderea l , la grinda din figura 5.38, astfel încât săgețile în capete să fie egale cu săgeata la mijlocul grinzii.

Răspuns:

$$a = 0,218 l.$$

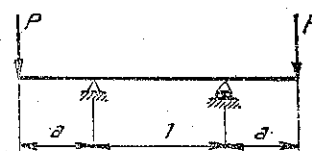


Fig. 5.38

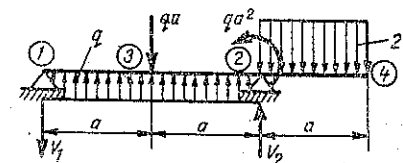


Fig. 5.39

5.39. Pentru grinda cu încărcările și dimensiunile din figura 5.39 se cere să se scrie expresiile deformației unghiulare și săgeții în general și să se calculeze valorile lor în punctul 3.

Răspuns:

$$\varphi_3 = 0; \quad v_3 = -\frac{qa^4}{24EI}.$$

5.40. Să se calculeze săgeata și unghiul fibrei medii deformate în punctul 4, la grinda din figura 5.40.

Răspuns:

$$v_4 = \frac{pl^3}{EI}; \quad \varphi_4 = \frac{7Pl^2}{6EI}.$$

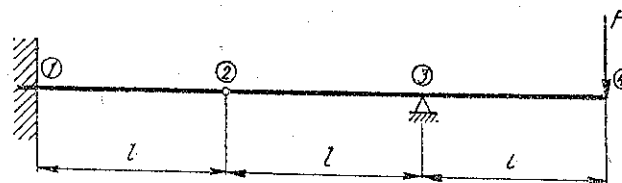


Fig. 5.40

5.41. Pentru grinda cu încărcările și dimensiunile din figura 5.41 se cere să se scrie expresia generală a deformației unghiulare și a săgeții și să se calculeze săgeata în punctul 6.

Răspuns:

$$v_6 = 0,115 \frac{ql^4}{EI}$$

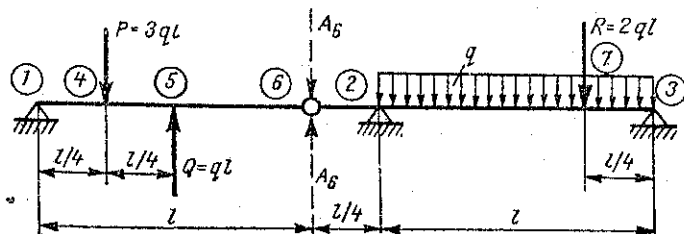


Fig. 5.41

5.42. O grindă simplu rezemată la capete, de lungime $l = 6$ m, formată dintr-un profil I20, este solicitată la mijloc prin sarcina concentrată P . Să se calculeze:

- Valoarea sarcinii P , dacă săgeata în dreptul ei este $f = 2$ cm.
- Să se verifice grinda în acest caz, știind că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Răspuns:

$$P \approx 2\,000 \text{ daN}; \quad \sigma_{ef} \approx \sigma_a.$$

5.43. Ce deschidere l poate avea un profil I 20 încastrat la un capăt și liber la celălalt, astfel încât sub greutatea proprie săgeata la capătul liber să nu depășească 5 mm?

Răspuns:

$$l = 511 \text{ cm.}$$

5.44. Să se calculeze săgeata în punctul 3, pentru grinda din figura 5.44.

Răspuns:

$$v_3 = \frac{16}{9} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

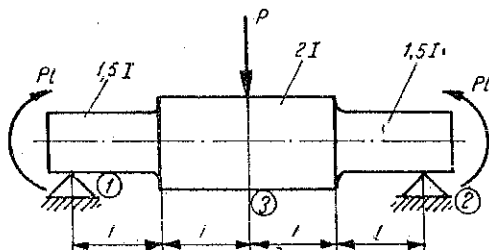


Fig. 5.44

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Formulele de dimensionare și verificare — din punctul de vedere al rezistenței — ale unui arbore de secțiune circulară, supus la răsucire printr-un moment M_t , sînt:

$$W_{p\text{ nec}} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (6.1)$$

$$\tau_{ef} = \frac{M_t}{W_{pef}}, \quad (6.2)$$

$$M_{t\text{ cap}} = W_{pef} \tau_a. \quad (6.3)$$

2. Formulele de dimensionare și verificare — din punctul de vedere al deformației — ale unui arbore de secțiune circulară, supus la răsucire printr-un moment M_t , sînt:

$$I_{p\text{ nec}} = \frac{M_t}{G \theta_a}, \quad (6.4)$$

$$\theta_{ef} = \frac{M_t}{GI_p} \leq \theta_a, \quad (6.5)$$

unde:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (6.6)$$

este răsucirea specifică, iar θ_a răsucirea specifică admisibilă.

3. În cazul secțiunii inelare, modulul de rezistență polar este:

$$W_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \quad (6.7)$$

4. Cînd se dă puterea N , în kW, a unui motor și turația sa n în rot/min, momentul de răsucire este:

$$M_t \text{ daNem} = 95\,500 \frac{N[\text{kW}]}{n[\text{rot/min}]} \quad (6.8)$$

5. Deformația unui arbore de secțiune circulară, produsă de momentul M_t , măsurată în radiani, este :

$$\Delta \varphi = \frac{M_t l}{GI_p} \quad (6.9)$$

cu condiția ca pe lungimea l momentul de răsucire să fie constant.

6. Formula de dimensionare a unui arc elicoidal, cu notațiile din figura 6. a, este :

$$W_{p \text{ nec}} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{PR}{\tau_a} \quad (6.10)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 PR}{\pi \tau_a}} \quad (6.11)$$

Pentru τ_a , la oțelul de arcuri, se iau valori de :

$$\tau_a = 4\,000 \dots 6\,000 \text{ daN/cm}^2.$$

Săgeata arcului elicoidal cu n spire este :

$$f = \frac{64 PR^3 n}{G d^4} \quad (6.12)$$

unde $G = 810\,000 \text{ daN/cm}^2$.

7. Dacă se ține seamă și de efectul forței tăietoare, efortul unitar maxim într-un arc elicoidal se stabilește astfel :

Efortul unitar maxim, datorit răsucirii, este :

$$\tau_1 = \frac{16 PR}{\pi d^3}$$

Efortul unitar maxim, datorit forfecării, este :

$$\tau_2 = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

Efortul unitar maxim total este :

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16 PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R} \right) \quad (6.13)$$

8. La o bară de secțiune dreptunghiulară (Fig. 6. b), efortul unitar maxim și răsucirea specifică θ se calculează cu formulele lui Saint-Venant :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (6.14)$$

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} \quad (6.15)$$

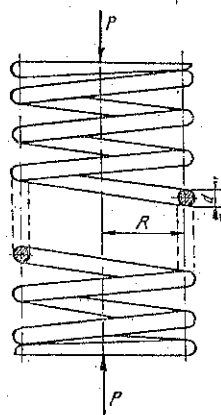


Fig. 6. a

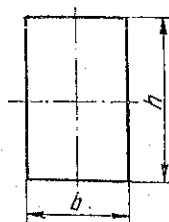


Fig. 6. b

unde

$$W_t = \alpha h b^2 \quad (6.16)$$

$$I_t = \beta h b^3 \quad (6.17)$$

coeficienții α , β fiind dați în tabelul 6.1.

Tabelul 6.1

$\frac{h}{b}$	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

9. La un profil subțire deschis, care poate fi descompus într-o serie de dreptunghiuri avînd grosimea δ_i și înălțimea h_i , efortul unitar maxim și răsucirea specifică se calculează cu relațiile (6.14) și (6.15), unde :

$$I_t = \frac{1}{3} \sum h_i \delta_i^3 \quad (6.18)$$

$$W_t = \frac{I_t}{\delta_{\max}} = \frac{\frac{1}{3} \sum h_i \delta_i^3}{\delta_{\max}} \quad (6.19)$$

10. În cazul unui profil subțire închis, format dintr-o singură celulă (simplu conex) de grosime δ , efortul unitar maxim și răsucirea specifică sînt date de relațiile (6.14) și (6.15), în care :

$$I_t = \frac{4\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}} \quad (6.20)$$

$$W_t = 2 \Omega \delta_{\min} \quad (6.21)$$

unde Ω este aria închisă de linia mediană a profilului. Integrala $\oint \frac{ds}{\delta}$ se efectuează pe întreaga linie mediană s a profilului.

11. În cazul unui profil subțire închis, format din mai multe celule (multi-conex) de grosime δ_i , eforturile unitare tangențiale și unghiul de

răsucire specifică se calculează din rezolvarea unui sistem, obținut prin scrierea următoarelor condiții :

a) fluxul de forfecare, $t_i = \tau_i \delta_i$ (Fig. 6. c) care intră într-un nod, este egal cu suma fluxurilor de forfecare care ies din nod, adică :

$$t_i = t'_i + t_{i+1} \quad (6.22)$$

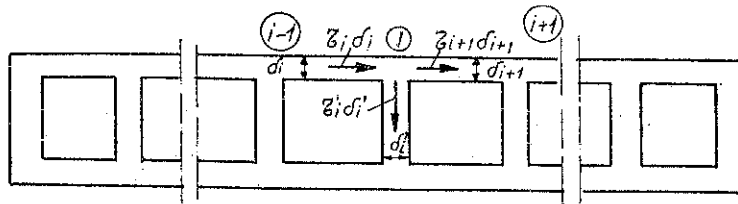


Fig. 6. c

b) pe conturul închis al unei celule, se poate scrie

$$2 G \theta \Omega = \oint \tau ds, \quad (6.23)$$

c) celulele se deformează toate cu același unghi de răsucire specifică, θ ;

d) momentul de răsucire aplicat profilului este egal cu suma momentelor de răsucire ce solicită fiecare celulă :

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} + \dots + M_{ti} = 2 \sum \Omega_i t_i. \quad (6.24)$$

B. PROBLEME REZOLVATE

6.1. Să se deseneze diagrama momentelor de răsucire pentru arborele din figura 6.1, a.

Rezolvare. $M_{t01} = 0$; $M_{t12} = 2 \cdot 1 = 2$ daNm; $M_{t23} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -2$ daNm; $M_{t34} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 8$ daNm; $M_{t45} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 18$ daNm; $M_{t56} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 - 12 \cdot 1,5 = 0$.

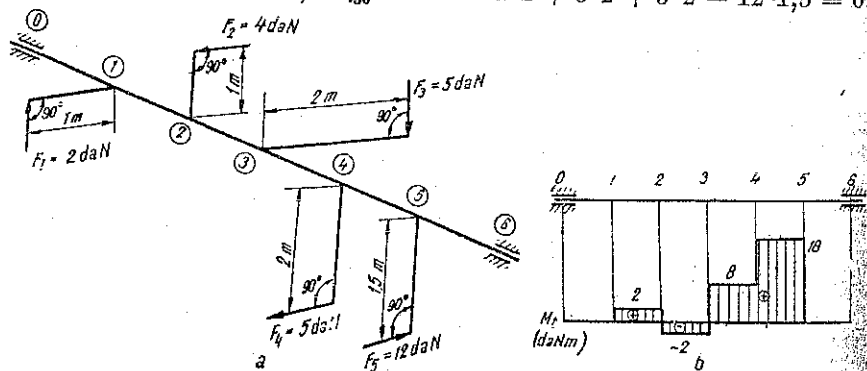


Fig. 6.1

6.2. Un arbore de transmisie ca în figura 6.2 are cinci roți de curea. La prima roată, el primește o putere $N_1 = 20$ kW. Prin celelalte patru roți, arborele acționează patru mașini care consumă puterile: $N_2 = 5$ kW, $N_3 = 8$ kW, $N_4 = 5$ kW, $N_5 = 2$ kW. Arborele se rotește cu $n = 100$ rot/min. Să se traseze diagrama momentelor de răsucire.

Rezolvare. Cuplurile pe roți sînt date de formula (6.8) :

$$M_1 = 95\,500 \frac{20}{100} = 19\,100 \text{ daNm},$$

$$M_2 = 95\,500 \frac{5}{100} = 4\,775 \text{ daNm}; \quad M_3 = 95\,500 \frac{8}{100} = 7\,640 \text{ daNm},$$

$$M_4 = 95\,500 \frac{5}{100} = 4\,775 \text{ daNm}; \quad M_5 = 95\,500 \frac{2}{100} = 1\,910 \text{ daNm}.$$

Momentele de răsucire aplicate arborelui sînt :

$$M_{t01} = 0; \quad M_{t12} = 19\,100 \text{ daNm};$$

$$M_{t23} = 19\,100 - 4\,775 = 14\,325 \text{ daNm};$$

$$M_{t34} = 14\,325 - 7\,640 = 6\,685 \text{ daNm};$$

$$M_{t45} = 6\,685 - 4\,775 = 1\,910 \text{ daNm}; \quad M_{t56} = 0.$$

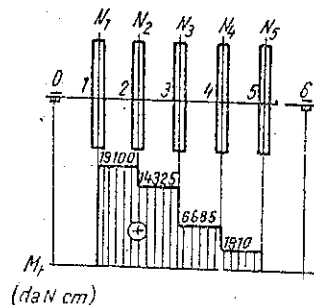


Fig. 6.2

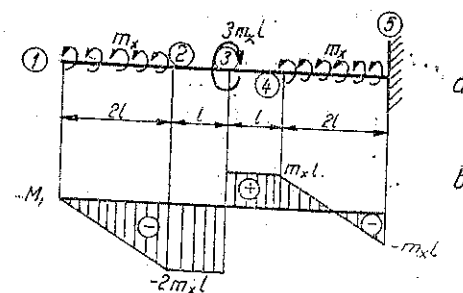


Fig. 6.3

6.3. Să se traseze diagrama momentelor de răsucire pentru arborele solicitat ca în figura 6.3, a.

Rezolvare. $M_{t1} = 0$; $M_{t2} = -2 m_x l$; $M_{t23} = -2 m_x l$,
 $M_{t34} = -2 m_x l + 3 m_x l = m_x l$; $M_{t5} = m_x l - 2 m_x l = -m_x l$.

Cu aceste valori se trasează diagrama momentelor de răsucire din figura 6.3, b.

6.4. Să se dimensioneze un arbore cu secțiune circulară, care transmite o putere $N = 75$ kW, sub o turație $n = 1\,000$ rot/min, pentru a satisface simultan criteriile de rezistență și rigiditate. Se dau $\tau_a = 300$ daN/cm² și $\theta_a = 0,3^\circ/\text{m}$.

Rezolvare. a) Criteriul de rezistență. Se aplică formula (6.1):

$$M_t = 95\,500 \frac{N}{n} = 95\,500 \cdot \frac{75}{1\,000} = 7\,162 \text{ daNcm.}$$

$$W_p = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{7\,162}{300} = 23,87 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d'^3}{16},$$

$$d' = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 23,87}{\pi}} = 4,96 \text{ cm. Se alege } d' = 5 \text{ cm.}$$

b) Criteriul de deformare.

$$\theta_{ef} = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{7\,162 \cdot 32}{8,1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 5^4} = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm.} \quad (1)$$

$$\theta_a = 0,3^\circ/\text{m} = \frac{0,3 \cdot \pi}{180} \text{ rad/cm} = 0,000524 \text{ rad/cm} = 5,24 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm.} \quad (2)$$

Se vede că deformarea dată de relația (1) este mai mare ca deformarea admisibilă, dată de relația (2). Pentru a nu se depăși această deformare, se face dimensionarea pornind de la condiția de deformare, cu ajutorul relației (1). Se aplică formula (6.4):

$$I_p = \frac{M_t}{G\theta_a} = \frac{7\,162}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 5,24 \cdot 10^{-5}} = 169 \text{ cm}^4 = \frac{\pi d''^4}{32},$$

$$d'' = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 169}{\pi}} = 6,45 \text{ cm.}$$

Se alege $d = 65$ mm. Efortul unitar maxim efectiv este:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{7\,162}{\frac{\pi \cdot 6,5^3}{16}} = 133 \text{ daN/cm}^2 < \tau_a.$$

6.5. Să se dimensioneze un arbore inelar al unei mașini, cu $N = 2\,250$ kW și $n = 300$ rot/min, luind $d = 0,8D$, dacă rezistența admisibilă este $\tau_a = 400$ daN/cm² și răsucirea specifică admisibilă $\theta_a = 0,3^\circ/\text{m}$. Să se calculeze unghiul de deformare al arborelui, știind că lungimea sa este $l = 3$ m ($G = 8,1 \cdot 10^5$ daN/cm²).

Rezolvare. a) Criteriul de rezistență.

Se aplică formula de dimensionare (6.1) și formula (6.4):

$$W_{p\,nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{95\,500 \frac{N}{n}}{\tau_a} = \frac{95\,500 \cdot \frac{2\,250}{300}}{400} = 1\,790 \text{ cm}^3,$$

$$W_p = \frac{\pi(D'^4 - d'^4)}{16D'} = \frac{\pi D'^4(1 - 0,8^4)}{16D'} = \frac{0,59\pi D'^3}{16},$$

$$D' = \sqrt[3]{\frac{1\,790 \cdot 16}{0,59\pi}} = 24,9 \text{ cm; } d' = 0,8 \cdot D' = 19,92 \text{ cm}$$

b) Criteriul de deformare.

$$\theta_a = 0,3^\circ/\text{m} = 5,24 \cdot 10^{-5} \text{ rad/cm.}$$

Se aplică formula (6.4):

$$I_{p\,nec} = \frac{M_t}{G\theta_a} = \frac{95\,500 \cdot \frac{2\,250}{300}}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 5,24 \cdot 10^{-5}} = 16\,900 \text{ cm}^4 =$$

$$= \frac{\pi(D''^4 - d''^4)}{32} = \frac{\pi D''^4(1 - 0,8^4)}{32},$$

$$D'' = \sqrt[4]{\frac{16\,900 \cdot 32}{\pi \cdot 0,59}} = 23,2 \text{ cm; } d'' = 0,8 \cdot D'' = 18,6 \text{ cm.}$$

Se vor lua diametrele rezultate din criteriul de rezistență, acestea fiind mai mari:

$$D = 250 \text{ mm; } d = 200 \text{ mm.}$$

Pentru calculul unghiului de deformare se va aplica formula (6.9):

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{GI_p} = \frac{95\,500 \cdot \frac{2\,250}{300} \cdot 300}{8,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi(25^4 - 20^4)}{32}} = 0,0117 \text{ rad.}$$

6.6. Îmbinarea a două țevi solicitate la răsucire se face cu ajutorul unei mufe filetate, ca în figura 6.6. Țevile au diametrul interior $d_2 = 40$ mm, iar filetul este $M 60$, avînd diametrul interior $d_1 = 52,8$ mm. Se cere să se calculeze diametrul exterior al mufe, știind că efortul unitar maxim produs de momentul de răsucire transmis de țevi este $\tau_{ef} = 600$ daN/cm², iar rezistența admisibilă a mufe este $\tau_a = 300$ daN/cm².

Rezolvare. Momentul de răsucire transmis de țevi este :

$$M_t = \tau_{ef} \cdot W_{p\,ef} = \tau_{ef} \cdot \frac{\pi(d_1^4 - d_2^4)}{16d_1} = 600 \cdot \frac{\pi(5,28^4 - 4^4)}{16 \cdot 5,28} = 11\,550 \text{ daNcm.}$$

Pentru mufă, diametrul interior este aproximativ egal cu diametrul exterior al filetului, $d = 60$ mm. Rezultă :

$$W_{p\,nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{11\,550}{300} = 38,5 \text{ cm}^3,$$

$$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = 38,5.$$

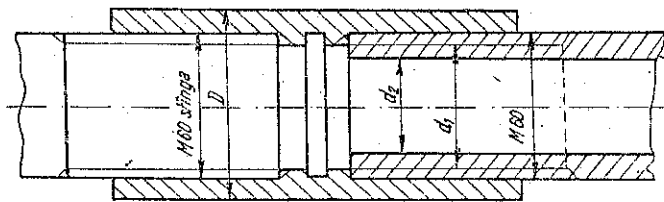


Fig. 6.6

Se obține ecuația de gradul 4 :

$$D^4 - 196D - 1\,296 = 0.$$

Rezolvînd prin încercări, se obține $D = 7,2$ cm.

Se face verificarea :

$$W_{p\,ef} = \frac{\pi(7,2^4 - 6^4)}{16 \cdot 7,2} = 37,7 \text{ cm}^3;$$

$$\tau_{ef} = \frac{11\,550}{37,7} = 307 \text{ daN/cm}^2 \approx \tau_a.$$

6.7. La mecanismul din figura 6.7, puterea se transmite de la motor la reductor sub o turație $n_1 = 2\,000$ rot/min printr-un arbore cu diametrul $d_1 = 95$ mm și apoi, de la reductor la elice, printr-un arbore inelar cu

$D = 130$ mm și $d = 100$ mm, sub o turație $n_2 = \frac{2}{3} n_1$. Se cere valoarea puterii maxime ce se poate transmite la elice, dacă se ia $\tau_a = 400$ daN/cm².

Rezolvare. Pe porțiunea 1-2 se poate transmite momentul (6.3) :

$$M_{t12} = W_{p\,ef} \cdot \tau_a = \frac{\pi d_1^3}{16} \tau_a = \frac{\pi \cdot 9,5^3}{16} \cdot 400 = 67\,300 \text{ daNcm}$$

și puterea :

$$N_{12} = \frac{M_{t12} \cdot n_{12}}{95\,500} = \frac{67\,300 \cdot 2\,000}{95\,500} = 1\,410 \text{ kW.}$$

Pe porțiunea inelară 2-3 se poate transmite :

$$M_{t23} = W_{p\,ef} \cdot \tau_a = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \cdot \tau_a = \frac{\pi(13^4 - 10^4)}{16 \cdot 13} \cdot 400 = 112\,100 \text{ daNcm,}$$

$$N_{23} = \frac{M_{t23} \cdot n_{23}}{95\,500} = \frac{112\,100 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\,000}{95\,500} = 1\,570 \text{ kW.}$$

Mecanismul poate transmite o putere $N = 1\,410$ kW, adică valoarea cea mai mică dintre cele două puteri calculate.

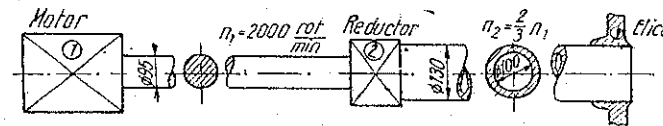


Fig. 6.7

6.8. Un arbore de rază R transmite un moment de răsucire M_t . Ce fracțiune din M_t este preluată de partea centrală a arborelui de rază $r = R/2$ și ce fracțiune de coroana exterioară?

Rezolvare. Variația efortului unitar τ într-o secțiune circulară supusă la răsucire este liniară, ca în figura 6.8, a.

Notînd cu τ_1 efortul unitar maxim care apare în partea centrală și cu τ_2 efortul unitar maxim ce apare în coroană, între ele se poate scrie relația :

$$\tau_2 = 2\tau_1. \quad (1)$$

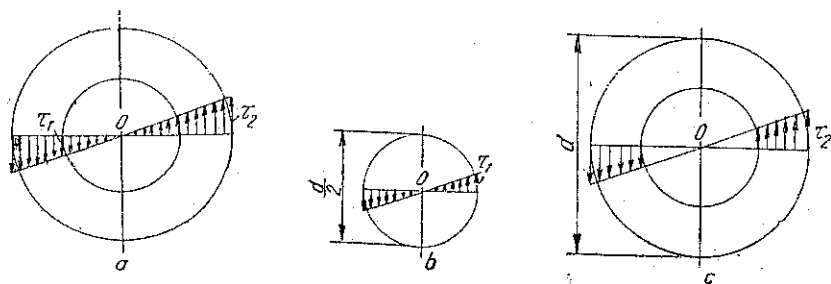


Fig. 6.8

Momentul de răsucire preluat de partea centrală este (Fig. 6.8, b)

$$M_{t1} = W_{t1} \cdot \tau_1 = \frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3}{16} \cdot \tau_1 = \frac{\pi d^3}{128} \tau_1. \quad (2)$$

Momentul de răsucire preluat de coroană este (Fig. 6.8, c):

$$M_{t2} = W_{t2} \cdot \tau_2 = \frac{\frac{\pi d^4}{32} - \frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4}{32}}{\frac{d}{2}} \tau_2 = \frac{15\pi d^3}{256} \tau_2. \quad (3)$$

Împărțind relația (3) cu (2) și ținând seamă de relația (1), se obține:

$$\frac{M_{t2}}{M_{t1}} = \frac{\frac{15\pi d^3}{256} \tau_2}{\frac{\pi d^3}{128} \tau_1} = \frac{15}{2} \cdot 2 = 15. \quad (4)$$

Suma momentelor M_{t1} și M_{t2} trebuie să egaleze pe M_t ; deci:

$$M_t = M_{t1} + M_{t2}. \quad (5)$$

Din relațiile (4) și (5) se obține:

$$M_{t1} = \frac{M_t}{16}, M_{t2} = \frac{15M_t}{16}.$$

Se observă că partea exterioară, care reprezintă 3/4 din totalul secțiunii, acumulează 15/16 din momentul de răsucire. Rezultă că o bară cu gaură de diametru $\frac{d}{2}$, care este cu 25% mai ușoară decât cea plină, are

practic aceeași capacitate de rezistență ca bara plină. Prin urmare, barele inelare solicitate la răsucire sînt mai economice decît cele pline.

6.9. Să se calculeze unghiul maxim de deformare pentru bara de secțiune tronconică solicitată la răsucire de cuplul M_x (Fig. 6.9).

Rezolvare. În tot lungul barei momentul de răsucire, M_t , este constant și egal cu M_x .

$$d\varphi = \theta dx = \frac{M_x}{GI_{p(x)}} dx,$$

$$\Delta\varphi = \int_0^l \frac{M_x}{GI_{p(x)}} dx; I_{p(x)} = \frac{\pi d_x^4}{32};$$

$$d_x = D - \frac{D-d}{l} x;$$

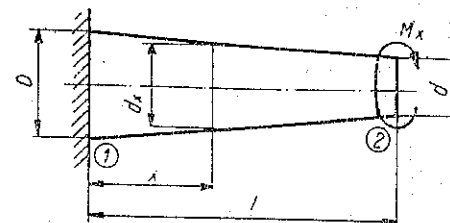


Fig. 6.9

$$I_p = \frac{\pi}{32} \left[D - \frac{D-d}{l} x \right]^4;$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \int_0^l \frac{M_x dx}{G \frac{\pi}{32} \left[D - \frac{D-d}{l} x \right]^4} = \frac{32 M_x l}{3\pi G (D-d)} \cdot \frac{1}{\left(D - \frac{D-d}{l} x \right)^3} \Big|_0^l = \\ &= \frac{32 M_x l}{3\pi G (D-d)} \cdot \frac{D^3 - d^3}{D^3 d^3} = \frac{32 M_x l}{3\pi G} \cdot \frac{\left[1 + \frac{d}{D} + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]}{D d^3}. \end{aligned}$$

Pentru $D = d$ se regăsește formula:

$$\Delta\varphi = \frac{32 M_x l}{G \pi d^4} = \frac{M_x l}{GI_p} = \frac{M_t l}{GI_p}.$$

6.10. Dacă asupra barei din figura 6.10, a se aplică cele două cupluri din desen, se cere: a) să se construiască diagrama momentelor de răsucire; b) să se dimensioneze bara, dacă $\tau_a = 500 \text{ daN/cm}^2$; c) să se calculeze unghiul maxim de deformare.

Rezolvare. a) Problema este simplu static nedeterminată; în încadrare apar două momente, M_0 și M_3 . Ecuația de momente față de axa arborelui este:

$$M_0 - M_1 - M_2 + M_3 = 0. \quad (1)$$

Bara fiind încastrată la capete, unghiul total de răsucire, pe lungimea ei, este nul. Se aplică relația (6.9):

$$\Delta\varphi = \frac{M_0 l}{GI_p} + \frac{(M_0 - 1000)2l}{GI_p} + \frac{(M_0 - 3000)l}{GI_p} = 0.$$

Rezultă: $M_0 = 1\,250$ daNcm; $M_3 = 1\,750$ daNcm.

Cu aceste valori se trasează diagrama momentului de răsucire din figura 6.10, b.

b) Dimensionarea se face la momentul cel mai mare:

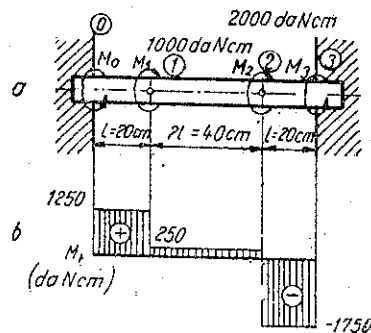


Fig. 6.10

$$W_{p\text{ nec}} = \frac{1\,750}{500} = 3,5 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{3,5 \cdot 16}{\pi}} = \sqrt[3]{17,83} = 2,61 \text{ cm.}$$

Se alege diametrul: $d = 26$ mm.

c) Unghiul de deformație va fi maxim în secțiunea în care M_x este maxim, deci în punctul 2:

$$\Delta \varphi_2 = \frac{M_3 l}{GI_p} = \frac{1\,750 \cdot 20}{8,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 2,6^4}{32}} = 0,00963 \text{ rad.}$$

$$\Delta \varphi = 33'.$$

6.11. Într-o bară de aluminiu, de secțiune inelară, se introduce o bară de oțel de secțiune pătrată. Cotele sînt date în figura 6.11. Barele, astfel

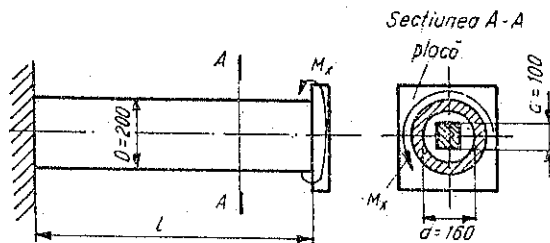


Fig. 6.11

montate, sînt încăstrate la un capăt, iar la celălalt sînt solidarizate printr-o placă. Să se calculeze eforturile unitare care se produc în cele două bare, dacă sînt solicitate cu cuplul exterior $M_x = 10^5$ daN cm. Se dă:

$$G_{OL} = 8,1 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2;$$

$$G_{Al} = 2,6 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2.$$

Rezolvare. Cuplul M_x va fi preluat de cele două bare, astfel încît

$$M_x = M_{iOL} + M_{iAl}. \quad (1)$$

Problema este simplu static nedeterminată. Barele fiind solidarizate la capete, se vor deforma egal, adică:

$$\theta_{Al} = \theta_{OL}.$$

Se aplică formula (6.5) și formula (6.15):

$$\frac{M_{iAl}}{G_{Al} I_{pAl}} = \frac{M_{iOL}}{G_{OL} I_{iOL}} \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) se obține:

$$M_{iAl} = \frac{M_x}{1 + \frac{G_{OL}}{G_{Al}} \cdot \frac{I_{iOL}}{I_{pAl}}}; \quad M_{iOL} = \frac{M_x}{1 + \frac{G_{Al}}{G_{OL}} \cdot \frac{I_{pAl}}{I_{iOL}}}$$

Se aplică relația (6.2):

$$\tau_{eAl} = \frac{M_{iAl}}{W_{pAl}} = \frac{M_x}{W_{pAl} \left(1 + \frac{G_{OL}}{G_{Al}} \cdot \frac{I_{iOL}}{I_{pAl}} \right)}$$

$$W_{pAl} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi(20^4 - 16^4)}{16 \cdot 20} = 927,4 \text{ cm}^3;$$

$$I_{pAl} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi(20^4 - 16^4)}{32} = 9\,274 \text{ cm}^4.$$

Pentru calculul lui I_{iOL} se folosește relația (6.17), în care $\beta = 0,141$ (tab. 6.1),

$$I_{iOL} = \beta h b^3 = \beta a^4 = 0,141 a^4 = 0,141 \cdot 10^4 = 1\,410 \text{ cm}^4.$$

Efectuînd calculele se obține:

$$\tau_{eAl} = 73 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar în bara de oțel se calculează cu relația (6.14):

$$\tau_{eOL} = \frac{M_{iOL}}{W_{iOL}} = \frac{M_x}{W_{iOL} \left(1 + \frac{G_{Al}}{G_{OL}} \cdot \frac{I_{pAl}}{I_{iOL}} \right)}$$

$$W_{iOL} = \alpha a^3, \text{ în care } \alpha = 0,208 \text{ (tab. 6.1),}$$

$$W_{iOL} = 0,208 a^3 = 0,208 \cdot 10^3 = 208 \text{ cm}^3.$$

Calculînd, se obține: $\tau_{eOL} = 155 \text{ daN/cm}^2$.

6.12. O bară din oțel, cu diametrul $d = 40$ mm, este încăstrată la un capăt, iar la celălalt este fixat un disc de diametru $D = 60$ cm. Discul este ancorat cu două bare identice, așezate tangențial (Fig. 6.12, a). Să se calculeze eforturile unitare care se produc în bara 1-2-3 și în ancore, dacă asupra barei se aplică un cuplu $M_x = 10^4$ daNcm.

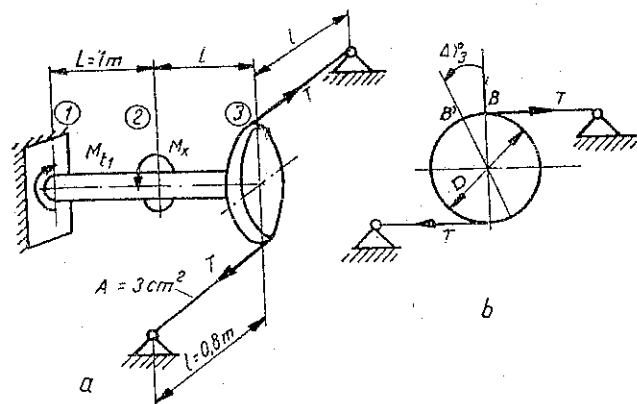


Fig. 6.12

Rezolvare. Discul, solidar cu bara 1—2—3, se rotește cu același unghi ca secțiunea 3 a barei; din această cauză, ancorele se vor lungi cu $\Delta l = BB'$ (Fig. 6.12, b). În ancore se produc eforturi de întindere, notate cu T . Ecuația de momente față de axa barei este:

$$TD - M_x + M_{t1} = 0; \quad M_{t1} + TD = M_x. \quad (1)$$

Problema este static nedeterminată. Din modul de deformare a sistemului (Fig. 6.12), rezultă:

$$BB' = \Delta l = \frac{D}{2} \Delta \varphi_3, \quad (2)$$

$$\Delta l = \frac{Tl}{EA}; \quad \Delta \varphi_3 = \frac{M_{t1}L}{GI_p} + \frac{(M_{t1} - M_x)L}{GI_p}. \quad (3)$$

Înlocuind relațiile (3) în (2) se obține:

$$\frac{Tl}{EA} = \frac{D}{2} \cdot \frac{(2M_{t1} - M_x)L}{GI_p}. \quad (4)$$

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile (1) și (4) se obține:

$$M_{t1} = \frac{1 + \frac{D^2 EAL}{2 GI_p l}}{1 + \frac{D^2 EAL}{GI_p l}} M_x; \quad T = \frac{\frac{DEAL}{2 GI_p l}}{1 + \frac{D^2 EAL}{GI_p l}} M_x. \quad (5)$$

Înlocuind datele numerice, $I_p = \frac{\pi 4^4}{32} = 8\pi \text{ cm}^4$, în relațiile (5), rezultă:

$$M_{t1} = 5004 \text{ daNcm}, \quad T = 83,3 \text{ daN},$$

$$\tau = \frac{M_{t1}}{W_p} = \frac{5004}{\pi \frac{4^3}{16}} = 398 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma = \frac{T}{A} = \frac{83,3}{3} = 27,7 \text{ daN/cm}^2.$$

6.13. Trei bare din materiale diferite, de secțiune inelară, montate concentrice, sînt incastrate la un capăt și solidarizate între ele printr-o placă, la capătul celălalt. Să se calculeze eforturile unitare tangențiale care se produc în cele trei bare, dacă sînt solícitate ca în figura 6.13.

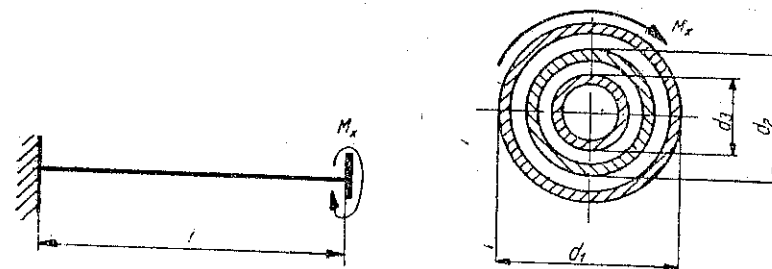


Fig. 6.13

Rezolvare. Tuburile fiind solidarizate la capete, se vor deforma egal, deci:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3; \quad \frac{M_{t1}}{G_1 I_{p1}} = \frac{M_{t2}}{G_2 I_{p2}} = \frac{M_{t3}}{G_3 I_{p3}}, \quad (1)$$

unde s-au notat cu M_{t1} , M_{t2} , M_{t3} , momentele de răsucire preluate de fiecare bară.

Ecuația de momente față de axa barei este

$$M_x = M_{t1} + M_{t2} + M_{t3}. \quad (2)$$

Relația (1) se mai poate scrie:

$$\frac{M_{t1}}{G_1 I_{p1}} = \frac{M_{t2}}{G_2 I_{p2}} = \frac{M_{t3}}{G_3 I_{p3}} = \frac{M_x}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2} + G_3 I_{p3}}$$

Rezultă :

$$M_{t1} = \frac{M_x G_1 I_{p1}}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2} + G_3 I_{p3}} ; \quad M_{t2} = \frac{M_x G_2 I_{p2}}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2} + G_3 I_{p3}} ;$$

$$M_{t3} = \frac{M_x G_3 I_{p3}}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2} + G_3 I_{p3}} ;$$

$$\tau_1 = \frac{M_{t1}}{W_{p1}} = \frac{M_x d_1 G_1}{2(G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2} + G_3 I_{p3})} ;$$

$$\tau_2 = \frac{M_x d_2 G_2}{2(G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2} + G_3 I_{p3})} ;$$

$$\tau_3 = \frac{M_x d_3 G_3}{2(G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2} + G_3 I_{p3})} .$$

6.14. Să se dimensioneze un arc elicoidal cu raza $R = 5$ cm, știind că este solicitat cu o forță $P = 100$ daN și luind rezistența admisibilă $\tau_a = 5\,000$ daN/cm². Să se determine săgeata sub această sarcină dacă arcul are 10 spire. Să se determine efortul unitar tangențial maxim care se produce în arc. Se va lua $G = 8,5 \cdot 10^3$ daN/cm².

Rezolvare. a) După formula (6.10) :

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{PR}{\tau_a} ; \quad d = \sqrt[3]{\frac{16PR}{\pi \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 100 \cdot 5}{5\,000 \cdot \pi}} = 0,798 \text{ cm}.$$

Se ia :

$$d = 8 \text{ mm}.$$

b) După formula (6.12) :

$$f = \frac{64 PR^3 n}{G d^4} = \frac{64 \cdot 100 \cdot 5^3 \cdot 10}{850\,000 \cdot 0,8^4} = 23 \text{ cm}.$$

c) După formula (6.13) :

$$\tau_{max} = \tau_1 \left(1 + \frac{d}{4R} \right) = 5\,000 \left(1 + \frac{0,8}{4 \cdot 5} \right) = 5\,200 \text{ daN/cm}^2.$$

6.15. Se dă un arc elicoidal cu raza $R = 10$ cm și diametrul firului $d = 2$ cm. Să se calculeze :

a) forța maximă P_1 pe care o poate suporta arcul, dacă $\tau_a = 5\,000$ daN/cm²;

b) sarcina de montaj P_0 , astfel încît săgeata în timpul funcționării, provocată de variația sarcinii de la P_0 la P_1 , să fie de 10 cm, în ipoteza că numărul spirelor este $n = 5$.

Rezolvare. a) Aplicind formula (6.10), se găsește :

$$P_1 = \frac{W_p \tau_a}{R} = \frac{\frac{\pi d^3}{16} \tau_a}{R} = \frac{\pi \cdot 2^3 \cdot 5\,000}{16 \cdot 10} = 785 \text{ daN}.$$

b) Se aplică relația (6.12), sub forma :

$$\Delta P = \frac{f \cdot d^4 G}{64 R^3 n} = \frac{10 \cdot 2^4 \cdot 850\,000}{64 \cdot 10^3 \cdot 5} = 425 \text{ daN} ;$$

$$P_0 = P_1 - \Delta P = 785 - 425 = 360 \text{ daN}.$$

6.16. Unui arc elicoidal cu $R = 80$ mm, $d = 16$ mm, $n = 9$ spire, încastrat la ambele capete, i se aplică o sarcină $P = 360$ daN, care îl desparte în două porțiuni, una de șase spire și alta de trei spire, ca în figura 6.16. Se cere :

a) valoarea reacțiunilor în punctele de încastrare ;
b) deformația celor două porțiuni de arc.

Rezolvare. a) Cele două porțiuni ale arcului se vor deforma cu aceeași săgeată. Notînd cu f_2 săgeata celor șase spire și cu f_1 săgeata celor trei spire, condiția de deformație este :

$$|f_1| = |f_2| ; f_1 = -\frac{64 n_1 Q_1 R^3}{d^4 G} ; f_2 = \frac{64 n_2 Q_2 R^3}{d^4 G} ;$$

$$\left| \frac{f_1}{f_2} \right| = 1 = \frac{n_1 Q_1}{n_2 Q_2} ; \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$

Ecuatia de proiecții pe verticală este :

$$P = Q_1 + Q_2. \quad (2)$$

Rezolvînd sistemul celor două ecuații (1) și (2) cu valorile din problemă se obține :

$$Q_2 = \frac{P}{3} = \frac{360}{3} = 120 \text{ daN} ; Q_1 = 2Q_2 = 2 \cdot 120 = 240 \text{ daN}.$$

$$b) |f_1| = |f_2| = \frac{64 n_1 Q_1 R^3}{d^4 G} = \frac{64 \cdot 3 \cdot 240 \cdot 8^3}{1,6^4 \cdot 850\,000} = 4,23 \text{ cm}.$$

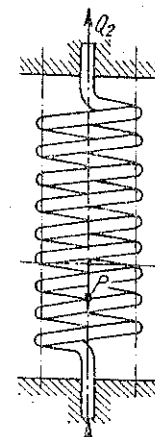


Fig. 6.16

6.17. Două arcuri elicoidale, cu aceeași lungime liberă și același număr de spire, sînt așezate concentrice și încărcate cu o sarcină totală $P = 200$ daN. Dacă razele de înfășurare sînt $R_1 = 3$ cm și $R_2 = 5$ cm și

diametrele firelor $d_1 = 7$ mm și $d_2 = 10$ mm, se cere să se calculeze partea din sarcina totală P cu care se încarcă fiecare arc, admitînd că materialul este același.

Rezolvare. Fie P_1 și P_2 cele două fracțiuni din forța P . Se poate scrie relația:

$$P = P_1 + P_2. \quad (1)$$

În timpul încărcării, cele două arcuri au aceeași săgeată. Aplicînd relația (6.12) pe rînd la fiecare arc, se obține:

$$f = \frac{64 P_1 R_1^3 n}{G d_1^4} = \frac{64 P_2 R_2^3 n}{G d_2^4},$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2^3 d_1^4}{R_1^3 d_2^4}. \quad (2)$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (1) și (2), se obține:

$$P_2 = \frac{P}{1 + \frac{R_2^3 d_1^4}{R_1^3 d_2^4}} = \frac{200}{1 + \frac{5^3 \cdot 0,7^4}{3^3 \cdot 1^4}} = 94,8 \text{ daN},$$

$$P_1 = 200 - 94,8 = 105,2 \text{ daN}.$$

6.18. O supapă este închisă prin două arcuri concentrice elicoidale, unul exterior cu $R_1 = 30$ mm, $d_1 = 5$ mm, $n_1 = 8$ spire și lungimea liberă $l_1 = 100$ mm; altul interior cu $R_2 = 20$ mm, $d_2 = 4$ mm, $n_2 = 6$ spire și lungimea liberă $l_2 = 90$ mm (Fig. 6.18). Ambele arcuri au în stare montată o lungime $l' = 80$ mm. Supapa fiind acționată, comprimă ambele arcuri pînă la o înălțime $l'' = 70$ mm. Se cere:

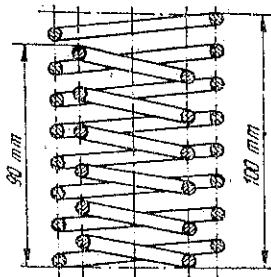


Fig. 6.18

a) forța cu care sint comprimate arcurile cînd supapa este închisă;

b) forța cu care sint comprimate arcurile cînd supapa este deschisă;

c) efortul unitar maxim care se produce în fiecare arc.

Rezolvare. a) Arcul exterior este comprimat singur pînă cînd ajunge la 90 mm și deci are o primă săgeată de 10 mm, sub o sarcină inițială P' :

$$f = \frac{64 n_1 P' R_1^3}{d_1^4 G}; \quad P' = \frac{f d_1^4 G}{64 n_1 R_1^3} = \frac{1 \cdot 0,5^4 \cdot 850\,000}{64 \cdot 8 \cdot 3^3} = 3,85 \text{ daN}.$$

De la lungimea de 90 mm, arcurile sint comprimate simultan cu 10 mm. Acestei deformații $f'_1 = f'_2 = 1$ cm îi corespund forțele:

$$f'_1 = \frac{64 n_1 \Delta P_1 R_1^3}{G d_1^4}; \quad \Delta P_1 = \frac{f'_1 d_1^4 G}{64 n_1 R_1^3} = \frac{1 \cdot 0,5^4 \cdot 850\,000}{64 \cdot 8 \cdot 3^3} = 3,85 \text{ daN},$$

$$f'_2 = \frac{64 n_2 \Delta P_2 R_2^3}{G d_2^4}; \quad \Delta P_2 = \frac{f'_2 d_2^4 G}{64 n_2 R_2^3} = \frac{1 \cdot 0,4^4 \cdot 850\,000}{64 \cdot 6 \cdot 2^3} = 7,08 \text{ daN}.$$

Deci, în stare montată cu supapa închisă, forța totală asupra ambelor arcuri este:

$$P = P' + \Delta P_1 + \Delta P_2 = 3,85 + 3,85 + 7,08 = 14,78 \text{ daN}.$$

b) Cînd supapa este deschisă, arcurile se scurtează cu încă 10 mm și forțele cu care se încarcă fiecare arc vor fi:

$$P_1 = 3 \cdot 3,85 = 11,55 \text{ daN},$$

$$P_2 = 2 \cdot 7,08 = 14,16 \text{ daN}.$$

Sarcina totală va fi:

$$P = 11,55 + 14,16 = 25,71 \text{ daN}.$$

c) Verificarea la răsucire la forțele P_1 și P_2 :

$$\tau_{ef} = \frac{M_t}{W_{pof}} = \frac{16 P R}{\pi d^3}; \quad \tau_1 = \frac{16 \cdot 11,55 \cdot 3}{\pi \cdot 0,5^3} = 1\,412 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau_2 = \frac{16 \cdot 14,16 \cdot 2}{\pi \cdot 0,4^3} = 2\,265 \text{ daN/cm}^2.$$

6.19. Să se compare greutatea unor bare solicitate printr-un moment de răsucire M_t proiectate în următoarele ipoteze:

- bară de secțiune circulară;
- bară cu secțiunea pătrată.

$$\text{Rezolvare. a) } W_{p nec} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{M_t}{\tau_a}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \tau_a}} = \left(\frac{16 M_t}{\pi \tau_a} \right)^{1/3}.$$

b) În cazul secțiunii pătrate, relațiile de calcul (6.14) și (6.16) devin:

$$W_{t nec} = \frac{M_t}{\tau_a} = 0,208 a^3; \quad a = \sqrt[3]{\frac{M_t}{0,208 \tau_a}}.$$

Ariile celor două secțiuni sînt:

$$A_a = \frac{\pi d^2}{4} = \left(\frac{16 M_t}{\pi \tau_a} \right)^{2/3} \cdot \frac{\pi}{4}; \quad A_b = a^2 = \left(\frac{M_t}{0,208 \tau_a} \right)^{2/3}$$

Raportul greutateilor va fi egal cu raportul ariilor secțiunilor:

$$\frac{G_a}{G_b} = \frac{A_a}{A_b} = \frac{\frac{\pi}{4} \left(\frac{16 M_t}{\pi \tau_a} \right)^{2/3}}{\left(\frac{M_t}{0,208 \tau_a} \right)^{2/3}} = 0,8.$$

Deci, secțiunea circulară este mai avantajoasă.

6.20. Să se dimensioneze arcu de la problema 6.14 și să se calculeze săgeata, dacă se face cu secțiune pătrată. Să se compare greutatea arcurilor în cele două alternative.

Rezolvare. La secțiunea pătrată, în formula (6.16) se înlocuiesc:

$$b = h = a; \quad \alpha = 0,208; \quad \tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha h b^2} = \frac{PR}{0,208 a^3} = \tau_a,$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{PR}{0,208 \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{100 \cdot 5}{0,208 \cdot 5000}} = 0,783 \text{ cm} \approx 0,8 \text{ cm}.$$

Notînd secțiunea circulară cu A_1 și cea pătrată cu A_2 și comparînd ariile rezultate din calcul, înainte de a le rotunji, se găsește:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 0,798^2}{4} = 0,5 \text{ cm}^2; \quad A_2 = 0,783^2 = 0,613 \text{ cm}^2.$$

Se vede că din punctul de vedere al economiei de material este de preferat secțiunea circulară. Pentru calculul săgeții se aplică formulele (6.15) și (6.17) în care $h = b = a = 0,8 \text{ cm}$, $\beta = 0,141$,

$$\theta = \frac{M_t}{\beta a^4 G} = \frac{PR}{\beta a^4 G} = \frac{100 \cdot 5}{0,141 \cdot 0,8^4 \cdot 850000} = \frac{1}{98,2} \text{ rad}$$

În funcție de răsucirea specifică θ , săgeata arcului este:

$$f = 2 \pi n R^2 \theta; \quad f = \frac{2 \pi \cdot 10 \cdot 5^2}{98,2} = 16 \text{ cm}.$$

Se observă că se obține o săgeată mai mică.

6.21. Să se determine momentul de răsucire cu care poate fi solicitată o cornieră $100 \times 100 \times 10$ (Fig. 6.21) și deformația la răsucire, dacă lungimea ei este $l = 2 \text{ m}$ și dacă se ia

$$\tau_a = 960 \text{ daN/cm}^2.$$

Rezolvare. Din formulele (6.14) și (6.15) se obține:

$$M_t = W_t \tau_a; \quad \Delta \varphi = \theta l = \frac{M_t l}{GI_t}$$

Relațiile (6.18) și (6.19), aplicate secțiunii din figura 6.21, asimilată cu un dreptunghi de dimensiuni

$$h = 2b - \delta \text{ și } \delta, \text{ devin:}$$

$$I_t = \frac{1}{3} \delta^3 (2b - \delta); \quad W_t = \frac{1}{3} \delta^2 (2b - \delta).$$

Deci

$$M_t = \frac{1}{3} \delta^2 (2b - \delta) \tau_a = \frac{1}{3} 1^2 (2 \cdot 10 - 1) \cdot 960 = 6080 \text{ daNcm},$$

$$\Delta \varphi = \frac{M_t l}{\frac{1}{3} G \delta^3 (2b - \delta)} = \frac{6080 \cdot 200 \cdot 3}{8,1 \cdot 10^5 \cdot 1^3 (2 \cdot 10 - 1)} = 0,237 \text{ rad},$$

$$\Delta \varphi = 13^\circ 35'.$$

6.22. Să se calculeze valoarea momentului de răsucire M_t cu care poate fi solicitat un profil U 24 (Fig. 6.22), dacă $\tau_a = 800 \text{ daN/cm}^2$; în acest caz, să se determine răsucirea specifică θ .

Rezolvare. Se asimilează profilul cu trei dreptunghiuri, de dimensiuni $h_1, \delta_1, h_2 = h_3 = b, \delta_2 = \delta_3$ și aplicînd relațiile (6.18), (6.19), rezultă:

$$I_t = \frac{1}{3} (2b \delta_2^3 + h_1 \delta_1^3); \quad W_t = \frac{1}{3 \delta_2} (2b \delta_2^3 + h_1 \delta_1^3),$$

$$\text{unde } h_1 = h - 2\delta_2 = 24 - 2 \cdot 1,3 = 21,4 \text{ cm};$$

$$h_2 = h_3 = 8,5 \text{ cm}; \quad \delta_1 = 0,95 \text{ cm};$$

$$\delta_2 = \delta_3 = 1,3 \text{ cm}.$$

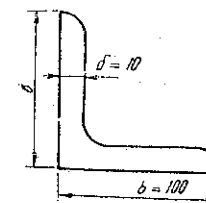


Fig. 6.21

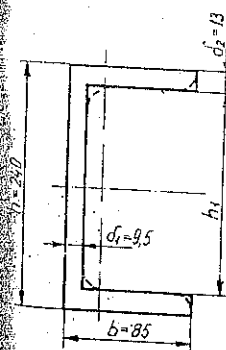


Fig. 6.22

Aplicând relațiile (6.14), (6.15), se obține:

$$M_t = \frac{\tau_a(2b\delta_2^3 + h_1\delta_1^3)}{3 \cdot \delta_2} = \frac{800(2 \cdot 8,5 \cdot 1,3^3 + 21,4 \cdot 0,95^3)}{3 \cdot 1,3} = 11\,425 \text{ daNcm},$$

$$\theta = \frac{M_t}{\frac{1}{3}G(2b\delta_2^3 + h_1\delta_1^3)} =$$

$$= \frac{11\,425}{\frac{1}{3} \cdot 8,1 \cdot 10^5 (2 \cdot 8,5 \cdot 1,3^3 + 21,4 \cdot 0,95^3)} = 0,00076 \text{ rad/cm},$$

$$\theta = 0,00076 \text{ rad/cm} = 0,076 \text{ rad/m} = 4,36^\circ/\text{m} = 4'22''/\text{m}.$$

6.23. Dacă o bară de oțel I 20 (Fig. 6.23) este încăstrată la un capăt, iar la capătul liber se aplică un moment de răsucire M_t , să se calculeze valoarea lui M_t , spre a produce o deformare $\Delta\varphi = 5^\circ$; lungimea barei fiind $l = 3 \text{ m}$. În acest caz, să se calculeze efortul unitar τ_{max} care se produce în bară.

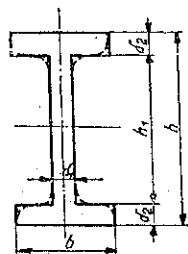


Fig. 6.23

Rezolvare. Profilul se descompune în trei dreptunghiuri, ca la problema precedentă, deci se pot aplica expresiile lui I , și W , stabilite pentru profilul U. Din formula (6.15) se poate scrie:

$$\Delta\varphi = \theta l = \frac{M_t l}{\frac{1}{3}G(2b\delta_2^3 + h_1\delta_1^3)}; M_t = \frac{\Delta\varphi G(2b\delta_2^3 + h_1\delta_1^3)}{3l}$$

Din anexa 9 se găsește, pentru I 20: $b = 9 \text{ cm}$;

$$\delta_1 = 0,75 \text{ cm}; \delta_2 = 1,13 \text{ cm}; h = 20 \text{ cm};$$

$$h_1 = 20 - 2 \cdot 1,13 = 17,74 \text{ cm},$$

$$\Delta\varphi = 5^\circ = 0,0872 \text{ rad},$$

$$M_t = \frac{0,0872 \cdot 8,1 \cdot 10^5 (2 \cdot 9 \cdot 1,13^3 + 17,74 \cdot 0,75^3)}{3 \cdot 300} = 2\,587 \text{ daNcm}.$$

Aplicând relația (6.14), se obține:

$$\tau_{max} = \frac{3M_t\delta_2}{2b\delta_2^3 + h_1\delta_1^3} = \frac{3 \cdot 2\,587 \cdot 1,13}{2 \cdot 9 \cdot 1,13^3 + 17,74 \cdot 0,75^3} = 262 \text{ daN/cm}^2.$$

6.24. O bară de secțiune inelară este supusă unui moment de răsucire, $M_t = 42\,000 \text{ daNcm}$. Secțiunea are raza medie $r_m = 10 \text{ cm}$, iar grosimea $\delta = 2 \text{ cm}$ (Fig. 6.24). Se cere să se stabilească eforturile unitare maxime în următoarele ipoteze:

- bară cu secțiunea inelară continuă;
- bară cu secțiunea inelară crestată (tăiată după o generatoare).

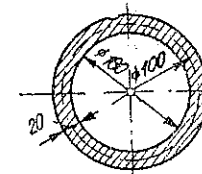


Fig. 6.24

$$\text{Rezolvare. a) } \tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{42\,000}{\pi(22^4 - 18^4)} = 36,4 \text{ daN/cm}^2.$$

b) Tubul crestată se asimilează cu un dreptunghi de dimensiuni: $h = 2\pi r_m$, $b = \delta$. Aplicând relațiile (6.14) și (6.19) rezultă:

$$\tau'_{max} = \frac{3M_t}{2\pi r_m \delta^2} = \frac{3 \cdot 42\,000}{2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 2^2} = 501 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\frac{\tau'_{max}}{\tau_{max}} = \frac{501}{36,4} = 13,76.$$

În concluzie, secțiunea inelară crestată este mult mai dezavantajoasă decât cea necrestată.

6.25. Să se calculeze momentul de răsucire capabil și unghiul de răsucire $\Delta\varphi$ al unei bare de oțel având secțiunea ca în figura 6.25, știind că $\tau_a = 800 \text{ daN/cm}^2$, $a = 5 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $\delta = 0,2 \text{ cm}$ și $l = 3 \text{ m}$, în două ipoteze:

- secțiunea este închisă;
- secțiunea este deschisă (crestată) în punctul A.

Rezolvare. a) Cînd secțiunea este închisă, se obține, din relațiile (6.14), (6.15) și (6.21):

$$M_{t, cap} = 2\Omega\delta\tau_a = 2 \cdot 35 \cdot 0,2 \cdot 800 = 11\,200 \text{ daNcm},$$

$$\Delta\varphi = \theta l = \frac{M_t l}{4G\Omega\delta^3} \oint ds = \frac{1,12 \cdot 10^4 \cdot 300 \cdot 24}{4 \cdot 8,1 \cdot 10^5 \cdot 35^3 \cdot 0,2} = 0,102 \text{ rad}.$$

b) Secțiunea deschisă (crestată) se asimilează cu un dreptunghi de dimensiuni $b = \delta$ și $h = \Sigma h_i$ și se aplică relațiile (6.14), (6.15), (6.16) și (6.17), obținînd:

$$M_{t, cap} = \tau_a \frac{\delta^2}{3} \Sigma h_i = 800 \cdot \frac{0,2^2}{3} \cdot 24 = 256 \text{ daNcm};$$

$$\Delta\varphi = \frac{3M_t l}{G\delta^3 \Sigma h_i} = \frac{3 \cdot 256 \cdot 300}{8,1 \cdot 10^5 \cdot (0,2)^3 \cdot 24} = 1,48 \text{ rad}.$$

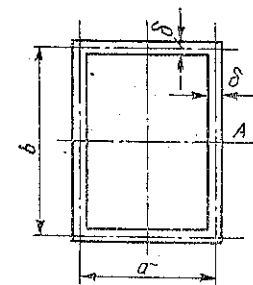


Fig. 6.25

Se vede că în cazul secțiunii cu profil închis momentul capabil și rigiditatea la răsucire sînt mult mai mari decît în cazul secțiunii cu profil deschis.

6.26. Să se calculeze momentul de răsucire pe care îl poate suporta o bară avînd secțiunea transversală un profil subțire închis format din două celule, ca în figura 6.26. Se dă: $\tau_a = 400 \text{ daN/cm}^2$,

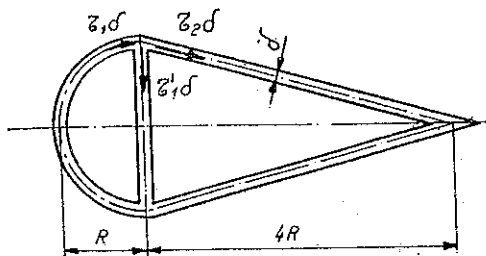


Fig. 6.26

$$R = 4 \text{ cm}, \delta = 0,4 \text{ cm}.$$

Rezolvare. Se aplică relațiile (6.22), (6.23), (6.24):

$$\tau_1 \delta = \tau_1' \delta + \tau_2 \delta, \quad (1)$$

$$2G\theta \frac{\pi R^2}{2} = \tau_1 \pi R \delta + \tau_1' 2R \delta, \quad (2)$$

$$2G\theta \cdot 4R^2 = \tau_2 \cdot 2R \sqrt{17} \delta - \tau_1' 2R \delta, \quad (3)$$

$$M_t = 2 \frac{\pi R^2}{2} \tau_1 \delta + 2 \cdot 4R^2 \tau_2 \delta. \quad (4)$$

Din relația (1) rezultă: $\tau_1' = \tau_1 - \tau_2$, iar din relațiile (2) și (3) se obține:

$$(5\pi + 8)\tau_1 = (8 + \pi + \pi\sqrt{17})\tau_2. \quad (5)$$

Înlocuind relația (5) în (4), rezultă:

$$\tau_2 = \frac{M_t}{R^2 \delta \left(\frac{64 + 48\pi + \pi^2 + \pi^2 \sqrt{17}}{5\pi + 8} \right)} = 0,0893 \frac{M_t}{R^2 \delta}. \quad (6)$$

$$\text{Din relația (5) rezultă: } \tau_1 = 0,0908 \frac{M_t}{R^2 \delta}. \quad (7)$$

Din compararea relațiilor (6) și (7) rezultă $\tau_1 > \tau_2$.
Deci

$$\tau_1 = \tau_{\max} = \tau_a = 0,0908 \frac{M_{t\text{cap}}}{R^2 \delta}.$$

De unde

$$M_{t\text{cap}} = \frac{\tau_a \cdot R^2 \delta}{0,0908} = \frac{400 \cdot 4^2 \cdot 0,4}{0,0908} = 28\,194 \text{ daNcm}.$$

6.27. Să se calculeze cuplul M_x care solictă bara din figura 6.27, dacă pe o direcție la 45° față de verticală s-a măsurat o deformare specifică $\varepsilon_1 = 39 \cdot 10^{-5}$.

Rezolvare. Pe direcția 2-2, deformarea specifică va fi $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$.

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \tau &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon = \\ &= \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 39 \cdot 10^{-5}}{1,3} = 630 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned}$$

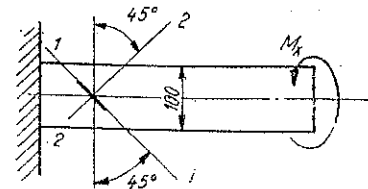


Fig. 6.27

$$M_t = W_p \tau = \frac{\pi 10^3}{16} \cdot 630 = 123\,700 \text{ daNcm}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

6.28. Să se dimensioneze un arbore cu secțiunea inelară, care transmite o putere $N = 15 \text{ kW}$, și are o turație $n = 2\,000 \text{ rot/min}$ dacă se dă: $\tau_a = 358 \text{ daN/cm}^2$ și $d = 0,8 D$.

Răspuns: $D = 26 \text{ mm}$; $d = 20 \text{ mm}$; $\tau_{ef} = 320 \text{ daN/cm}^2$.

6.29. Să se dimensioneze arborele de oțel al unui motor care are o putere de $N = 5 \text{ kW}$ și o turație $n = 1\,500 \text{ rot/min}$, în două ipoteze:

- 1) ținînd seamă de rezistența admisibilă $\tau_a = 280 \text{ daN/cm}^2$;
- 2) ținînd seamă de deformarea maximă admisibilă de $1/3^\circ/\text{m}$.

Răspuns: 1) $d = 1,8 \text{ cm}$; 2) $d = 2,9 \text{ cm}$.

6.30. Un motor de $16,5 \text{ kW}$ antrenează două mașini ca în figura 6.30, prima consumînd $9,75 \text{ kW}$ iar a doua $6,75 \text{ kW}$, turația fiind de 600 rot/min . Să se dimensioneze arborele, din oțel, cu secțiunea circulară, în următoarele variante:

- a) $\tau_a = 280 \text{ daN/cm}^2$; b) $\theta_a = 1/3^\circ/\text{m}$;
- c) $\tau_a = 350 \text{ daN/cm}^2$.

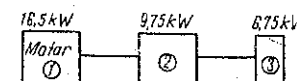


Fig. 6.30

Răspuns: a) $d_{12} = 3,6 \text{ cm}$; $d_{23} = 2,7 \text{ cm}$

b) $d_{12} = 4,9 \text{ cm}$; $d_{23} = 3,9 \text{ cm}$,

c) $d_{12} = 3,5 \text{ cm}$; $d_{23} = 2,5 \text{ cm}$.

6.31. Să se dimensioneze arborii de transmisie de la un motor la două mașini consumatoare de energie, așezate ca în figura 6.31, avind $n = 300 \text{ rot/min}$ și $\tau_a = 350 \text{ daN/cm}^2$. Să se determine apoi raportul lungimilor celor doi arbori, astfel încît răsucirea relativă a extremităților să fie nulă.

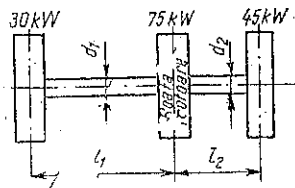


Fig. 6.31

Răspuns: $d_1 = 5,2 \text{ cm}$; $d_2 = 5,9 \text{ cm}$; $l_1/l_2 = 1,06$.

6.32. Dacă în secțiunea arborelui unui motor, de diametru $d = 20 \text{ mm}$, se produce un efort unitar $\tau = 700 \text{ daN/cm}^2$, să se calculeze lungimea arborelui, cînd deformația unghiulară totală este $\Delta\varphi = 4^\circ$.

Răspuns: $l = 80,8 \text{ cm}$.

6.33. Să se dimensioneze o bară de oțel avînd secțiunea pătrată, solicitată la răsucire cu un moment $M = 10^5 \text{ daNcm}$, dacă rezistența admisibilă este $\tau_a = 1200 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns: $a = 7,4 \text{ cm}$.

6.34. Să se calculeze raportul dintre lungimea și diametrul unui arbore de oțel solicitat la răsucire, în care se produce un efort unitar $\tau_{\max} = 800 \text{ daN/cm}^2$, iar unghiul de răsucire total este $\Delta\varphi = \pi/4$.

Răspuns: $\frac{l}{d} = 398$.

6.35. Asupra unui arbore de diametru d și lungime $l_1 + l_2$ (Fig. 6.35), se aplică un moment de răsucire M pe un volant situat la distanțele l_1 și l_2 de la capete.

Dacă arborele este încastrat la capete, se cere să se determine: momentele în reazeme M_1 și M_2 ; diagrama momentelor de răsucire; dimensionarea arborelui, dacă $M = 2000 \text{ daNcm}$, $l_1 = 2 \text{ m}$, $l_2 = 1 \text{ m}$, $\tau_a = 500 \text{ daN/cm}^2$; unghiul maxim de deformație.

Răspuns: $d = 2,5 \text{ cm}$; $\Delta\varphi = 2^\circ 28'$.

6.36. Asupra arborelui din figura 6.36, încastrat la capete, se aplică în punctul B un cuplu de răsucire M , la distanțele a și $2a$ de cele două capete. Să se traseze diagrama momentelor de răsucire, dacă $d_1 = 2 d_2$.

Răspuns: $M_A = \frac{32}{33} M$; $M_C = \frac{1}{33} M$.

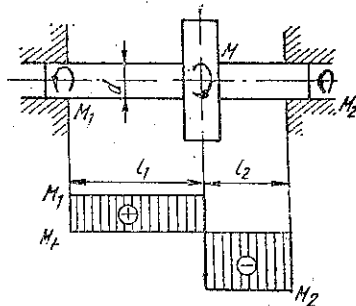


Fig. 6.35

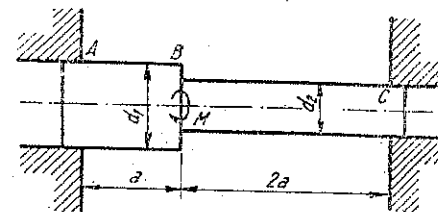


Fig. 6.36

6.37. Într-un tub din oțel, se introduce o bară de secțiune circulară, din cupru. Barele astfel montate sînt încastrate la un capăt și solidarizate între ele la celălalt capăt, printr-o placă rigidă. Să se calculeze cuplul M_x aplicat ca în figura 6.37, astfel ca să nu se depășească rezistențele admisibile:

$\tau_{aOL} = 600 \text{ daN/cm}^2$; $\tau_{aCu} = 300 \text{ daN/cm}^2$.

Se dă: $G_{OL} = 2 G_{Cu}$, $d = 4 \text{ cm}$.

Răspuns: $M_x = 42160 \text{ daNcm}$.

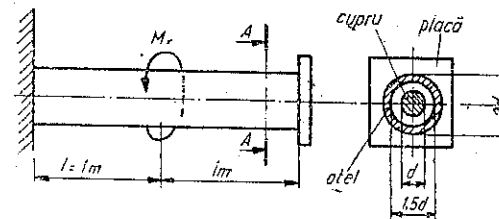


Fig. 6.37

6.38. O bară de secțiune circulară, cu diametrul $d_1 = 40 \text{ mm}$, este solicitată la răsucire de momentul $M = 4000 \text{ daNcm}$, aplicat ca în figura 6.38. Bara este încastrată la un capăt, iar la celălalt este legată, prin intermediul barei AB, de două arcuri. Să se calculeze eforturile unitare tangențiale care se produc în bară și arcuri. Arcurile au: diametrul sîrmei $d = 10 \text{ mm}$, raza de înfășurare $R = 30 \text{ mm}$, $n = 10$ spire, $G = 8,5 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$. Restul dimensiunilor sînt date pe desen.

Răspuns: $\tau_{bară} = 270 \text{ daN/cm}^2$; $\tau_{arc} = 154 \text{ daN/cm}^2$.

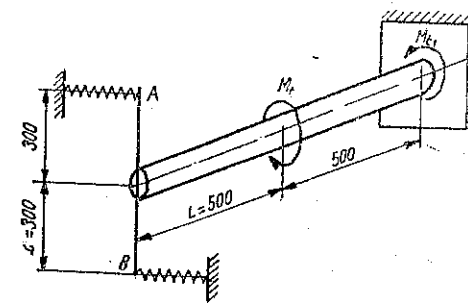


Fig. 6.38

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. La o stare liniară de eforturi unitare (bară supusă la întindere sau la compresiune), dacă pe secțiunea normală OB (Fig. 7. a) există un efort unitar σ_x , pe o secțiune înclinată AB se produc eforturile unitare:

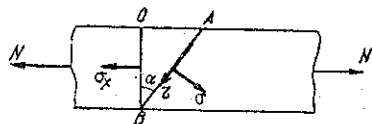


Fig. 7.a

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha,$$

$$\tau = -\frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\alpha. \quad (7.1)$$

Se vede că σ este maxim pe secțiunea normală OB , iar τ este maxim la $\alpha = 45^\circ$.

2. La o stare plană de eforturi unitare, reprezentată în figura 7. b, există eforturile unitare σ_x , σ_y , și τ_{xy} . Eforturile unitare normale se consideră pozitive, când sînt de întindere; eforturile unitare tangențiale se consideră pozitive, când cuplul format de eforturile unitare de pe două fețe opuse tinde să rotească în sensul acelor de ceasornic (Fig. 7. c) și negative, când tinde să rotească în sens contrar (Fig. 7. d).

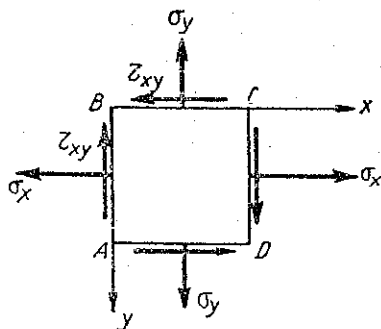


Fig. 7.b

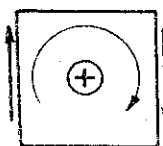


Fig. 7.c



Fig. 7.d

3. Cunoșcînd eforturile unitare σ_x , σ_y și τ_{xy} , eforturile unitare pe o secțiune înclinată cu unghiul α (considerat pozitiv dacă se măsoară în sensul săgeții din figura 7. e) sînt:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (7.2)$$

Eforturile unitare principale sînt:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (7.3)$$

iar eforturile unitare tangențiale maxime sînt:

$$\begin{aligned} \tau_{1,2} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \\ &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Eforturile unitare σ sînt maxime sau minime pe direcțiile principale, date de:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (7.5)$$

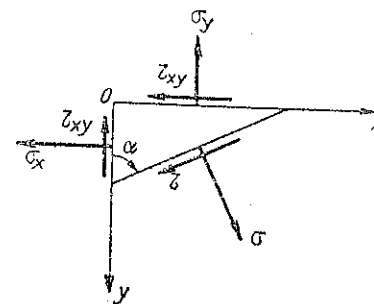


Fig. 7.e

Direcțiile pe care τ este maxim sau minim sînt înclinate cu 45° față de direcțiile principale și sînt date de relația:

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \quad (7.6)$$

4. Variația eforturilor unitare cu înclinarea secțiunii se poate studia și prin cercul lui Mohr, care în coordonate σ , τ are ecuația:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad (7.7)$$

sau, în funcție σ_x , σ_y și τ_{xy} :

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (7.8)$$

Cercul lui Mohr pentru starea plană de eforturi unitare este reprezentat în figurile 7. f și 7. g. Se dă mai departe construcția cercului lui Mohr pentru două cazuri.

a) Cunoscând σ_1 și σ_2 , centrul cercului se găsește pe axa σ la distanța de la origine:

$$\overline{OO_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

iar raza este $\overline{O_1C_1} = \overline{O_1D} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{max}$. Eforturile unitare pe o sec-

țiune înclinată cu unghiul α față de direcția principală sînt date de coordonatele unui punct de pe cerc a cărui rază face unghiul 2α cu axa σ .

b) Cunoscând eforturile unitare σ_x , σ_y și τ_{xy} pentru o stare de tensiune dată, cercul lui Mohr se trasează după cum urmează (Fig. 7. f): se determină poziția a două puncte, avînd coordonatele $B(\sigma_x, +\tau_{xy})$ și $D(\sigma_y, -\tau_{xy})$; dreapta care unește punctele B și D este un diametru și deoarece centrul cercului se găsește pe axa σ , rezultă că acest centru se va găsi la intersecția dreptei BD cu axa σ , în punctul O_1 . Raza cercului este $O_1B = O_1D$. Măsurînd pe axa σ distanțele OC_1 și OC_2 , se obțin eforturile unitare principale σ_1 și σ_2 .

Unghiul dintre dreapta BD și axa σ este 2α . Unghiul se măsoară pornind de la dreapta O_1B spre axa σ . În cazul figurii 7. f, sensul (al acelor de ceasornic) este pozitiv. În partea de sus a figurii 7. f, a fost izolat un element înclinat cu unghiul α față de axa Oy (măsurat în același sens ca și 2α), pe care au fost trasate eforturile unitare principale σ_1 și σ_2 ($\tau_{xy} = 0$).

Dacă perechile de valori sînt $B(\sigma_x, -\tau_{xy})$ și $D(\sigma_y, +\tau_{xy})$, unghiul 2α este negativ ca în figura 7. g (invers acelor de ceasornic). Orientarea elementului corespunzător se găsește măsurînd un unghi α în același sens, față de axa Oy .

Dacă se cunosc eforturile unitare σ_x , σ_y și τ_{xy} și se caută eforturile unitare pe o față înclinată cu unghiul α_1 față de axa Oy , se trasează cercul

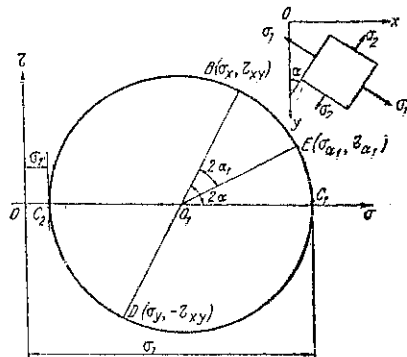


Fig. 7.f

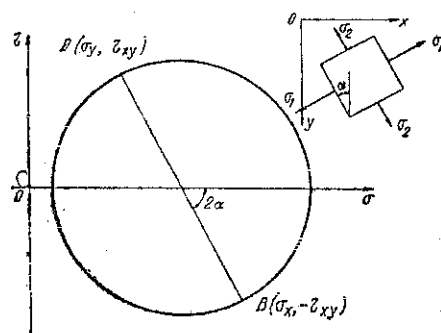


Fig. 7.g

lui Mohr, apoi se măsoară pornind de la dreapta O_1B unghiul $2\alpha_1$ (în sensul acelor de ceasornic dacă α_1 este pozitiv). Coordonatele punctului de pe cerc astfel obținut dau eforturile unitare σ_{α_1} și τ_{α_1} (Fig. 7. f). Aceste eforturi unitare pot fi determinate și analitic cu relațiile (7.2).

5. La o stare spațială de eforturi unitare, reprezentată prin tetraedrul din figura 7. h, se consideră cunoscute cele șase componente pe axe ale efortului unitar: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} .

În acest caz, componentele pe axe ale efortului unitar, p , de pe un plan înclinat MNP , vor fi:

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma; \\ p_y &= \tau_{yx} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma; \\ p_z &= \tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{zy} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Efortul unitar normal σ pe un plan înclinat MNP este:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma + 2\tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \\ &+ 2\tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2\tau_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Eforturile unitare principale sînt rădăcinile ecuației:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (7.11)$$

care, în urma dezvoltării determinantului, devine:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (7.12)$$

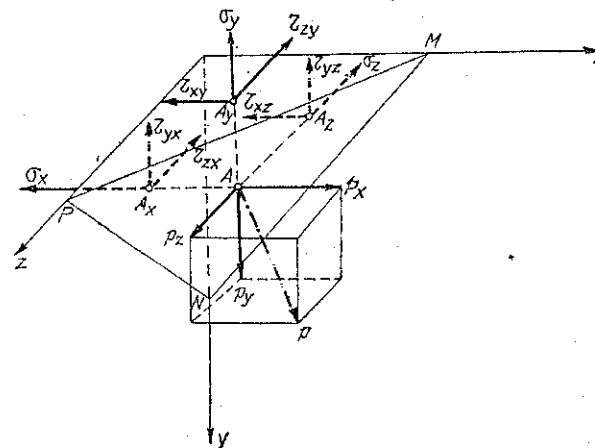


Fig. 7.h

în care s-au notat invariantii stării de solicitare

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= -\tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 + \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x; \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \quad (7.13)$$

6. Starea de deformăție într-un punct este caracterizată prin alungirile ε_x , ε_y , ε_z și lunecările specifice γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} .

Între aceste componente și componentele u , v și w ale deplasării unui punct din elementul considerat, există relațiile:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

7. Alungirea ε și lunecarea specifică γ pe o față înclinată în raport cu axele Ox , Oy și Oz , a cărei normală are cosinurile directoare $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ au expresiile următoare:

— în cazul stării liniare de eforturi unitare:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \gamma = -\varepsilon_x \sin 2\alpha; \quad (7.15)$$

— în cazul stării plane de eforturi unitare:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\alpha; \quad (7.16)$$

$$\gamma = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cos 2\alpha,$$

iar alungirile principale și direcțiile principale sînt:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}; \quad (7.17)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y},$$

— în cazul stării spațiale de eforturi unitare:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \beta + \varepsilon_z \cos^2 \gamma + \gamma_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \\ &+ \gamma_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \gamma_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Alungirile principale sînt rădăcinile ecuației

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

8. Deformația volumică specifică este:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (7.19)$$

9. În cazul corpurilor omogene, izotrope și elastice, există următoarele relații între deformațiile specifice și eforturile unitare:

— în cazul stării liniare de eforturi unitare:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \varepsilon_t = -\nu \frac{\sigma}{E}, \quad (7.20)$$

unde ε și ε_t sînt deformația specifică longitudinală, respectiv transversală, iar ν este coeficientul de contracție transversală;

— în cazul stării plane de eforturi unitare:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (7.21)$$

sau, în funcție de eforturile unitare principale:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E}; \quad (7.22)$$

— în cazul stării spațiale de eforturi unitare:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \right), \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \right); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

sau, în funcție de eforturile unitare principale:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_3}{E} + \frac{\sigma_1}{E} \right), \quad (7.24)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} \right).$$

10. În cazul stării spațiale de eforturi unitare, pentru corpurile omogene, izotrope și elastice, formulele (7.23) se pot scrie și sub forma de mai jos, purtând numele de ecuațiile lui *Poisson*:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right]; \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right]; \\ \sigma_3 &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_3 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

11. Relația între E și G este:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (7.26)$$

12. Pentru o stare spațială de eforturi unitare expresiile energiei specifice de deformare sînt:

— în funcție de eforturile unitare și deformațiile specifice

$$U_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}); \quad (7.27)$$

— în funcție de eforturile unitare

$$U_1 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2); \quad (7.28)$$

— în funcție de eforturile unitare principale

$$U_1 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1). \quad (7.29)$$

13. În cazul unei stări spațiale de solicitare, definită prin eforturile unitare principale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

— energia specifică de variație a volumului este

$$U_{1v} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (7.30)$$

— energia specifică de variație a formei este

$$U_{1f} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (7.31)$$

B. PROBLEME REZOLVATE

7.1. La prisma cu dimensiuni mici a, b, c , din figura 7.1, izolată dintr-o grindă, acționează în secțiunea hașurată un efort unitar τ . Se cere să se determine eforturile unitare σ' și τ' în secțiunea înclinată AB .

Rezolvare. În baza principiului dualității eforturilor unitare tangențiale, pe fața de sus a prisme se produce un efort unitar egal cu τ , astfel încît pentru echilibrul prisme ABC se pot scrie ecuațiile de proiecții pe direcțiile σ' și τ' :

$$\sigma' c \sqrt{a^2 + b^2} + \tau ac \cos \alpha + \tau bc \sin \alpha = 0,$$

$$\tau' c \sqrt{a^2 + b^2} + \tau ac \sin \alpha - \tau bc \cos \alpha = 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \quad \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sigma' c \sqrt{a^2 + b^2} + \tau ac \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \tau bc \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,$$

$$\tau' c \sqrt{a^2 + b^2} + \tau ac \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \tau bc \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0, \quad \sigma' = -\frac{2\tau ab}{a^2 + b^2}, \quad \tau' = \frac{\tau(b^2 - a^2)}{a^2 + b^2}.$$

7.2. O bară cu secțiunea $A = 3 \text{ cm}^2$ este solicitată la întindere de o forță $N = 3600 \text{ daN}$. Să se determine secțiunea înclinată față de cea normală, în care eforturile unitare σ și τ sînt egale în modul și să se calculeze valoarea lor.

Rezolvare. În secțiunea normală, efortul unitar este:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{3600}{3} = 1200 \text{ daN/cm}^2.$$

Eforturile unitare pe o secțiune înclinată sînt date de relațiile (7.1):

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha; \quad \tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha.$$

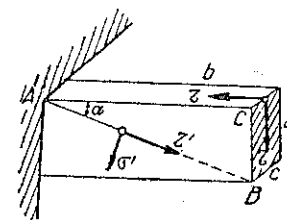


Fig. 7.1

Punind condiția $|\sigma| = |\tau|$, se obține:

$$\sigma_x \cos^2 \alpha = \sigma_y \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Soluțiile ecuației sînt:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ și } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Pentru $\alpha = 45^\circ$, valoarea efortului unitar este:

$$\sigma = \tau = \sigma_x \cos^2 \alpha = 1200 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 600 \text{ daN/cm}^2.$$

Pentru $\alpha = 90^\circ$, $\sigma = \tau = 0$.

7.3. Pe laturile respectiv perpendiculare ale unei prisme de dimensiuni mici (Fig. 7.3) acționează eforturile unitare $\sigma_x = 800 \text{ daN/cm}^2$ și $\tau_{xy} = 200 \text{ daN/cm}^2$. Să se calculeze valoarea efortului unitar normal și tangențial într-o secțiune înclinată cu 45° față de cele perpendiculare.

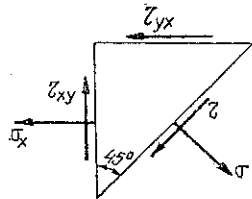


Fig. 7.3

Rezolvare. Se aplică formulele (7.2), unde $\sigma_y = 0$:

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \frac{800}{2} + \frac{800}{2} \cos 90^\circ + 200 \sin 90^\circ = 600 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau = \frac{-\sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = -\frac{800}{2} \sin 90^\circ + 200 \cos 90^\circ = -400 \text{ daN/cm}^2.$$

7.4. Să se determine eforturile unitare principale și eforturile unitare tangențiale maxime în cazul unei stări plane de eforturi unitare, dacă se cunosc $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 100 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Aplicînd formula (7.3), se obține:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{100 + 100}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(100 - 100)^2 + 4 \cdot 100^2};$$

$$\sigma_1 = 200 \text{ daN/cm}^2; \sigma_2 = 0; \tau_{1,2} = \frac{\sigma_1}{2} = \pm 100 \text{ daN/cm}^2.$$

Deoarece $\sigma_2 = 0$, starea de eforturi unitare este liniară; τ_1 apare pe o direcție, înclinată cu 45° față de direcția lui σ_1 .

7.5. Dintr-o bară solicitată la întindere cu o forță N (Fig. 7.5), se izolează un element de volum, limitat de patru plane, două câte două perpendiculare, înclinat față de axa piesei. Pe laturile acestui element apar

eforturile unitare $\sigma_x = 625 \text{ daN/cm}^2$, $\sigma_y = 400 \text{ daN/cm}^2$ și τ_{xy} , a cărui valoare nu se cunoaște. Se cere:

- valoarea efortului unitar τ_{xy} ;
- mărima forței de întindere N , dacă secțiunea barei, perpendiculară pe axă, are aria $A = 3,14 \text{ cm}^2$;

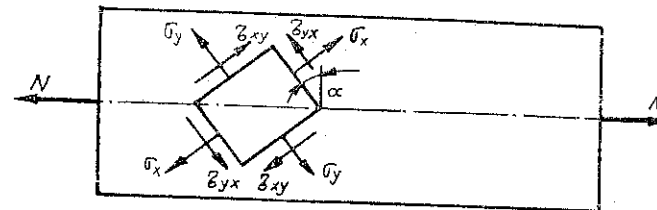


Fig. 7.5

c) unghiul α pe care îl face secțiunea pe care apare efortul unitar σ_x cu secțiunea normală pe axa barei;

d) valoarea maximă a efortului unitar τ .

Rezolvare. a) Bara fiind solicitată la întindere, rezultă că pe fețe normale pe axă ale unui element al barei există numai eforturi unitare σ_1 , iar pe fețe paralele cu axa eforturile unitare σ_2 sînt nule. Acestea fiind chiar eforturile unitare principale, rezultă că în relația (7.3):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

trebuie pusă condiția $\sigma_2 = 0$, pentru a se determina valoarea τ_{xy} :

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 0.$$

Se obține, după efectuarea calculelor: $\tau_{xy} = \sqrt{\sigma_x \sigma_y}$. Înlocuind datele numerice:

$$\tau_{xy} = \sqrt{625 \cdot 400} = 500 \text{ daN/cm}^2.$$

b) Efortul unitar principal σ_1 are valoarea:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{625 + 400}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(625 - 400)^2 + 4 \cdot 500^2} = 1025 \text{ daN/cm}^2.$$

Forța de întindere este $N = \sigma_1 \cdot A = 1025 \cdot 3,14 = 3218 \text{ daN}$.

c) Unghiul pe care îl face planul pe care se aplică σ_x cu planul normal pe direcția forței N este dat de relația (7.5):

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 500}{625 - 400} = 4,445; 2\alpha = 77^\circ 18'; \alpha = 38^\circ 39'.$$

d) Eforturile unitare tangențiale maxime se produc în planele înclinate cu 45° față de direcțiile principale și au valoarea (7.4):

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \frac{1025}{2} = \pm 512,5 \text{ daN/cm}^2.$$

7.6. La prisma de dimensiuni mici din figura 7.6 se produc pe fața AB eforturile unitare σ_x și τ_{xy} . Să se stabilească ce relație trebuie să existe între σ_x și τ_{xy} pentru ca efortul unitar τ de pe fața înclinată AC să fie egal cu efortul unitar τ_{xy} de pe fața BC .

Aplicație numerică: $\alpha = 45^\circ$.

Rezolvare. În baza principiului dualității eforturilor unitare tangențiale, pe fața BC apare efortul unitar τ_{yx} egal în modul cu τ_{xy} avînd sensul arătat în figura 7.6.

Efortul unitar τ pe o secțiune oarecare este dat de relația (7.2). Se obține efortul unitar tangențial pe fața AC :

$$\tau_{AC} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = -\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

Prin enunțul problemei, $\tau_{AC} = \tau_{yx} = \tau_{xy}$;

$$-\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \tau_{xy}.$$

Înlocuind pe $\cos 2\alpha$, se obține relația care trebuie să existe între σ_x și τ_{xy} în condițiile problemei:

$$\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} = 2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

În cazul aplicației numerice:

$$\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} = 2 \operatorname{ctg} 45^\circ = 2; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_x}{2}.$$

7.7. Un element de volum izolat dintr-un corp este supus la următoarele eforturi unitare (Fig. 7.7, a):

$$\sigma_x = 500 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_y = -300 \text{ daN/cm}^2; \quad \tau_{xy} = 400 \text{ daN/cm}^2.$$

Se cere: 1) Să se construiască cercul lui Mohr.

2) Să se determine cu ajutorul acestui cerc eforturile unitare principale și direcțiile principale; să se izoleze un element de volum avînd fețele paralele cu direcțiile principale și să se reprezinte eforturile unitare care acționează pe aceste fețe.

3) Să se determine eforturile unitare care apar pe fețele unui element înclinat față de sistemul de axe Oxy cu un unghi $\alpha_1 = +40^\circ$.

4) Să se determine eforturile unitare ce apar asupra unui element orientat după direcțiile pe care eforturile unitare tangențiale sînt maxime.

Rezolvare. 1) Se procedează cum s-a arătat la pct. 4 din Definiții și formule. Punctele B și D sînt date de valorile:

$$B(500, 400), \quad D(-300, -400).$$

Se trasează cercul din figura 7.7, b.

2) Eforturile unitare principale sînt:

$$\sigma_1 = \overline{OC_1} = 660 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = \overline{OC_2} = -460 \text{ daN/cm}^2.$$

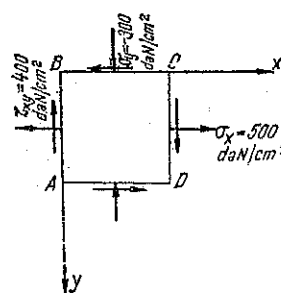


Fig. 7.7, a

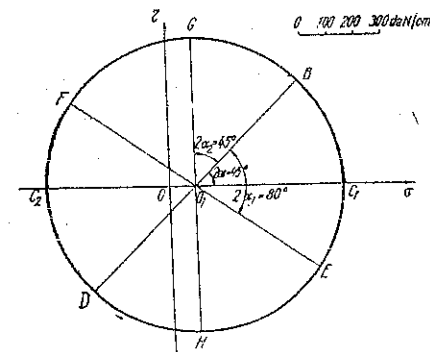


Fig. 7.7, b

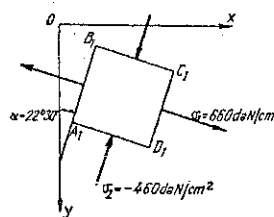


Fig. 7.7, c

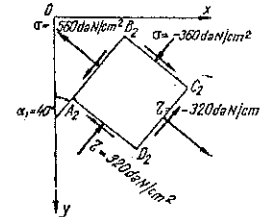


Fig. 7.7, d

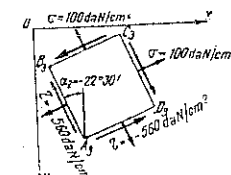


Fig. 7.7, e

Direcțiile principale sînt date de unghiul $2\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 22^\circ 30'$. În figura 7.7, c s-a măsurat unghiul $\alpha = 22^\circ 30'$ față de axa Oy , deoarece elementul $A_1B_1C_1D_1$ este orientat cu laturile paralele cu direcțiile principale.

3) Pentru a se determina eforturile unitare ce apar pe fața A_2B_2 (Fig. 7.7, d), înclinată față de AB cu $\alpha_1 = +40^\circ$, se măsoară pe cercul lui Mohr, pornind de la dreapta O_1B , un unghi $2\alpha_1 = 80^\circ$. Se obține punctul $B(560, -320)$. Eforturile unitare pe fața perpendiculară se obțin în punctul diametral opus $F(-360, 320)$.

4) Eforturile unitare tangențiale maxime apar pe cercul lui Mohr în punctele $G(100, 560)$ și $H(100, -560)$. (Dreapta GH este perpendiculară pe axa σ .) Unghiul pe care îl face fața A_3B_3 (Fig. 7.7, e) cu direcția Oy este $\alpha_2 = -22^\circ 30'$.

7.3. Eforturile unitare într-un punct oarecare al unui corp sînt produse de două solicitări. Fiecare dintre ele produce o stare de forfecare pură, eforturile unitare τ fiind egale în valoarea numerică. Una dintre stările de solicitare se exercită ca în figura 7.8, *a* asupra unui element înclinat cu 30° față de axa Oy , iar cealaltă asupra unui element orientat ca în figura 7.8, *b* (unghi egal, dar de sens contrar). Pentru a compune cele două stări de eforturi unitare din punctul dat, este necesar să se determine eforturile unitare produse de acestea asupra unui element de volum de orientare dată. Se cere:

a) Să se determine eforturile unitare rezultante pe un element dirijat după sistemul de axe Oxy .

b) Să se determine eforturile unitare principale.

Rezolvare. Față de sistemul de axe $N_1x_1y_1$ (Fig. 7.8, *a*) legat de elementul $M_1N_1P_1Q_1$ se poate trasa un cerc al lui Mohr, la care punctele B și D au coordonatele $B_1(0, \tau)$ și $D_1(0, -\tau)$. Pentru a determina eforturile unitare pe fețele unui element orientat față de sistemul de axe Oxy , se măsoară pe cercul din figura 7.8, *c* în sensul din figura 7.8, *a* (negativ) unghiul 2α . Se obțin punctele B'_1 și D'_1 avînd coordonatele:

$$B'_1 \begin{cases} \sigma_x = -\tau \sin 60^\circ = -0,866 \tau; \\ \tau_{xy} = \tau \cos 60^\circ = 0,5 \tau. \end{cases}$$

$$D'_1 \begin{cases} \sigma_y = \tau \cos 60^\circ = 0,866 \tau; \\ \tau_{xy} = -\tau \sin 60^\circ = -0,5 \tau. \end{cases}$$

Pentru elementul din figura 7.8, *b* se trasează în figura 7.8, *d* cercul lui Mohr în mod asemănător, coordonatele punctelor B și D fiind $B_2(0, -\tau)$ și $D_2(0, +\tau)$:

$$B'_2 \begin{cases} \sigma_x = -0,866 \tau \\ \tau_{xy} = -0,5 \tau \end{cases}$$

$$D'_2 \begin{cases} \sigma_y = 0,866 \tau \\ \tau_{xy} = 0,5 \tau \end{cases}$$

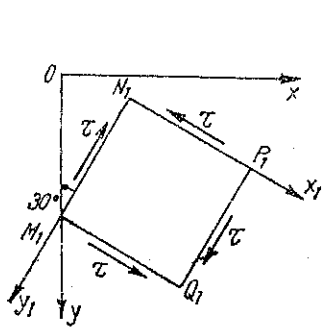


Fig. 7.8, a

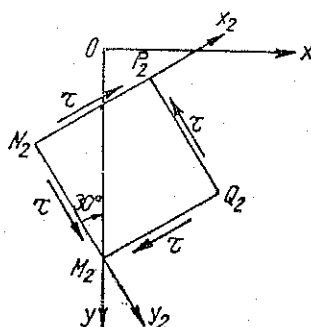


Fig. 7.8, b

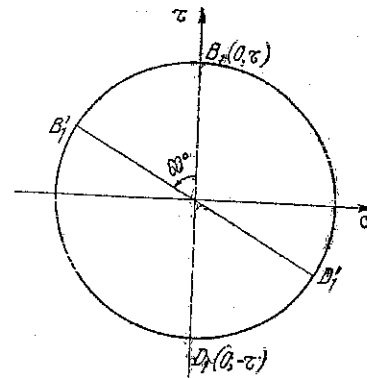


Fig. 7.8, c

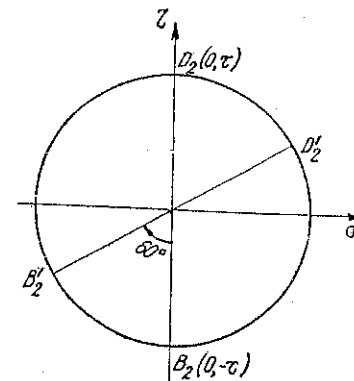


Fig. 7.8, d

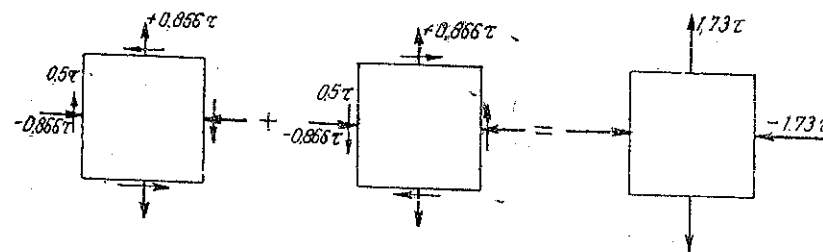


Fig. 7.8, e

Adunarea eforturilor unitare se face în figura 7.8, *e*. Se vede că direcțiile axelor Oxy sînt chiar direcțiile principale (deoarece $\tau_{xy} = 0$), deci $\sigma_1 = 1,73 \tau$ și $\sigma_2 = -1,73 \tau$.

7.9. Să se determine valorile eforturilor unitare principale la o stare spațială de eforturi unitare, dacă se cunosc $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 100$ daN/cm².

Rezolvare. Înlocuind valorile numerice în relațiile (7.13), se obține:

$$I_1 = 0;$$

$$I_2 = -100^2 - 100^2 - 100^2 = -3 \cdot 10^4;$$

$$I_3 = 2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 = 2 \cdot 10^6.$$

Aceste valori se introduc în formula (7.12) și se obține ecuația:

$$\sigma^3 - 3 \cdot 10^4 \sigma - 2 \cdot 10^6 = 0,$$

care are ca soluții :

$$\sigma_1 = 200 \text{ daN/cm}^2; \sigma_2 = -100 \text{ daN/cm}^2; \sigma_3 = -100 \text{ daN/cm}^2.$$

7.10. Să se determine eforturile unitare principale la următoarele stări spațiale de eforturi unitare :

a) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0; \tau_{yz} = \tau_{zx} = 100 \text{ daN/cm}^2,$

b) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 100 \text{ daN/cm}^2; \tau_{yz} = \tau_{zx} = 100 \text{ daN/cm}^2, \tau_{xy} = -100 \text{ daN/cm}^2.$

Rezolvare. a) Aplicând formulele (7.13), se obține :

$$I_1 = 0; I_2 = -2 \cdot 10^4; I_3 = 0.$$

Înlocuind în formula (7.12), se obține ecuația :

$$\sigma^3 - 2 \cdot 10^4 \sigma = 0,$$

care are ca soluții :

$$\sigma_1 = 141 \text{ daN/cm}^2; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -141 \text{ daN/cm}^2.$$

b) Din formulele (7.13) și (7.12) se obține :

$$I_1 = 100 + 100 + 100 = 3 \cdot 10^2; I_2 = 0;$$

$$I_3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 - 2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 - 100 \cdot 100^2 - 100 \cdot 100^2 - 100 \cdot 100^2 = -4 \cdot 10^6; \sigma^3 - 3 \cdot 10^2 \sigma^2 + 4 \cdot 10^6 = 0.$$

Prin încercări se găsesc soluțiile :

$$\sigma_1 = 200 \text{ daN/cm}^2; \sigma_2 = 200 \text{ daN/cm}^2; \sigma_3 = -100 \text{ daN/cm}^2.$$

7.11. Ce relație trebuie să existe între invariantii unei stări spațiale de eforturi unitare pentru ca aceasta să devină o stare plană de deformare?

Rezolvare. Se consideră starea spațială de eforturi unitare definită de eforturile unitare principale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Pentru a avea o stare plană de deformare, să considerăm $\varepsilon_3 = 0$, ceea ce duce, conform ultimei relații (7.24), la :

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (1)$$

Invariantii (7.13) se mai scriu

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = I_1; \quad (2)$$

$$\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = I_2;$$

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = I_3.$$

Relațiile (2) pot fi scrise și sub forma

$$\sigma_1 + \sigma_2 = I_1 - \sigma_3;$$

$$\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3(\sigma_1 + \sigma_2) = I_2; \quad (3)$$

$$\sigma_3 = \frac{I_3}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Eliminând pe σ_3 din relațiile (1) și (3) se obține :

$$\sigma_1 + \sigma_2 = I_1 - \frac{I_3}{\sigma_1 \sigma_2};$$

$$\sigma_1 \sigma_2 + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} I_3 = I_2;$$

$$\frac{I_3}{\sigma_1 \sigma_2} = \nu(\sigma_1 + \sigma_2),$$

din care, eliminând succesiv $\sigma_1 + \sigma_2$ și $\sigma_1 \sigma_2$ rezultă :

$$I_1^3 \frac{\nu^2}{(1+\nu)^3} - I_1 I_2 \frac{\nu}{1+\nu} + I_3 = 0.$$

7.12. Un element cubic de volum a fost detașat dintr-o piesă avind o stare spațială de eforturi unitare. Să se calculeze eforturile unitare normale și tangențiale care acționează în planul hașurat din figura 7.12, știind că laturile cubului sînt paralele cu direcțiile principale.

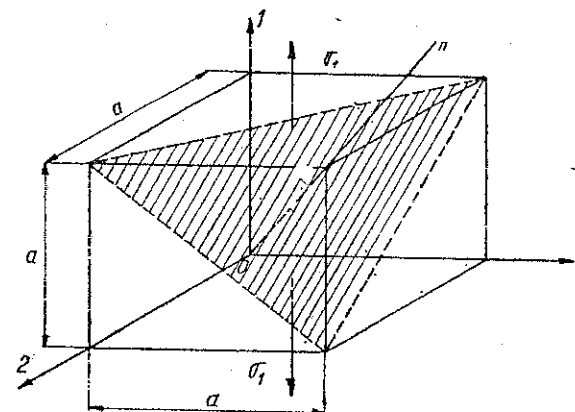


Fig. 7.12

Rezolvare. Planul hașurat este egal inclinat față de planele principale. El se numește plan octaedric. Cosinusurile directoare ale normalei la plan sînt

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dacă se notează cu p efortul unitar total pe planul octaedric, componentele acestuia pe direcțiile unui sistem de coordonate $Oxyz$, paralel cu direcțiile principale, se calculează cu relațiile (7.9):

$$p_x = \sigma_1 \cos \alpha = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}; \quad p_y = \sigma_2 \cos \beta = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}$$

$$p_z = \sigma_3 \cos \gamma = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}},$$

iar efortul unitar p

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}.$$

Cu relația (7.10) se calculează efortul unitar normal pe planul octaedric

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Efortul unitar tangențial este

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \sqrt{p^2 - \sigma_{oct}^2} = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned}$$

Dacă se are în vedere că

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

atunci

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}.$$

7.13. O bară de oțel, cu secțiunea $A = 3 \text{ cm}^2$ și cu lungimea $l = 500 \text{ cm}$, este solicitată la întindere prin o forță $N = 3\,000 \text{ daN}$. Care este variația de volum a barei, după deformare, dacă $\nu = 0,3$ și $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$?

Rezolvare. Eforturile unitare principale sînt:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} = \frac{3\,000}{3} = 1\,000 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Introducînd aceste valori în formulele (7.23), se obține:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_2 = -\nu \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_3 = -\nu \frac{\sigma_1}{E}.$$

Deformația volumică specifică este:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu \sigma_1}{E} - \frac{\nu \sigma_1}{E} = \frac{\sigma_1}{E} (1 - 2\nu).$$

Înlocuind datele numerice, se obține:

$$\varepsilon_v = \frac{1\,000(1 - 2 \cdot 0,3)}{2,1 \cdot 10^6} = 1,9 \cdot 10^{-4}.$$

Variația de volum este:

$$\Delta V = \varepsilon_v V = 1,9 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 500 = 0,285 \text{ cm}^3.$$

7.14. Pe fețele unui cub de oțel, cu latura $a = 2 \text{ cm}$, se aplică forțele de întindere $X = 1\,000 \text{ daN}$, $Y = 1\,500 \text{ daN}$, $Z = 2\,000 \text{ daN}$ paralele cu muchiile. Să se determine lungirile muchiilor cubului.

Rezolvare. Eforturile unitare sînt:

$$\sigma_x = \frac{X}{A} = \frac{1\,000}{4} = 250 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma_y = \frac{Y}{A} = \frac{1\,500}{4} = 375 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_z = \frac{Z}{A} = \frac{2\,000}{4} = 500 \text{ daN/cm}^2.$$

Alungirile, conform formulelor (7.23), sînt

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x - \nu \sigma_z);$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y).$$

Luând $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm² și $\nu = 0,3$, se obține:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2,1 \cdot 10^6} (250 - 0,3 \cdot 875) = -5,95 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2,1 \cdot 10^6} (375 - 0,3 \cdot 750) = 71,5 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2,1 \cdot 10^6} (500 - 0,3 \cdot 625) = 148,8 \cdot 10^{-6}$$

Alungirile celor trei muchii ale cubului sînt:

$$\Delta x = a\varepsilon_x = 2(-5,95 \cdot 10^{-6}) = -11,9 \cdot 10^{-6} \text{ cm,}$$

$$\Delta y = a\varepsilon_y = 2 \cdot 71,5 \cdot 10^{-6} = 143 \cdot 10^{-6} \text{ cm,}$$

$$\Delta z = a\varepsilon_z = 2 \cdot 148,8 \cdot 10^{-6} = 297,6 \cdot 10^{-6} \text{ cm.}$$

7.15. Pentru studiul experimental al stării de eforturi unitare dintr-o piesă, se lipesc, pe suprafața acesteia, traductoare tensometrice rezistive ca în figura 7.15, cu ajutorul cărora se măsoară alungirile ε_a , ε_b , ε_c . Să se stabilească relațiile de calcul pentru deformațiile specifice principale, eforturile unitare principale și direcțiile principale.

Rezolvare. a) Pentru montajul cu rozetă tensometrică rectangulară (Fig. 7.15, a) unghiul α corespunzător direcțiilor celor trei traductoare a , b , c are valorile 0° , 45° , 90° . Înlocuind aceste valori în relația (7.16) se obține

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_x;$$

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}; \quad \varepsilon_c = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_y;$$

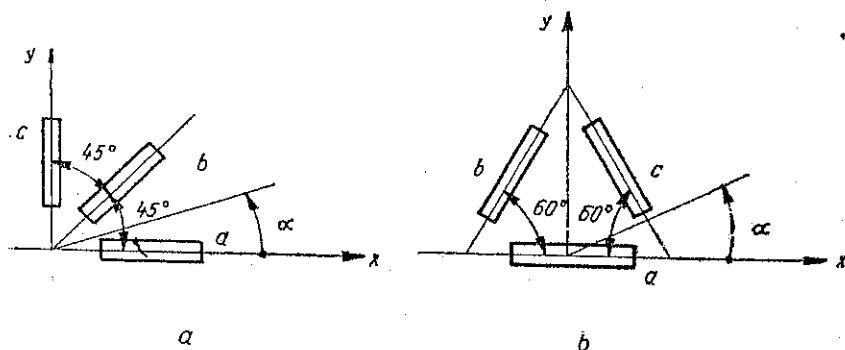


Fig. 7.15

Rezolvînd aceste relații în raport cu ε_x , ε_y și γ_{xy} rezultă

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_c; \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c),$$

valori care se înlocuiesc în relațiile (7.17):

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + [2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)]^2} =$$

$$= \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2};$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}.$$

b) Pentru montajul curozetă delta (Fig. 7.15, b) unghiul corespunzător direcțiilor celor trei traductoare a , b , c are valorile 0° , 60° , 120° . Înlocuind aceste valori în relația (7.16) se obține

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_x;$$

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Procedînd ca în cazul rozetei rectangulară se obține succesiv:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{3} (-\varepsilon_a + 2\varepsilon_b + 2\varepsilon_c); \quad \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_b - \varepsilon_c),$$

iar deformațiile specifice principale și direcțiile principale

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{3} (\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c) \pm \sqrt{\left(\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_b - \varepsilon_c}{\sqrt{3}} \right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} (\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c) \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2};$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{\sqrt{3} (\varepsilon_b - \varepsilon_c)}{2\varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c}.$$

c) Fiind cunoscute alungirile principale, se pot calcula eforturile unitare principale, pornind de la relațiile (7.22), care se rezolvă în raport cu eforturile unitare:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1).$$

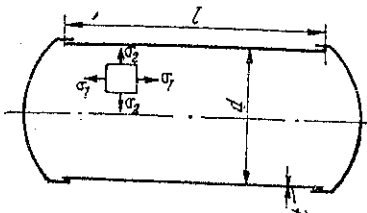


Fig. 7.16

7.16. Într-un rezervor cilindric, cu lungimea $l=6$ m, cu diametrul $d=1,5$ m și cu grosimea tablei $t=1$ cm (Fig. 7.16), se află aer comprimat, la o presiune $p=15$ daN/cm². Datorită solicitării se produc deformări care modifică volumul rezervorului. Să se determine creșterea volumului rezervorului, neglijându-se deformările fundurilor.

Rezolvare. Corpul rezervorului suferă deformări, atât datorită eforturilor unitare paralele cu axa sa (σ_1) cât și datorită eforturilor perpendiculare pe axă (σ_2). Valoarea acestor eforturi unitare este dată de relațiile:

$$\sigma_1 = \frac{\frac{\pi d^2}{4} p}{\pi d t} = \frac{p d}{4 t} = \frac{15 \cdot 150}{4 \cdot 1} = 562,5 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{p d l}{2 t l} = \frac{p d}{2 t} = \frac{15 \cdot 150}{2 \cdot 1} = 1125 \text{ daN/cm}^2.$$

Se scriu relațiile dintre dimensiunile cilindrului deformat, notate cu indicele 1 și dimensiunile inițiale:

$$\pi d_1 = \pi d(1 + \varepsilon_2); \quad d_1 = d(1 + \varepsilon_2); \quad l_1 = l(1 + \varepsilon_1).$$

Volumul final este dat de relația:

$$V_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} l_1 = \frac{\pi d^2(1 + \varepsilon_2)^2}{4} l(1 + \varepsilon_1).$$

Creșterea volumului este:

$$\Delta V = V_1 - V = \frac{\pi d^2}{4} l [(1 + \varepsilon_2)^2 (1 + \varepsilon_1) - 1].$$

Neglijând termenii ε_2^2 și $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, rezultă:

$$\Delta V \approx \frac{\pi d^2}{4} l (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2).$$

Cele două alungiri sînt:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E};$$

$$\Delta V = \frac{\pi d^2}{4} \frac{l}{E} [\sigma_1(1 - 2\nu) + \sigma_2(2 - \nu)].$$

Înlocuind $\nu = 0,3$, se obține:

$$\Delta V = \frac{3,14 \cdot 150^2}{4} \cdot \frac{600}{2,1 \cdot 10^6} (562,5 \cdot 0,4 + 1125 \cdot 1,7) = 10792 \text{ cm}^3.$$

Deformația volumică specifică este:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{10792}{10,60 \cdot 10^6} = 1,018 \cdot 10^{-3}.$$

7.17. O placă paralelipipedică, de dimensiuni a, b, c (Fig. 7.17), este comprimată pe două direcții prin N_1 și N_2 , iar pe a treia direcție este așezată între doi pereți, care nu permit nici o umflare. Să se afle: eforturile unitare principale, alungirile principale, reacțiunea N_3 care se produce între placă și pereți.

Aplicație numerică: $a = 1$ cm; $b = 2$ cm; $c = 0,5$ cm; $N_1 = 500$ daN; $N_2 = 750$ daN; $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm²; $\nu = 0,3$.

Rezolvare. Cei doi pereți nepermițînd nici o deplasare, rezultă că deformația specifică pe direcția 3 este nulă ($\varepsilon_3 = 0$). Din ultima ecuație (7.24) se obține:

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} \right) = 0$$

sau:

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (1)$$

În cazul aplicației numerice:

$$\sigma_1 = -\frac{N_1}{ac} = -\frac{500}{1 \cdot 0,5} = -1000 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = -\frac{N_2}{bc} = -\frac{750}{2 \cdot 0,5} = -750 \text{ daN/cm}^2.$$

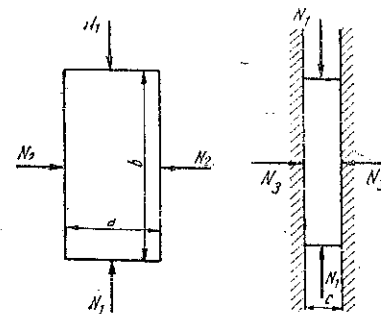


Fig. 7.17

Înlocuind în expresia (1), se obține:

$$\sigma_3 = 0,3(-1\,000 - 750) = -525 \text{ daN/cm}^2.$$

Reacțiunea peretelui este:

$$N_3 = \sigma_3 ab = -525 \cdot 1 \cdot 2 = -1\,050 \text{ daN}.$$

Deformațiile specifice se obțin din relațiile (7.24):

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} = \frac{-1\,000 - 0,3(-750 - 525)}{2,1 \cdot 10^6} = -2,94 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)}{E} = \frac{-750 - 0,3(-525 - 1\,000)}{2,1 \cdot 10^6} = -1,39 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_3 = 0.$$

7.13. Un cub de oțel cufundat într-un lichid este supus unei presiuni uniforme, de mărime $p = 50 \text{ daN/cm}^2$. În urma exercitării acestei presiuni, se constată o scădere de $1/30\,000$ a volumului cubului. Să se determine constanta lui Poisson m și modulul de elasticitate transversal G , cunoscând pe $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Eforturile unitare care se produc pe cele trei fețe ale cubului sînt egale cu presiunea lichidului, deci se poate scrie:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p = -50 \text{ daN/cm}^2. \quad (1)$$

Semnul minus arată că eforturile unitare sînt de compresiune.

Din cauza simetriei, scurtările specifice pe cele trei direcții sînt egale și formula (7.19):

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -\frac{1}{30\,000}$$

se transformă în:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_v}{3}. \quad (2)$$

Înlocuind în prima formulă (7.25):

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_1 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_v \right),$$

se obține:

$$p = \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{\varepsilon_v}{3} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_v \right]. \quad (3)$$

Din ecuația (3) se găsește necunoscuta:

$$\nu = \frac{3p - E\varepsilon_v}{6p} = \frac{3 \cdot (-50) - 2,1 \cdot 10^6 \cdot \left(-\frac{1}{30\,000}\right)}{6 \cdot (-50)} = 0,267.$$

Constanta lui Poisson m va fi inversul acestui coeficient, adică:

$$m = \frac{1}{\nu} = 3,75.$$

Din formula (7.26) se obține:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{2,1 \cdot 10^6}{2 \cdot (1 + 0,267)} = 830\,000 \text{ daN/cm}^2.$$

7.19. Un element de volum este sollicitat în plan ca în figura 7.19, cu eforturile unitare $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$.

Într-o secțiune înclinată la 45° față de iaturile cubului, apar eforturile unitare $\tau = \sigma$ (forfecare pură). Să se găsească relația între modulul de elasticitate longitudinal și cel transversal, pe baza egalității energiei specifice de deformare corespunzătoare celor două poziții ale elementului de volum.

Rezolvare. Energia specifică de deformare datorită întinderii și compresiunii are expresia (7.27):

$$U'_1 = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2}.$$

Deformațiile specifice sînt, conform relațiilor (7.22):

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma(1 + \nu)}{E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} = \frac{-\sigma(1 + \nu)}{E};$$

$$U'_1 = \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\sigma(1 + \nu)}{E} + \frac{(-\sigma)}{2} \left[\frac{-\sigma(1 + \nu)}{E} \right] = \frac{\sigma^2(1 + \nu)}{E}.$$

Energia specifică de deformare pentru forfecarea pură, ținînd seama că $\sigma = \tau$, are expresia:

$$U'_1 = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\sigma^2}{2G}.$$

Egalînd cele două expresii, se obține:

$$\frac{\sigma^2}{2G} = \frac{\sigma^2(1 + \nu)}{E}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Se regăsește relația (7.26).

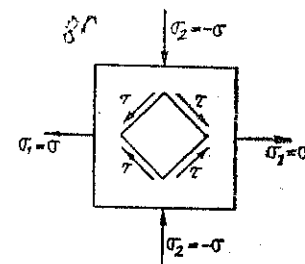


Fig. 7.19

7.20. Se dă bara AB , sollicitată la întindere de forța P , ca în figura 7.20. Bara este de secțiune dreptunghiulară: $a \times b$ și lungime l .

Se cere să se determine lungirea segmentului OE , cînd se ține seama de contracția transversală.

Aplicație pentru oțel cu $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm²; $\nu = 0,3$; $P = 150$ kN; $a = 8$ cm; $b = 4$ cm; $\alpha = 30^\circ$;

Rezolvare. Eforturile unitare pe direcțiile x, y, z sînt:

$$\sigma_x = \frac{P}{ab}, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Înlocuind aceste valori în formulele (7.21), se obține:

$$\varepsilon_x = \frac{P}{Eab}, \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{P}{Eab}, \quad \gamma_{xy} = 0.$$

Alungirea ε_a pe direcția OE este (7.16):

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

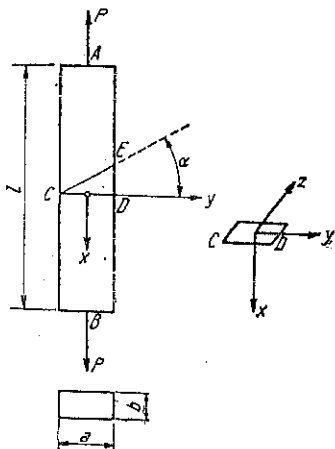


Fig. 7.20

Deoarece $\gamma_{xy} = 0$, rezultă:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{Eab} - \nu \frac{P}{Eab} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{P}{Eab} + \nu \frac{P}{Eab} \right) \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \frac{P}{Eab} [(1 - \nu) - (1 + \nu) \cos 2\alpha],$$

$$\overline{OE} = \frac{a}{\cos \alpha}; \quad \Delta \overline{OE} = \overline{OE} \varepsilon_a = \frac{a \varepsilon_a}{\cos \alpha}.$$

Aplicație numerică:

$$\varepsilon_{30^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15000}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 4} \left[(1 - 0,3) - (1 + 0,3) \frac{1}{2} \right] = 0,56 \cdot 10^{-5},$$

$$\Delta \overline{OE} = \frac{8 \cdot 0,56 \cdot 10^{-5}}{0,866} = 5,20 \cdot 10^{-5} \text{ cm}.$$

7.21. O epruvetă cilindrică este fixată între două plăci rigide orizontale, ca în figura 7.21. Să se calculeze energia specifică de deformare și energia specifică de variație a formei, știind că epruveta este supusă acțiunii unei presiuni hidrostatice p și unei variații de temperatură Δt . Se cunosc, pentru materialul epruvetei: coeficientul de dilatare termică liniară α , modulul de elasticitate E și coeficientul de contracție transversală ν .

Rezolvare. Direcțiile sistemului de coordonate la care este raportată epruveta sînt direcții principale. Pe direcția axei epruvetei, $\varepsilon_x = \varepsilon_1 = 0$, ceea ce se scrie explicit pornind de la prima din relațiile (7.24), la care se adaugă termenul $\alpha \Delta t$, reprezentînd deformarea specifică produsă de variația de temperatură:

$$\alpha \Delta t + \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0;$$

de asemenea se cunosc

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_2 = \sigma_3 = -p.$$

Din aceste condiții rezultă

$$\sigma_1 = -2\nu p - E\alpha \Delta t.$$

Înlocuind aceste valori în relația (7.29) se obține expresia energiei specifice de deformare

$$U_1 = \frac{1}{2E} [(E\alpha \Delta t)^2 + 2(1 + \nu)(1 - 2\nu)p^2],$$

iar cu relația (7.31) se calculează energia specifică de variație a formei

$$U_{1f} = \frac{1 + \nu}{3E} [p(1 - 2\nu) - E\alpha \Delta t]^2.$$

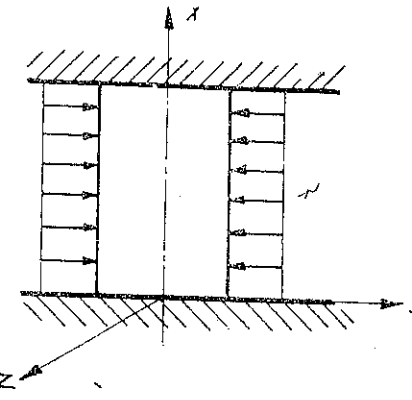


Fig. 7.21

C. PROBLEME NEREZOLVATE

7.22. Să se deseneze cercul lui Mohr și să se găsească eforturile unitare și direcțiile principale pentru următoarele stări plane de eforturi unitare:

- $\sigma_x = 700$ daN/cm²; $\sigma_y = 300$ daN/cm²; $\tau_{xy} = 200$ daN/cm²;
- $\sigma_x = -250$ daN/cm²; $\sigma_y = -500$ daN/cm²; $\tau_{xy} = 250$ daN/cm²;
- $\sigma_x = 300$ daN/cm²; $\sigma_y = -100$ daN/cm²; $\tau_{xy} = 0$;
- $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 400$ daN/cm²;
- $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 450$ daN/cm²; $\tau_{xy} = -450$ daN/cm²;
- $\sigma_x = 600$ daN/cm²; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = 300$ daN/cm².

Indicație. Se va proceda ca în cazul problemei 7.7.

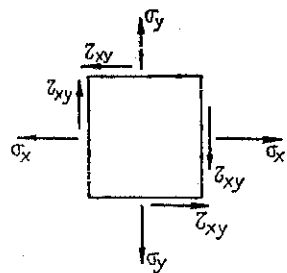


Fig. 7.23

7.23. Un element de volum, izolat dintr-o piesă (Fig. 7.23) este supus eforturilor unitare σ_x , σ_y și τ_{xy} ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$). Se cere:

1. Să se determine eforturile unitare principale și direcțiile principale, în următoarele cazuri:

- a) $\sigma_x = 400 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_y = 300 \text{ daN/cm}^2$; $\tau_{xy} = 300 \text{ daN/cm}^2$;
 b) $\sigma_x = -400 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_y = 300 \text{ daN/cm}^2$; $\tau_{xy} = 300 \text{ daN/cm}^2$;

- c) $\sigma_x = 400 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_y = -300 \text{ daN/cm}^2$; $\tau_{xy} = 300 \text{ daN/cm}^2$.

2. Să se determine eforturile unitare tangențiale maxime și direcțiile planelor în care sînt conținute pentru cazul a).

Răspuns:

1. a) $\sigma_1 = 655 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_2 = 45 \text{ daN/cm}^2$;
 $\alpha_1 = 40^\circ 16'$; $\alpha_2 = 130^\circ 16'$.
 b) $\sigma_1 = 411 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_2 = -511 \text{ daN/cm}^2$;
 $\alpha_1 = -20^\circ 16'$; $\alpha_2 = 69^\circ 44'$.
 c) $\sigma_1 = 511 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_2 = -411 \text{ daN/cm}^2$;
 $\alpha_1 = 20^\circ 16'$; $\alpha_2 = 110^\circ 16'$.
 2. $\tau_{1,2} = \pm 305 \text{ daN/cm}^2$; $\alpha'_1 = -4^\circ 44'$; $\alpha'_2 = 85^\circ 16'$.

7.24. Să se calculeze valorile eforturilor unitare principale pentru următoarele stări spațiale de eforturi unitare:

- a) $\sigma_x = 200 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_y = 400 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_z = 600 \text{ daN/cm}^2$;
 $\tau_{yx} = \tau_{zx} = 0$; $\tau_{xy} = 300 \text{ daN/cm}^2$;
 b) $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\sigma_z = 200 \text{ daN/cm}^2$;
 $\tau_{yx} = 200 \text{ daN/cm}^2$; $\tau_{zx} = 300 \text{ daN/cm}^2$; $\tau_{xy} = 400 \text{ daN/cm}^2$;
 c) $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\sigma_z = 100 \text{ daN/cm}^2$;
 $\tau_{yx} = \tau_{zx} = 0$; $\tau_{xy} = 100 \text{ daN/cm}^2$;

Răspuns:

- a) $\sigma_1 = 630 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_2 = 590 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_3 = -20 \text{ daN/cm}^2$.
 b) $\sigma_1 = 670 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_2 = 47 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_3 = -516 \text{ daN/cm}^2$.
 c) $\sigma_1 = 100 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_2 = 100 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_3 = -100 \text{ daN/cm}^2$.

SOLICITĂRI COMPUSE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Efortul unitar normal care se produce în fibrele extreme ale unei bare, solicitată la întindere sau compresune de o forță N și la încovoiere de un moment $M_z = M$ este:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W}, \quad (8.1)$$

în cazul cînd Oz este axă de simetrie și:

$$\sigma' = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_1}, \quad \sigma'' = \frac{N}{A} - \frac{M}{W_2},$$

în cazul cînd axa Oz nu este axă de simetrie.

2. Efortul unitar într-un punct oarecare al secțiunii unei bare, solicitată de o forță axială excentrică, cum se vede în figura 8.a, este:

$$\sigma = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_0 y}{i_z^2} + \frac{z_0 z}{i_y^2} \right). \quad (8.2)$$

3. Ecuația axei neutre, pentru cazul de mai sus, este:

$$1 + \frac{y_0 y}{i_z^2} + \frac{z_0 z}{i_y^2} = 0. \quad (8.3)$$

4. Simburele central al unei secțiuni este conturul în interiorul căruia se poate aplica o forță normală excentrică, astfel încît în secțiune efortul unitar σ să fie de un singur semn.

Simburele central este:

- a) la secțiunea circulară: un cerc de diametru $d/4$;
 b) la dreptunghiul de laturi b și h : un romb cu diagonalele $h/3$ în lungul lui h și $b/3$ în lungul lui b .

5. În cazul unui masiv de zidărie comprimat excentric, la care axa neutră taie secțiunea, se ia în calcul numai partea din secțiune comprimată, numită secțiune activă, hașurată în figura 8. b.

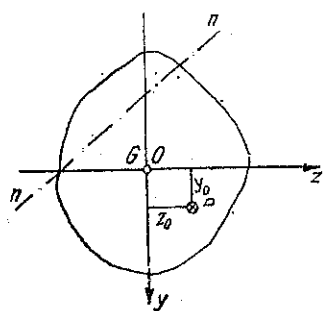


Fig. 8. a

În cazul secțiunii dreptunghiulare, pe care forța excentrică este aplicată într-un punct al unei axe principale, la distanța $c < h/3$ (Fig. 8. b), efortul unitar maxim are loc în punctul C și are valoarea:

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3bc} \quad (8.4)$$

6. La un cablu cu n fire, fiecare de diametru d , supus unei forțe de întindere N și înfășurat pe o tobă de diametru D , efortul unitar maxim este:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{n \frac{\pi d^2}{4}} + \frac{Ed}{D} \quad (8.5)$$

7. Un arbore cu secțiunea circulară, solicitat la încovoiere de un moment M_x și la răsucire de un moment M_t , se poate dimensiona ca și când ar fi solicitat numai la încovoiere de un moment încovoietor echivalent M_{ie} :

$$W_{nec} = \frac{M_{ie}}{\sigma_a} = \frac{\pi d^3}{32}, \quad (8.6)$$

unde momentul M_{ie} are, în diferitele teorii de rezistență, următoarele expresii:

Teoria I, a efortului unitar normal maxim:

$$M_{ie} = \frac{1}{2} (M_x + \sqrt{M_x^2 + M_t^2}). \quad (8.7)$$

Teoria II, a deformației specifice maxime:

$$M_{ie} = 0,35 M_x + 0,65 \sqrt{M_x^2 + M_t^2}. \quad (8.8)$$

Teoria III, a efortului unitar tangențial maxim:

$$M_{ie} = \sqrt{M_x^2 + M_t^2}. \quad (8.9)$$

Teoria IV, a energiei de deformație:

$$M_{ie} = \sqrt{M_x^2 + 0,65 M_t^2} \text{ sau } M_{ie} = \sqrt{M_x^2 + 0,75 M_t^2}. \quad (8.10)$$

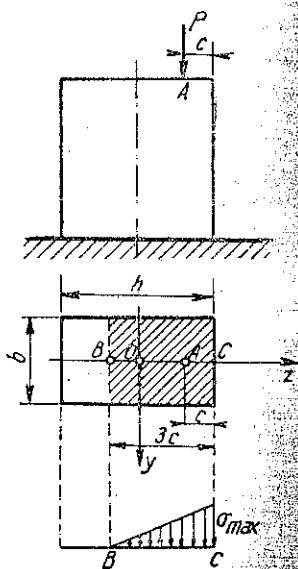


Fig. 8. b

8. În cazul general al unei bare drepte în care se produc eforturi unitare σ și τ , verificarea după cele patru teorii se face cu următoarele relații:

Teoria I:

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \leq \sigma_a. \quad (8.11)$$

Teoria II:

$$\sigma_{ech} = 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a. \quad (8.12)$$

Teoria III:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a. \quad (8.13)$$

Teoria IV, varianta I, cînd $\sigma > 0$:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 2,6\tau^2} \leq \sigma_a. \quad (8.14)$$

Teoria IV, varianta II, cînd $\sigma < 0$:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_a. \quad (8.15)$$

9. Pentru determinarea simbului central, dacă punctul de aplicație al forței are coordonatele y_0 și z_0 , iar fibrele extreme au y_{max} și z_{max} , se poate scrie:

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_{max}}, \quad z_0 = -\frac{i_y^2}{z_{max}}. \quad (8.16)$$

B. PROBLEME REZOLVATE

8.1. Dacă stîlpul de lemn AB din figura 8.1 are diametrul $d = 20$ cm, lungimea $h = 10$ m și greutatea $G = 150$ daN, să se determine forța P cu care poate fi tras, sub unghiul de 30° , ca să nu se depășească $\sigma_a = 100$ daN/cm² (neglijînd flambajul).

Rezolvare. Secțiunea periculoasă este cea din încastrarea B , supusă la momentul încovoietor:

$$M = Th = Ph \sin 30^\circ,$$

și la forța axială:

$$N = G + Q = G + P \cos 30^\circ.$$

Se aplică formula (8.1):

$$\sigma_a = \frac{G + P \cos 30^\circ}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{Ph \sin 30^\circ}{\frac{\pi d^3}{32}},$$

$$100 = \frac{150 + \frac{\sqrt{3}}{2} P}{\frac{\pi \cdot 20^2}{4}} + \frac{P \cdot 1000 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\pi \cdot 20^3}{32}} = \frac{150 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} P}{314} + \frac{500 P}{785},$$

$$P = 95 \text{ daN.}$$

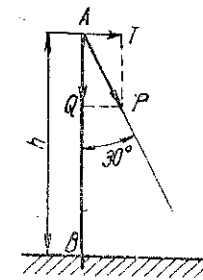


Fig. 8.1

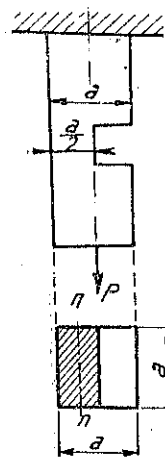


Fig. 8.2

8.2. Să se dimensioneze bara din figura 8.2, făcută din lemn, cu $\sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2$, întinsă prin forța $P = 1\,000 \text{ daN}$, neglijând efectele de concentrare a eforturilor unitare la variația de secțiune.

Rezolvare. Se vede că secțiunea periculoasă este un dreptunghi de dimensiuni a și $a/2$ și că această secțiune este solicitată la întindere cu forța P și la încovoiere cu momentul $M = Pe = Pa/4$.

Față de axa nn ce trece prin centrul de greutate, modulul de rezistență este:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{6} = \frac{a^3}{24}$$

Ecuatia de dimensionare a solicitărilor compuse dă:

$$\sigma_a = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{W} = \frac{P}{a^2} + \frac{P \frac{a}{4}}{\frac{a^3}{24}} = \frac{8P}{a^2}$$

$$a = \sqrt{\frac{8P}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1\,000}{100}} = 8,95 \text{ cm} \approx 9 \text{ cm}$$

8.3. O grindă de lemn avînd secțiunea dreptunghiulară $18 \times 24 \text{ cm}^2$ este solicitată ca în figura 8.3. Să se calculeze efortul unitar normal maxim ce se produce în grindă.

Rezolvare. Grinda este solicitată la încovoiere și întindere. Trebuie determinate eforturile în secțiunea cea mai solicitată.

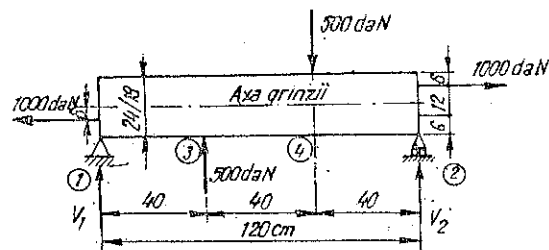


Fig. 8.3

1) Calculul reacțiunilor:

Se scrie ecuația de momente față de reazemul 2:

$$1,2V_1 + 500 \cdot (0,8 - 0,4) + 1\,000 \cdot 0,12 = 0;$$

$$V_1 = -267 \text{ daN}; V_2 = +267 \text{ daN}.$$

2) Calculul momentelor încovoietoare:

$$M_1 = 1\,000 \cdot 0,06 = 60 \text{ daNm};$$

$$M_3 = -267 \cdot 0,4 + 1\,000 \cdot 0,06 = -47 \text{ daNm};$$

$$M_4 = -M_3 = 47 \text{ daNm}; M_2 = -M_1 = -60 \text{ daNm}.$$

Rezultă că momentul maxim este de 60 daNm. Efortul unitar se calculează cu formula (8.1):

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{1\,000}{18 \cdot 24} \pm \frac{6\,000}{\frac{18 \cdot 24^2}{6}} = 2,31 \pm 3,47 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{\max} = 2,31 + 3,47 = 5,78 \text{ daN/cm}^2; \sigma_{\min} = 2,31 - 3,47 = -1,16 \text{ daN/cm}^2.$$

8.4. O grindă cu secțiunea dreptunghiulară este solicitată și rezemată ca în figura 8.4. Se cere locul geometric al punctelor din interiorul grinzii în care efortul unitar σ este nul.

Rezolvare.

$$V_1 = V_2 = \frac{Hh}{l}$$

Într-o secțiune x , momentul este:

$$M = \frac{Hh}{l} \left(\frac{l}{2} - x \right) - H \frac{h}{2}$$

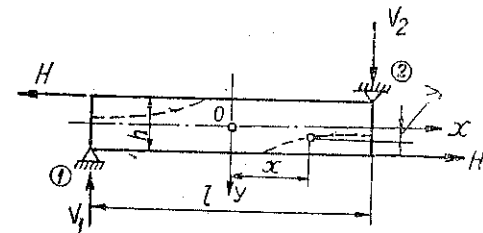


Fig. 8.4

Aplicînd formula (8.1) și ținînd seama că $I = bh^3/12$, se obține:

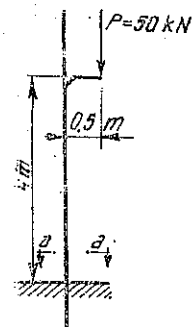
$$\sigma = \frac{H}{bh} - H \frac{h}{2} \frac{y}{I} + \frac{Hh}{l} \left(\frac{l}{2} - x \right) \frac{y}{I};$$

$$\sigma = \frac{H}{bh} - \frac{Hhy}{2 \frac{bh^3}{12}} + \frac{Hhl}{2l \frac{bh^3}{12}} \frac{y}{l} - \frac{Hh}{l} x \frac{y}{bh^3}, \quad \sigma = \frac{H}{bh} \left(1 - \frac{12xy}{hl} \right).$$

Egalînd valoarea lui σ cu zero, se obține:

$$xy = \frac{hl}{12}$$

Ecuția reprezintă o hiperbolă echilaterală reprezentată punctat pe figură.



3.5. Un stîlp metalic, format dintr-un profil I 20, este solicitat de o forță excentrică $P = 50 \text{ kN}$, așezată ca în figura 8.5. Să se verifice stîlpul arătînd dacă rezistă, știînd că $\sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2$ (neglijînd flambajul).

Rezolvare. În anexa 9 se găsește pentru un profil I 20:

$$A = 33,5 \text{ cm}^2; \quad W_z = 214 \text{ cm}^3.$$

Se aplică formula (8.1):

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W},$$

$$M = P \cdot e = 5\,000 \cdot 50 = 250\,000 \text{ daN cm},$$

$$\sigma = \frac{-5\,000}{33,5} \pm \frac{250\,000}{214} = -149 \pm 1\,168,$$

$$\sigma_{\max} = -149 + 1\,168 = +1\,019 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{\min} = -149 - 1\,168 = -1\,317 \text{ daN/cm}^2.$$

Secțiune a-a



Fig. 8.5

Se vede că eforturile unitare sînt mai mici decît rezistența admisibilă, deci stîlpul rezistă bine.

3.6. La batiul de fontă din figura 8.6, a cărui secțiune AB are formă de T, cu dimensiunile date, se cere să se calculeze valoarea maximă a forței P , ca să nu se depășească $\sigma_{at} = 300 \text{ daN/cm}^2$ și $\sigma_{ac} = 600 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Secțiunea AB este solicitată la încovoiere și la întindere. Distanța de la centrul de greutate al secțiunii la talpă este:

$$e_1 = \frac{10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 30 \cdot 3 \cdot 18}{10 \cdot 3 + 30 \cdot 3} = 13,8 \text{ cm};$$

$$e_2 = 33 - 13,8 = 19,2 \text{ cm}.$$

Momentul de inerție față de axa $z-z$ ce trece prin centrul de greutate este:

$$I_z = \frac{10 \cdot 3^3}{12} + 10 \cdot 3 \cdot 12,3^2 + \frac{3 \cdot 30^3}{12} + 3 \cdot 30 \cdot 4,2^2 = 12\,890 \text{ cm}^4.$$

Aria secțiunii este:

$$A = 10 \cdot 3 + 30 \cdot 3 = 120 \text{ cm}^2.$$

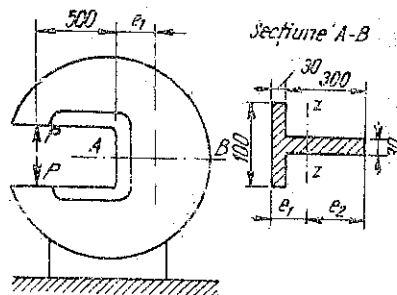


Fig. 8.6

Momentul încovoietor în secțiunea AB este:

$$M = P(50 + e_1) = P(50 + 13,8) = 63,8 P.$$

Talpa grinzii este solicitată la întindere, datorită momentului încovoietor și forței P . Efortul unitar nu trebuie să depășească rezistența admisibilă la întindere:

$$\sigma_{at} = \frac{P}{A} + \frac{M e_1}{I_z} = \frac{P}{120} + \frac{63,8 P \cdot 13,8}{12\,890} = 300 \text{ daN/cm}^2.$$

Din această relație, se obține:

$$P' = 3\,914 \text{ daN}.$$

Fibra extremă este solicitată la întindere de forța P și la compresiune datorită momentului încovoietor. Efortul unitar maxim de compresiune nu trebuie să depășească rezistența admisibilă de compresiune:

$$\sigma_{ac} = \frac{P}{A} - \frac{M e_2}{I_z} = \frac{P}{120} - \frac{63,8 P \cdot 19,2}{12\,890} = -600 \text{ daN/cm}^2.$$

De aici se obține:

$$P'' = 6\,920 \text{ daN}.$$

Valoarea maximă admisibilă a forței este $P' = 3\,914 \text{ daN}$, deoarece o depășire a acesteia ar duce la depășirea rezistenței admisibile la tracțiune.

3.7. Un cablu de oțel are $n = 222$ fire, cu diametrul $d = 1,2 \text{ mm}$. Să se calculeze sarcina pe care o poate susține cablul ca să nu se depășească rezistența admisibilă $\sigma_a = 2\,500 \text{ daN/cm}^2$ și apoi să se dimensioneze toba ca să nu se depășească $\sigma_{\max} = 4\,000 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Sarcina ce poate fi suportată de cablu este:

$$N = n \frac{\pi d^2}{4} \sigma_a = 222 \cdot \frac{\pi \cdot 0,12^2}{4} \cdot 2\,500 = 6\,277 \text{ daN}.$$

Cînd cablul este înfășurat pe toba, el este solicitat la întindere de sarcina utilă și la încovoiere, datorită înfășurării. Efortul unitar maxim are expresia (8.5):

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{n \frac{\pi d^2}{4}} + \frac{E d}{D}.$$

În această relație, primul termen din membrul al doilea are valoarea $2\,500\text{ daN/cm}^2$, iar $\sigma_{max} = 4\,000\text{ daN/cm}^2$:

$$4\,000 = 2\,500 + \frac{Ed}{D}$$

$$D = \frac{Ed}{1\,500} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,12}{1\,500} = 168\text{ cm.}$$

Dacă diametrul tobei este egal sau mai mare decât această valoare, nu se va depăși σ_{max} impus. Dacă motive constructive impun un diametru de tobă mai mic, se va folosi un cablu cu diametru mai mic al firelor, care dă eforturi unitare de încovoiere mai reduse.

8.3. Un profil I 16 este solicitat cu o forță de întindere excentrică $P=100\text{ kN}$ (Fig. 8.8). Care sînt valorile maxime ale excentricității, ca în secțiune să nu se producă un efort unitar mai mare de $1\,000\text{ daN/cm}^2$, în două alternative:

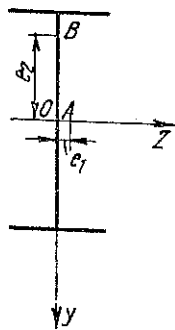


Fig. 8.8

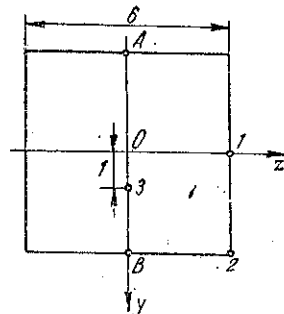


Fig. 8.9

- a) forța este aplicată pe axa Oz ;
b) forța este aplicată pe axa Oy .

Rezolvare. Pentru profilul I 16, se găsește în anexa 9: $A = 22,8\text{ cm}^2$; $W_z = 117\text{ cm}^3$; $W_y = 14,8\text{ cm}^3$.

a) Dacă forța acționează în punctul A, profilul este supus la întindere și la încovoiere față de axa y , cu un moment $M = Pe_1$:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W_y} = \frac{P}{A} + \frac{Pe_1}{W_y}; \quad 1\,000 = \frac{10\,000}{22,8} + \frac{10\,000 e_1}{14,8}$$

Din ecuația de mai sus rezultă că valoarea maximă a excentricității este:

$$e_1 = 0,83\text{ cm.}$$

b) Dacă forța lucrează în punctul B, profilul este supus la întindere și la încovoiere după axa z , cu un moment $M = Pe_2$:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W_z} = \frac{P}{A} + \frac{Pe_2}{W_z}; \quad 1\,000 = \frac{10\,000}{22,8} + \frac{10\,000 e_2}{117}$$

$$e_2 = 6,57\text{ cm.}$$

8.9. Se dă o secțiune pătrată a unei bare de oțel, supusă unei forțe excentrice $P = 60\text{ kN}$. Să se calculeze eforturile unitare care apar în punctele A și B, figura 8.9, în trei cazuri:

- a) forța se aplică în punctul 1;
b) forța se aplică în punctul 2;
c) forța se aplică în punctul 3.

Rezolvare. $A = 36\text{ cm}^2$; $W_z = W_y = 36\text{ cm}^3$.

a) Cînd forța P este aplicată în punctul 1, există încovoiere numai față de axa AB. Cum aceasta este chiar axă neutră, în A și B nu apare încovoiere.

Rămîne numai compresiunea:

$$\sigma_A = \sigma_B = -\frac{P}{A} = -\frac{6\,000}{36} = -167\text{ daN/cm}^2.$$

b) Punctul 2 este situat excentric față de axa Oz (el este excentric și față de Oy , dar punctele A, B sînt în acest caz pe axa neutră), forța producînd un moment încovoiator $M_z = 3 \cdot 6\,000\text{ daNm}$:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{M_z}{W_z} = -167 + 500 = 333\text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{M_z}{W_z} = -167 - 500 = -667\text{ daN/cm}^2.$$

c) Punctul 3 este excentric față de Oz și dă un moment $M_z = 1 \cdot 6\,000\text{ daNm}$:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{M_z}{W_z} = -167 + 167 = 0,$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{M_z}{W_z} = -167 - 167 = -334\text{ daN/cm}^2.$$

8.10. Să se determine simburile central pentru secțiunea din figura 8.10, unde cotele sînt date în cm.

Rezolvare. Determinăm, în prealabil, centrul de greutate. Coordonatele sale față de sistemul de axe ZOY vor fi:

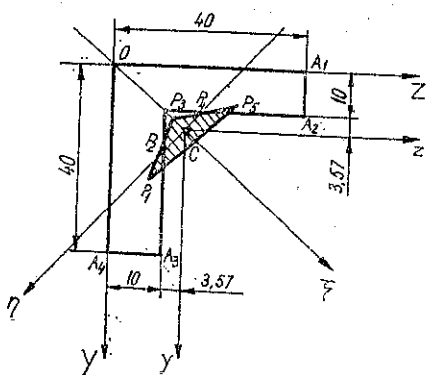


Fig. 8.10

$$Z_c = X_c = \frac{10 \cdot 40 \cdot 20 + 30 \cdot 10 \cdot 5}{10 \cdot 40 + 30 \cdot 10} = 13,57 \text{ cm.}$$

Față de sistemul de axe Cxy, ce trece prin centrul de greutate, momentele de inerție sînt:

$$I_x = I_y = \frac{10 \cdot 40^3}{12} + 10 \cdot 40 \cdot 6,43^2 + \frac{30 \cdot 10^3}{12} + 30 \cdot 10 \cdot 8,57^2 = 94\,400 \text{ cm}^4,$$

$$I_{xy} = -10 \cdot 40 \cdot 6,43 \cdot 8,57 - 30 \cdot 10 \cdot 11,43 \cdot 8,57 = -51\,430 \text{ cm}^4.$$

Trecînd la axele principale de inerție $O\xi\eta$, care fac cu vechile axe unghiuri de 45° , se obține (v. relația (2.13)):

$$I_\xi = I_x \cos^2 45^\circ + I_y \sin^2 45^\circ - I_{xy} \sin 90^\circ = 2 \cdot 94\,400 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 51\,430 = 145\,830 \text{ cm}^4;$$

$$I_\eta = I_x \cos^2 135^\circ + I_y \sin^2 135^\circ - I_{xy} \sin 270^\circ = 2 \cdot 94\,400 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 51\,430 = 43\,000 \text{ cm}^4.$$

Se vor considera ca poziții limită ale axei neutre dreptele OA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 și A_4O . Din motive de simetrie se vor considera doar primele trei drepte. Coordonatele punctelor O, A_1 și A_2 sînt:

$$O; \xi = -13,57 \sqrt{2} = -19,1 \text{ cm}; \eta = 0,$$

$$A_1; \xi = -19,1 + 40 \frac{\sqrt{2}}{2} = +9,2 \text{ cm}; \eta = -40 \frac{\sqrt{2}}{2} = -28,3 \text{ cm},$$

$$A_2; \xi = 9,2 + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = +16,3 \text{ cm}; \eta = -28,3 + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -21,2 \text{ cm}.$$

Ecuațiile dreptelor OA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 vor fi:

$$(OA_1); \frac{\xi + 19,1}{9,2 + 19,1} = \frac{\eta}{-28,3} \text{ sau } \xi + \eta + 19,1 = 0,$$

$$(A_1A_2); \frac{\xi - 16,3}{9,2 - 16,3} = \frac{\eta + 21,2}{-28,3 + 21,2} \text{ sau } \xi - \eta - 37,5 = 0,$$

$$(A_2A_3); \xi - 16,3 = 0.$$

Antipolurile acestor drepte au coordonatele:

$$P_1, \text{ pentru dreapta } (OA_1); \xi = -\frac{7,83^2}{-19,1} = +3,21 \text{ cm},$$

$$\eta = -\frac{14,4^2}{-19,1} = +10,8 \text{ cm};$$

$$P_2, \text{ pentru dreapta } (A_1A_2); \xi = -\frac{7,83^2}{37,5} = -1,63 \text{ cm},$$

$$\eta = -\frac{14,4^2}{-37,5} = +5,53 \text{ cm};$$

$$P_3, \text{ pentru dreapta } (A_2A_3); \xi = -\frac{7,83^2}{16,3} = -3,76 \text{ cm}, \eta = 0.$$

Punctele P_1 , P_2 , P_3 au fost însemnate în figura 8.10. În aceeași figură au fost însemnate și punctele P_4 și P_5 , simetrice punctelor P_2 și P_1 față de axa $O\xi$. Unind în ordine $P_1P_2P_3P_4P_5$, se obține un pentagon care limitează simburile central al secțiunii.

8.11. Un zid de sprijin al unui masiv de pământ are forma din figura 8.11, cu dimensiunile $h = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, și este făcut dintr-un material cu greutatea specifică $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$. Împingerea pământului dă, pe unitatea de lungime a zidului, o rezultantă $H = 30 \text{ kN/m}$, aplicată la înălțimea $h/3$ de la baza zidului. Se cere să se calculeze eforturile unitare maxim și minim care se nasc pe baza zidului.

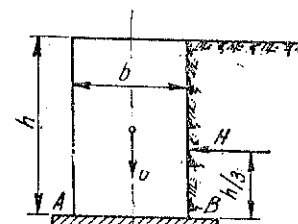


Fig. 8.11

Rezolvare. Considerind o porțiune de zid, perpendiculară pe desen, de 1 m lungime, greutatea sa este:

$$G = bh \cdot \gamma = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 20 = 120 \text{ kN} = 12\,000 \text{ daN}.$$

Pe lungimea de 1 m, forța orizontală este $H = 30 \text{ kN}$.

Momentul încovoietor care solicită baza zidului este:

$$M = H \frac{h}{3} = 30 \cdot \frac{3}{3} = 30 \text{ kNm} = 300\,000 \text{ daNcm}.$$

Secțiunea care suportă solicitarea maximă de încovoiere este baza zidului, de înălțime (paralel cu forța H) $b = 2 \text{ m}$ și lățime 1 m. Punctul cel mai solicitat este A , unde eforturile unitare datorite încovoierii produse de H și compresiunii produse de G sînt de același semn:

$$\sigma_A = -\frac{G}{A} - \frac{M}{W} = -\frac{12\,000}{200 \cdot 100} - \frac{300\,000}{\frac{100 \cdot 200^2}{6}} = -0,6 - 0,45 = -1,05 \text{ daN/cm}^2.$$

În punctul B , rezultă:

$$\sigma_B = -\frac{G}{A} + \frac{M}{W} = -0,6 + 0,45 = -0,15 \text{ daN/cm}^2.$$

Se vede că pe întreaga bază a zidului apar numai eforturi unitare de compresiune, deci toată secțiunea este activă.

8.12. Să se determine eforturile unitare pe terenul de fundație al unui stîlp, știind că la nivelul superior al fundației acționează forțele $P = 160 \text{ kN}$ și $H = 7 \text{ kN}$ (Fig. 8.12). Blocul de fundație este alcătuit din beton simplu, avînd greutatea specifică $\gamma = 22 \text{ kN/m}^3$.

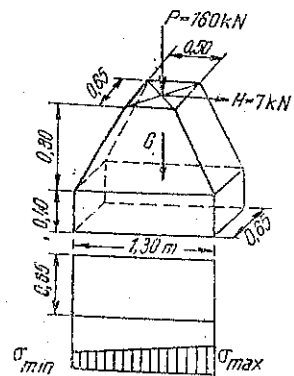


Fig. 8.12

Rezolvare. Greutatea G a blocului de fundație este:

$$G = \left(1,30 \cdot 0,40 + \frac{1,30 + 0,50}{2} \cdot 0,80 \right) \times 0,65 \cdot 22 = 17,7 \text{ kN}.$$

Reducînd sistemul de forțe în raport cu centrul de greutate al suprafeței de sprijin se obține:

$$N = P + G = 160 + 17,7 = 177,7 \text{ kN},$$

$$M = 7 \cdot (0,80 + 0,40) = 8,4 \text{ kNm}.$$

Excentricitatea este:

$$e = \frac{M}{N} = \frac{8,4}{177,7} = 0,0473 \text{ m} < \frac{1,30}{6},$$

deci eforturile unitare vor fi de compresiune pe toată secțiunea. Eforturile unitare maxime și minime vor fi:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{177,7}{1,3 \cdot 0,65} + \frac{8,4}{\frac{0,65 \cdot 1,3^2}{6}} = 210 + 47 = 257 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 2,57 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = 210 - 47 = 163 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 1,63 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Diagrama variației eforturilor unitare este arătată în figura 8.12.

8.13. Să se verifice profilul U16 din figura 8.13, a, știind că este solicitat de o forță $P = 17\,000 \text{ daN}$, acționînd în marginea sa, iar $\sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Profilul este solicitat la întindere și la încovoiere, respectiv cu eforturile:

$$N = P = 17\,000 \text{ daN}; M_y = P \cdot e = 17\,000 \cdot 1,84 = 31\,300 \text{ daNcm}.$$

Axa Oy nefiînd axă de simetrie, se va utiliza formula generală:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} \quad (1)$$

Pentru a se afla eforturile unitare maxime, va trebui ca în formula (1) să se înlocuiască z cu valorile maxime e și $(a - e)$. În punctul 1 al secțiunii, care se găsește la distanța e de axa neutră, eforturile unitare se adună, iar în punctul 2, care se găsește la distanța $(a - e)$ de axa neutră, eforturile unitare se scad (Fig. 8.13, b).

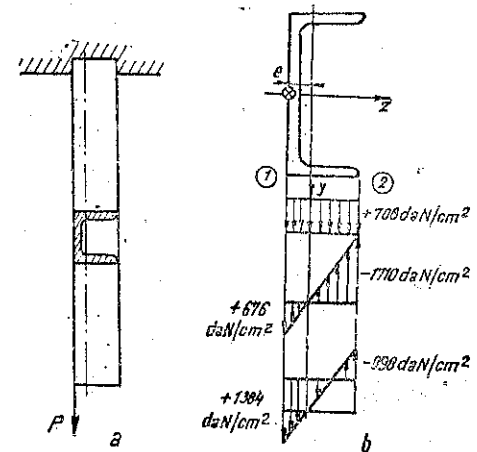


Fig. 8.13

Rezultă :

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M_y e}{I_y} = \frac{17\,000}{24} + \frac{31\,300 \cdot 1,84}{85,3} = 708 + 676 = 1\,384 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M_y(a-e)}{I_y} = \frac{17\,000}{24} - \frac{31\,300 \cdot (6,5 - 1,84)}{85,3} = 708 - 1\,710 = -1\,002 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar maxim, σ_1 , este mai mic decât rezistența admisibilă $\sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2$, deci profilul rezistă în bune condiții.

Observație. Aplicarea directă a relației (8.1) ar fi dus la un rezultat eronat. Într-adevăr, această relație, scrisă în cazul nostru sub forma :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y},$$

presupune că, în punctul 2, cel mai depărtat de axa neutră, eforturile unitare datorită efortului axial și momentului încovoietor se adună. Or, în realitate, în punctul 2 eforturile unitare se scad, așa cum s-a arătat mai sus.

8.14. Pentru bara din figura 8.14 se cere să se scrie ecuația axei neutre, să se calculeze valorile extreme ale efortului unitar normal și să se traseze diagrama de variație a acestuia pe secțiune. Se dau : $P = 30 \text{ kN}$; $a = 2 \text{ cm}$.

Rezolvare. Ordonata centrului de greutate al secțiunii, calculată în raport cu sistemul de coordonate z_1oy este

$$y_c = \frac{3a^2 \cdot 1,5a + 4a^2 \cdot 3,5a}{3a^2 + 4a^2} = 2,64a.$$

Momentele de inerție axiale centrale ale secțiunii, aria secțiunii și razele de inerție ale acesteia sînt :

$$I_z = \frac{a \cdot (3a)^3}{12} + (2,64a - 1,5a)^2 \cdot 3a^2 + \frac{4a \cdot a^3}{12} + (3,5a - 2,64a)^2 \cdot 4a^2 = 9,44a^4;$$

$$I_y = \frac{3a \cdot a^3}{12} + \frac{a \cdot (4a)^3}{12} = 5,58a^4; A = 7a^2;$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{9,44}{7}} a = 1,16a; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{5,58}{7}} a = 0,89a.$$

Avînd în vedere că punctul de aplicație al forței P are coordonatele $z_0 = a$; $y_0 = 1,36a$, ecuația axei neutre este dată de relația (8.3) :

$$\frac{1,36a}{(1,16a)^2} y + \frac{a}{(0,89a)^2} z + 1 = 0$$

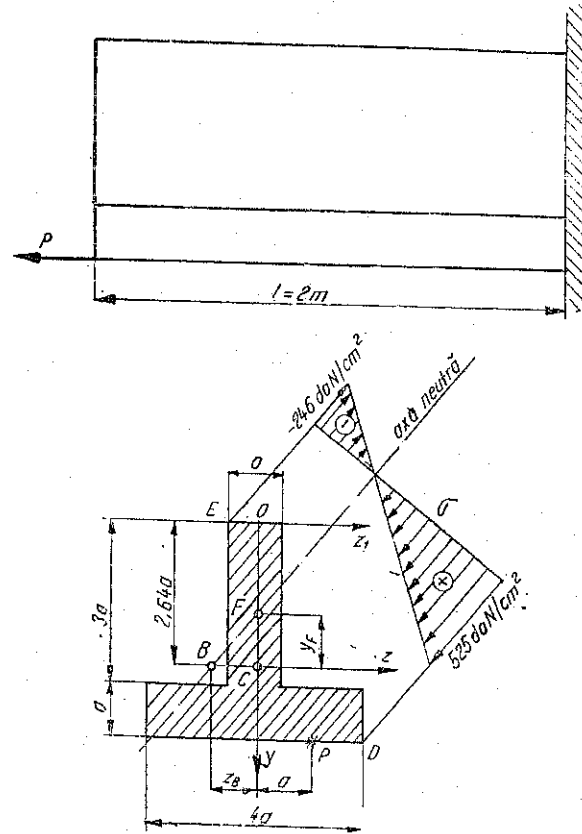


Fig. 8.14

sau

$$1,01y + 1,26z + a = 0.$$

Această dreaptă intersectează sistemul de coordonate zCy în punctele B și F , și anume :

$$z_B = -\frac{a}{1,26} = -0,79a; y_F = -\frac{a}{1,01} = -0,99a.$$

Eforturile unitare se calculează cu relația (8.2) în care se înlocuiesc coordonatele z și y ale punctului care interesează. În cazul de față, efortul unitar maxim este în punctul D , pentru care $z_D = 2a$ și $y_D = 1,36a$:

$$\sigma_{\max} = \sigma_D = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{1,36 \cdot 1,36}{(1,16)^2} + \frac{1 \cdot 2}{(0,89)^2} \right] = 4,9 \frac{P}{A} = 4,9 \frac{3\,000}{7 \cdot 2^2} = 525 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar minim este în punctul E , pentru care

$$z_E = -0,5a; \quad y_E = -2,64a:$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} = \sigma_E &= \frac{P}{A} \left[1 - \frac{1,36 \cdot 2,64}{(1,16)^2} - \frac{1 \cdot 0,5}{(0,89)^2} \right] = \\ &= -2,3 \frac{P}{A} = -2,3 \frac{3\,000}{7 \cdot 2^2} = -246 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned}$$

8.15. Secțiunea unui stâlp, solicitat la compresiune de o forță P , este alcătuită dintr-un profil LL $120 \times 80 \times 10$ și un profil L $60 \times 60 \times 10$, ca în figura 8.15. Să se calculeze mărimea forței P pe care o poate suporta stâlpul, știind că $\sigma_a = 1\,100 \text{ daN/cm}^2$.

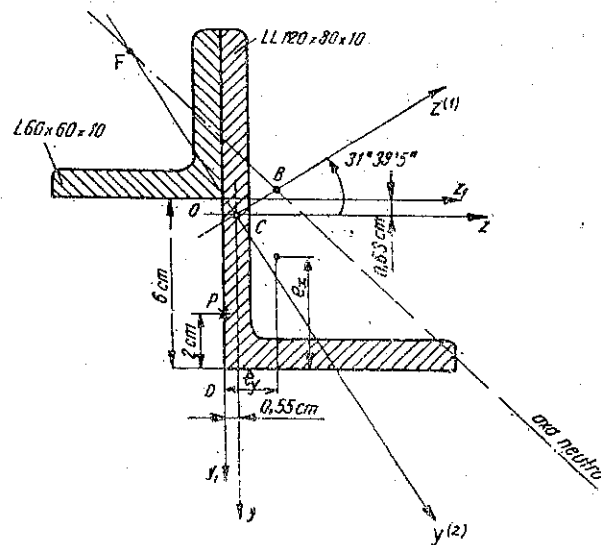


Fig. 8.15

Rezolvare. În anexele 6 și 7 se găsesc următoarele valori ale caracteristicilor geometrice ale celor două profile:

— pentru L $60 \times 60 \times 10$

$$A = 11,1 \text{ cm}^2; \quad e = 1,85 \text{ cm}; \quad I_x = I_y = 34,9 \text{ cm}^4; \quad I_u = 55,1 \text{ cm}^4; \quad I_v = 14,8 \text{ cm}^4;$$

— pentru LL $120 \times 80 \times 10$

$$A = 19,1 \text{ cm}^2; \quad e_x = 3,92 \text{ cm}; \quad e_y = 1,95 \text{ cm}; \quad I_x = 276 \text{ cm}^4; \quad I_y = 98,1 \text{ cm}^4; \quad \text{tg } \alpha = 0,435; \quad I_u = 317 \text{ cm}^4; \quad I_v = 56,8 \text{ cm}^4.$$

Coordonatele centrului de greutate al secțiunii, calculate în raport cu sistemul de axe z_1oy_1 sînt:

$$z_{1c} = \frac{19,1 \cdot 1,95 - 11,1 \cdot 1,85}{19,1 + 11,1} = 0,55 \text{ cm};$$

$$y_{1c} = \frac{19,1(6 - 3,92) - 11,1 \cdot 1,85}{19,1 + 11,1} = 0,63 \text{ cm}.$$

Aria secțiunii și momentele de inerție axiale centrale ale acesteia, în raport cu axele z și y sînt:

$$A = 19,1 + 11,1 = 30,2 \text{ cm}^2;$$

$$I_z = 276 + 19,1(6 - 0,63 - 3,92)^2 + 34,9 + 11,1(0,63 + 1,85)^2 = 419 \text{ cm}^4;$$

$$I_y = 98,1 + 19,1(1,95 - 0,55)^2 + 34,9 + 11,1(0,55 + 1,85)^2 = 234 \text{ cm}^4.$$

Deoarece în anexele 6 și 7 nu se dau, pentru cele două profile, valorile momentelor de inerție centrifugale, acestea se calculează astfel:

— pentru profilul L $60 \times 60 \times 10$ se are în vedere că $I_z = I_y$, din relația (2.15) se obține

$$I_{zy} = \frac{I_1 - I_2}{2} = \frac{I_u - I_v}{2} = \frac{1}{2}(55,1 - 14,8) = 20,15 \text{ cm}^4;$$

— pentru profilul LL $120 \times 80 \times 10$ direcțiile principale de inerție sînt rotite cu unghiul $\alpha = \text{arc tg } 0,435 = 23^\circ 30' 32''$ în raport cu direcțiile aripilor cornierului. Din relația (2.16) rezultă

$$I_{zy} = \frac{1}{2}(I_y - I_z) \text{tg } 2\alpha = \frac{1}{2}(234 - 419) \text{tg } 47^\circ 1' 4'' = -99,25 \text{ cm}^4.$$

Trebuie avut în vedere că aceste valori ale momentelor de inerție centrifugale s-au determinat în raport cu sistemele de coordonate reprezentate în anexele 6 și 7, care au axa y cu sens invers decît în

figura 8.15. Aceasta necesită schimbarea semnelor valorilor determinate mai sus. Momentul de inerție centrifugal al secțiunii din figura 8.15 este

$$I_{zy} = 99,25 + 19,1(6 - 3,92 - 0,63)(1,95 - 0,55) - 20,15 + 11,1(1,85 + 0,63)(1,85 + 0,55) = 184 \text{ cm}^4.$$

Direcțiile principale de inerție se calculează cu relația (2.16)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} = \frac{2 \cdot 184}{234 - 419} = -1,989;$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,989 = -31^\circ 39' 5''.$$

iar momentele de inerție principale cu relația (2.15)

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} =$$

$$= \frac{419 + 234}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(419 - 234)^2 + 4 \cdot 184^2}$$

$$I_1 = 532 \text{ cm}^4; \quad I_2 = 121 \text{ cm}^4.$$

În cele ce urmează, direcțiile principale se notează $z^{(1)}$ și $y^{(2)}$ (Fig. 8.15). Razele de inerție sînt

$$i_{z^{(1)}} = \sqrt{\frac{532}{30,2}} = 4,2 \text{ cm}; \quad i_{y^{(2)}} = \sqrt{\frac{121}{30,2}} = 2 \text{ cm}.$$

Coordonatele punctului de aplicație al forței P sînt:

— în raport cu axele zCy

$$z_0 = -0,55 \text{ cm}; \quad y_0 = 6 - 0,32 - 2 = 3,37 \text{ cm};$$

— în raport cu direcțiile principale $z^{(1)}Cy^{(2)}$

$$z_0^{(1)} = y_0 \sin \alpha + z_0 \cos \alpha = 3,37 \sin (-31^\circ 39' 5'') - 0,55 \cos (-31^\circ 39' 5'') = -2,24 \text{ cm};$$

$$y_0^{(2)} = y_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha = 3,37 \cos (-31^\circ 39' 5'') + 0,55 \sin (-31^\circ 39' 5'') = 2,58 \text{ cm}.$$

Ecuția axei neutre se scrie cu ajutorul relației (8.2)

$$\frac{2,58 y^{(2)}}{(4,2)^2} - \frac{2,24 z^{(1)}}{(2)^2} + 1 = 0.$$

Rezultă

$$0,146 y^{(2)} - 0,56 z^{(1)} + 1 = 0.$$

Această dreaptă intersectează direcțiile principale în punctele B și D , astfel:

$$z_B^{(1)} = \frac{1}{0,56} = 1,78 \text{ cm}; \quad y_D^{(2)} = -\frac{1}{0,146} = -6,85 \text{ cm}.$$

Efortul unitar σ_{max} se va produce în punctul D al secțiunii, fiind cel mai depărtat de axa neutră. El are coordonatele (în raport cu axele zCy): $z_D = -0,55 \text{ cm}$; $y_D = 6 - 0,63 = 5,37 \text{ cm}$.

În raport cu direcțiile principale acestea devin

$$z_D^{(1)} = 5,37 \sin (-31^\circ 39' 5'') - 0,55 \cos (-31^\circ 39' 5'') = -3,29 \text{ cm};$$

$$y_D^{(2)} = 5,37 \cos (-31^\circ 39' 5'') + 0,55 \sin (-31^\circ 39' 5'') = 4,28 \text{ cm}.$$

Punînd condiția $|\sigma|_{max} = \sigma_D = \sigma_a$, din relația (8.2) rezultă:

$$P = \frac{\sigma_a \cdot A}{1 + \frac{y_D^{(2)} \cdot y_0^{(2)}}{i_{y^{(2)}}^2} + \frac{z_D^{(1)} \cdot z_0^{(1)}}{i_{z^{(1)}}^2}} = \frac{1 \cdot 100 \cdot 30,2}{1 + \frac{4,28 \cdot 2,58}{(4,2)^2} + \frac{3,29 \cdot 2,24}{(2)^2}} = 9 \, 578 \text{ daN}.$$

8.16. La vîncul din figura 8.16, a se dă:

$$Q = 100 \text{ daN}; \quad b = 50 \text{ cm}; \quad c = 30 \text{ cm}; \quad d = 20 \text{ cm}; \quad e = 60 \text{ cm};$$

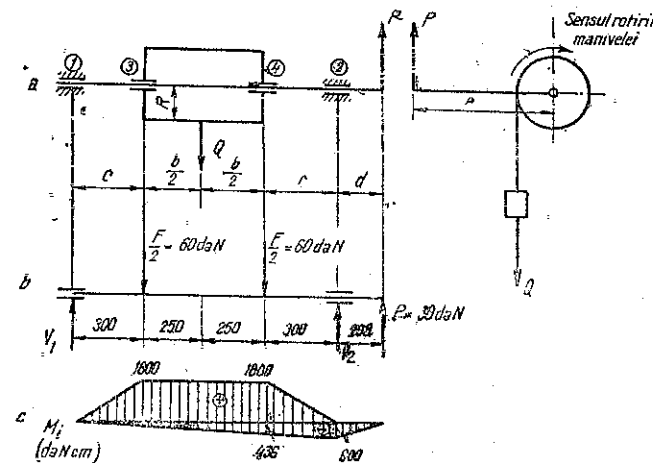


Fig. 8.16

$R = 15$ cm. Se cere:

a) să se calculeze forța P necesară ridicării, în perioada de accelerare a sarcinii Q , cu o accelerație $a = 2$ m/s²;

b) să se dimensioneze arborele cu $\sigma_a = 600$ daN/cm², considerînd sarcina aplicată în mijloc și rezemarea tobei pe arbore ca în desen.

Rezolvare. a) Forța care acționează cablul datorită accelerării sarcinii, are valoarea:

$$F = Q \left(1 + \frac{a}{g} \right) = 100 \left(1 + \frac{2}{9,81} \right) = 120 \text{ daN.}$$

Forța P aplicată pe manivelă este

$$P = F \frac{R}{e} = 120 \cdot \frac{15}{60} = 30 \text{ daN.}$$

b) Solicitarea maximă a arborelui are loc cînd manivela ocupă poziția orizontală din figură, deci cînd forța P este dirijată de jos în sus. Mutînd forța P în extremitatea liberă a arborelui, el este solicitat la încovoiere numai în planul vertical de forțele $\frac{F}{2}$, $\frac{F}{2}$ și P , iar la răsucire de cuplul Pe .

Construind diagrama de momente prin metoda suprapunerii efectelor (Fig. 8.16, c), rezultă momentul încovoietor maxim:

$$M_i = 60 \cdot 30 + 30 \cdot 20 \cdot \frac{80}{110} = 1800 + 436 = 2236 \text{ daNcm.}$$

Momentul de răsucire este constant pe intervalul 2—4 și are valoarea:

$$M_r = 30 \cdot 60 = 1800 \text{ daNcm.}$$

Momentul încovoietor echivalent după formula (8.7) este:

$$M_{ie} = \frac{1}{2} (M_i + \sqrt{M_i^2 + M_r^2}) = \frac{1}{2} (2236 + \sqrt{2236^2 + 1800^2}) = 2553 \text{ daNcm.}$$

Arborele se dimensionează cu formula:

$$W_{nec} = \frac{M_{ie}}{\sigma_a} = \frac{2553}{600} \approx 4,26 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d^3}{32}$$

Rezultă:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4,26}{\pi}} = 3,52 \text{ cm.}$$

Se alege diametrul $d = 35$ mm.

8.17. Arborele unei elice de avion se rotește cu $n = 2000$ rot/min și transmite o putere $N = 750$ kW. Știind că forța de tracțiune a elicei este $F = 750$ daN și diametrul arborelui este $d = 7$ cm, să se calculeze efortul unitar maxim care se produce în arbore.

Rezolvare. Momentul de răsucire al arborelui este:

$$M_r = 95500 \frac{N}{n} = 95500 \frac{750}{2000} = 35810 \text{ daNcm.}$$

Eforturile unitare produse de F și M_r sînt:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 750}{\pi \cdot 7^2} = 20 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau = \frac{M_r}{W_p} = \frac{M_r}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16 \cdot 35810}{\pi \cdot 7^3} = 532 \text{ daN/cm}^2.$$

Făcînd verificările cu cele patru formule ale teoriilor de rezistență (8.11), (8.12), (8.13) și (8.15), se obține:

$$\sigma_{ech} = \frac{1}{2} (20 + \sqrt{20^2 + 4 \cdot 532^2}) = 542 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{ech} = 0,35 \cdot 20 + 0,65 \sqrt{20^2 + 4 \cdot 532^2} = 699 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{20^2 + 4 \cdot 532^2} = 1064 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{20^2 + 3 \cdot 532^2} = 921 \text{ daN/cm}^2.$$

Cifra obținută trebuie să fie în toate cazurile mai mică decît σ_a . Valorile obținute diferă atît de mult una de alta, deoarece σ este aproape neglijabil. Solicitarea este, aproximativ, de forfecare pură, unde între diferitele teorii există diferențe de la simplu la dublu.

8.18. Să se dimensioneze arborele din figura 8.18, știind că transmite o putere $N = 112,5$ kW, sub o turație $n = 250$ rot/min. În capăt, arborele are un volant de greutate $G = 1000$ daN. Se dă $\sigma_a = 600$ daN/cm².

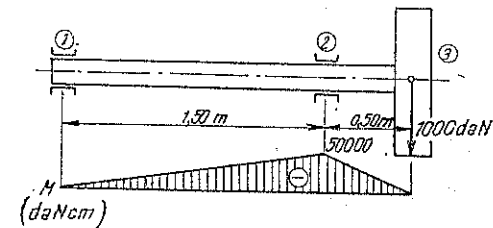


Fig. 8.18

Rezolvare. Arborele este solicitat de un moment de răsucire:

$$M_t = 95\,500 \frac{N}{n} = 95\,500 \frac{112,5}{250} = 43\,000 \text{ daNm.}$$

Datorită greutatei volantului, în reazemul 2 se produce un moment încovoietor negativ, avind valoarea:

$$M_i = 50 \cdot 1\,000 = 50\,000 \text{ daNm.}$$

Momentul încovoietor echivalent după teoria I de rezistență este:

$$M_{ie} = \frac{1}{2} (M_i + \sqrt{M_i^2 + M_t^2}) = \frac{1}{2} (50\,000 + \sqrt{50\,000^2 + 43\,000^2}) = 58\,000 \text{ daNm.}$$

Se dimensionează arborele:

$$W_{nec} = \frac{M_{ie}}{\sigma_a} = \frac{58\,000}{600} = 96,6 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d^3}{32}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 96,6}{\pi}} = 9,95 \text{ cm.}$$

Se ia un diametru normalizat, conform anexei 2: $d = 10 \text{ cm}$.

8.19. Să se dimensioneze bara din figura 8.19, din oțel, cu secțiunea circulară, știind că $M_x = 20 \text{ kNm}$, $D/d = 2$, $l = 1,5 \text{ m}$, $\sigma_a = 1\,200 \text{ daN/cm}^2$. Bara este încălzită cu $\Delta t = 30^\circ\text{C}$. Coeficientul de dilatare termică liniară este $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$. Se neglijează flambajul.

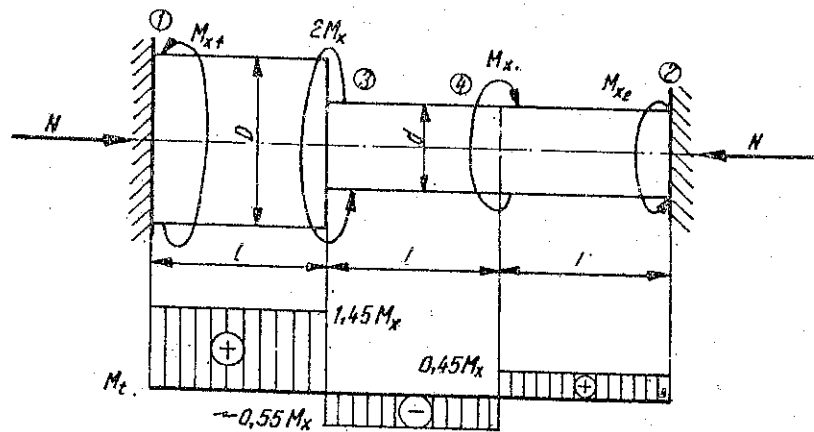


Fig. 8.19

Rezolvare. Datorită încălzirii, în bară se produce o solicitare de compresie cu forța N , a cărei valoare se determină din condiția ca lungirea termică să fie egală cu cea datorită compresiei:

$$3l \alpha \Delta t = \frac{Nl}{E\pi D^2} + \frac{N2l}{E\pi d^2},$$

din care rezultă

$$N = \frac{\pi D^2}{12} E \alpha \Delta t.$$

Efortul unitar maxim de compresie este

$$\sigma_{max} = \frac{N}{\pi d^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{D}{d} \right)^2 E \alpha \Delta t = \frac{4}{3} \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 30 = 1\,008 \text{ daN/cm}^2.$$

Ecuatia de echilibru pentru momentele de răsucire este

$$M_x - M_{x_1} = M_{x_2},$$

iar ecuația de deformații

$$\frac{M_x l}{GI_{p_1}} + \frac{(M_x - 2M_{x_1})l}{GI_{p_2}} + \frac{(M_{x_1} - M_{x_2})l}{GI_{p_2}} = 0,$$

în care s-au notat

$$I_{p_1} = \frac{\pi D^4}{32}; \quad I_{p_2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Rezultă

$$M_{x_1} = M_x \frac{3}{\frac{I_{p_1}}{I_{p_2}} + 2} = 1,45 M_x, \quad M_{x_2} = 0,45 M_x.$$

Cu ajutorul acestor valori s-a trasat în figura 8.19 diagrama momentelor de răsucire.

Din relația (8.15) a efortului unitar echivalent se poate determina valoarea efortului τ

$$\tau = \sqrt{\frac{\sigma_a^2 - \sigma}{3}} = \sqrt{\frac{1\,200^2 - 1\,008^2}{3}} = 376 \text{ daN/cm}^2,$$

cu care se dimensionează bara la răsucire (pe porțiunea 3 - 4)

$$W_{nec} = \frac{0,55 \cdot M_x}{\tau} = \frac{\pi d^3}{16}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,55 \cdot 20 \cdot 10^4}{\pi \cdot 376}} = 11,4 \text{ cm.}$$

Se va lua $d = 11,5 \text{ cm}$ și $D = 23 \text{ cm}$.

8.20. Să se dimensioneze arborele din figura 8.20, solicitat, cum se vede în desen, prin forțele din curele, diametrele celor două roți fiind egale. Se dă $\sigma_a = 800 \text{ daN/cm}^2$ și se cere să se facă dimensionarea folosind teoria I de rezistență.

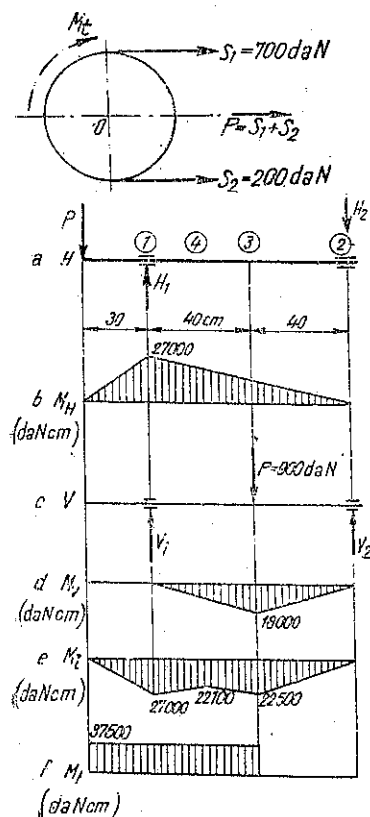
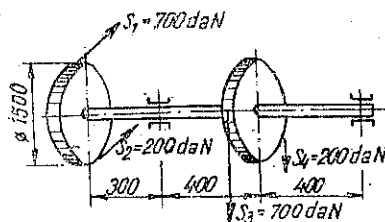


Fig. 8.20

Rezolvare. Pentru roata solicitată prin forțele orizontale, făcând reducerea în raport cu centrul O , sistemul celor două forțe se poate înlocui printr-o forță $P = S_1 + S_2$ aplicată în O și printr-un cuplu de răsucire $M_x = (S_1 - S_2)R$, unde $R = 75 \text{ cm}$:

$$P = S_1 + S_2 = 700 + 200 = 900 \text{ daN},$$

$$M_x = (S_1 - S_2)R = (700 - 200)75 = 37500 \text{ daNcm}.$$

Forțele de pe cealaltă roată se compun la fel și dau o rezultantă verticală și un moment de răsucire de aceeași valoare. Arborele este deci solicitat de un moment de răsucire constant M_x între cele două roți, o forță verticală de 900 daN pe roata din dreapta și una orizontală de 900 daN pe roata din stânga.

Se construiesc separat diagramele momentelor încovoietoare pentru forțele orizontale (Fig. 8.20, b) și verticale (8.20, d). Forța orizontală P din figura 8.20, a dă în reazemul 1 un moment:

$$M_{1H} = 900 \cdot 30 = 27000 \text{ daNcm},$$

și în reazemul 2 un moment nul, diagrama momentelor forțelor orizontale fiind cea din figura 8.20, b.

Forțele verticale P din figura 8.20, c îi corespunde diagrama din figura 8.20, d, cu momentul maxim:

$$M_{maxV} = \frac{900 \cdot 80}{4} = 18000 \text{ daNcm}.$$

Se compun diagramele M_H și M_V , spre a găsi secțiunea unde momentul încovoietor M este maxim.

$$M_{13} = \sqrt{18000^2 + 13500^2} = 22500 \text{ daNcm}.$$

Diagrama din figura 8.20, e arată că momentul încovoietor este maxim în reazemul 1.

$$M_{1e} = \frac{1}{2}(M_x + \sqrt{M_x^2 + M_t^2}) = \frac{1}{2}(27000 + \sqrt{27000^2 + 37500^2}) = 36650 \text{ daNcm}.$$

Se face dimensionarea arborelui:

$$W_{nec} = \frac{M_{1e}}{\sigma_a} = \frac{36650}{800} = 45,8 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d^3}{32},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 45,8}{\pi}} = 7,76 \text{ cm}.$$

Se ia diametrul normalizat, după anexa 2:

$$d = 80 \text{ mm}.$$

8.21. Să se rezolve problema 8.20 dacă în locul roților de curea sînt două tobe, fiecare de greutate $G = 100 \text{ daN}$, acționate de cite un cablu cu o tensiune $S = 500 \text{ daN}$.

Rezolvare. În acest caz, de pe toabă se desfășoară un singur fir și tensiunea sa S , aplicată tangențial, se înlocuiește prin forța S în centrul roții și printr-un moment de răsucire:

$$M_x = SR = 500 \cdot 75 = 37500 \text{ daNcm}.$$

Diagrama momentelor încovoietoare, date de forțele orizontale, este cea din figura 8.21, b.

În figura 8.21, c sînt trecute sarcinile verticale. Reacțiunea în reazemul 1 este:

$$V_1 = \frac{100 \cdot 110 + 600 \cdot 40}{80} = 437,5 \text{ daN}.$$

Momentele încovoietoare:

$$M_1 = -100 \cdot 30 = -3000 \text{ daNcm}.$$

$$M_3 = -100 \cdot 70 + 437,5 \cdot 40 = 10500 \text{ daNcm}.$$

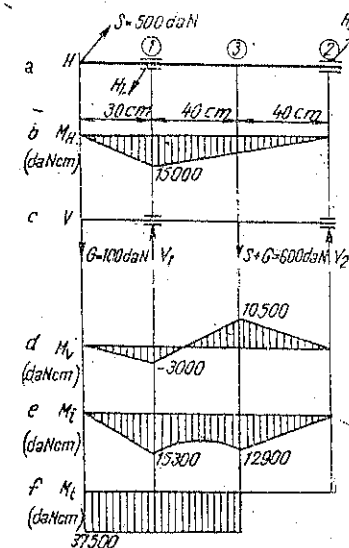


Fig. 8.21

Se obține diagrama din figura 8.21, *d*. Dacă se compun cele două diagrame 8.21, *b* și 8.21, *d*, se obține diagrama din figura 8.21, *e*, care arată că momentul maxim este în reazemul 1. Momentul incovoietor echivalent după teoria I de rezistență este:

$$M_{ie} = \frac{1}{2} (15\,300 + \sqrt{15\,300^2 + 37\,500^2}) = 27\,900 \text{ daNcm},$$

$$W_{acc} = \frac{M_{ie}}{\sigma_a} = \frac{27\,900}{\frac{1}{800}} = 34,9 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d^3}{32},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 34,9}{\pi}} = 7,10 \text{ cm}; \quad d = 71 \text{ mm}.$$

Se vede că, în cazul tobelor, pentru aceeași valoare a momentului de răsucire, este necesar un diametru de arbore mai mic, cu toate că s-a luat în considerare și greutatea tobelor, pe cînd la problema precedentă greutatea roților a fost neglijată.

8.22. În figura 8.22, *a* s-a reprezentat schematic arborele unui reductor și forțele de angrenare care acționează asupra celor două roți

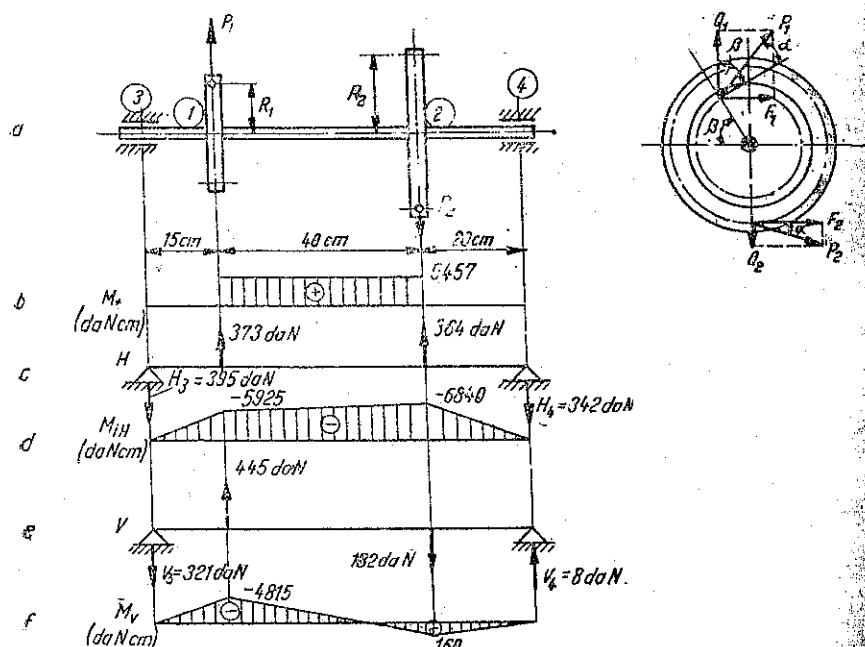


Fig. 8.22

dintate. Să se dimensioneze arborele de secțiune circulară, dacă $\sigma_a = 1\,100 \text{ daN/cm}^2$. Se dau: puterea $N = 40 \text{ kW}$, $n = 700 \text{ rot/min}$, $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 15 \text{ cm}$, $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Rezolvare. Momentul de răsucire pe care arborele îl transmite de la o roată dintată la cealaltă se calculează cu relația (6.8)

$$M_t = 95\,500 \frac{N}{n} = 95\,500 \frac{40}{700} = 5\,457 \text{ daNcm}.$$

Forțele de angrenare P_1 și P_2 trebuie să transmită acest moment, deci

$$P_1 = \frac{M_t}{R_1 \cos \alpha} = \frac{5\,457}{10 \cos 20^\circ} = 581 \text{ daN};$$

$$P_2 = \frac{M_t}{R_2 \cos \alpha} = \frac{5\,457}{15 \cos 20^\circ} = 387 \text{ daN}.$$

Diagrama momentului de răsucire s-a trasat în figura 8.22, *b*. Componentele forțelor de angrenare în plan orizontal, sînt

$$F_1 = P_1 \sin (\beta - \alpha) = 581 \sin 40^\circ = 373 \text{ daN};$$

$$F_2 = P_2 \cos \alpha = 387 \cos 20^\circ = 364 \text{ daN},$$

iar în plan vertical

$$Q_1 = P_1 \cos (\beta - \alpha) = 581 \cos 40^\circ = 445 \text{ daN};$$

$$Q_2 = P_2 \sin \alpha = 387 \sin 20^\circ = 132 \text{ daN}.$$

În figura 8.22, *c* s-a reprezentat schema de încărcare a arborelui în plan orizontal, iar în figura 8.22, *d* s-a desenat diagrama de momente incovoietoare corespunzătoare.

Pentru solicitarea în plan vertical, schema de încărcare și diagrama de momente sînt reprezentate în figurile 8.22, *e* și 8.22, *f*.

Momentul incovoietor total este maxim în secțiunea 1 și are valoarea

$$M_t^{(1)} = \sqrt{5\,925^2 + 4\,815^2} = 7\,635 \text{ daNcm}.$$

Momentul incovoietor echivalent se determină cu relația (8.10).

$$M_{schiv} = \sqrt{M_t^2 + 0,75 M_t^2} = \sqrt{7\,635^2 + 0,75 \cdot 5\,457^2} = 8\,979 \text{ daNcm}.$$

Diametrul arborelui este

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ech}}}{\pi \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 8979}{\pi \cdot 1100}} = 4,36 \text{ cm.}$$

Se alege $d = 4,4 \text{ cm.}$

8.23. La minierul din figura 8.23, a se dau: $P = 50 \text{ daN}$; $l = 60 \text{ cm}$; $a = 20 \text{ cm}$; $G = 8,1 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_a = 800 \text{ daN/cm}^2$. Se cere să se dimensioneze minierul, cu secțiunea circulară, după teoria II de rezistență.

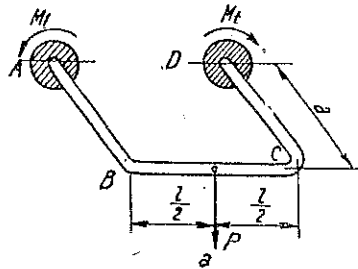


Fig. 8.23, a

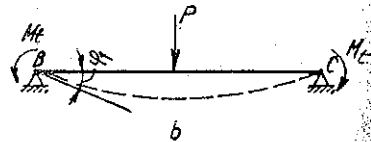


Fig. 8.23, b

Rezolvare. Problema este static nedeterminată. Datorită acțiunii forței P , în încăstrările A și D apar două momente de răsucire egale M_t și două momente încovoietoare. Din cauza solicitării la răsucire a barelor AB și CD , secțiunea B se răsucește față de A cu un unghi (Fig. 8.23, b):

$$\varphi_1 = \frac{M_t a}{GI_p} \quad (1)$$

Dacă se izolează bara BC , asupra ei lucrează:
— forța concentrată P în mijloc, care produce în B un unghi de deformare:

$$\varphi_1' = \frac{Pl^2}{16EI} \quad (2)$$

— momentele M_t , care pentru bara BC devin momente încovoietoare. Ele produc în reazeme unghiurile de deformare:

$$\varphi_1'' = \frac{M_t l}{2EI} \quad (3)$$

Unghiul de deformare (1), datorit răsucirii barei AB , trebuie să fie egal cu suma unghiurilor (2) și (3), datorite încovoierii barei BC :

$$\frac{M_t a}{GI_p} = \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{M_t l}{2EI} \quad (4)$$

Deoarece la secțiunea circulară $I_p = 2I$, relația (4) devine:

$$\frac{M_t a}{2G} + \frac{M_t l}{2E} = \frac{Pl^2}{16E} \quad (5)$$

Se obține momentul necunoscut M_t :

$$M_t = \frac{Pl^2}{8 \left(l + a \frac{E}{G} \right)} = \frac{50 \cdot 60^2}{8 \left(60 + 20 \cdot \frac{2,1 \cdot 10^6}{8,1 \cdot 10^5} \right)} \approx 200 \text{ daNcm.}$$

Momentul încovoietor în secțiunea A este:

$$M_i = \frac{1}{2} Pa = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 20 = 500 \text{ daNcm.}$$

Momentul încovoietor M_{ic} este, după teoria II:

$$M_{ic} = 0,35 M_i + 0,65 \sqrt{M_i^2 + M_t^2} = 0,35 \cdot 500 + 0,65 \sqrt{500^2 + 200^2} = 525 \text{ daNcm.}$$

Se face dimensionarea barei AB :

$$W_{nec} = \frac{M_{ic}}{\sigma_a} = \frac{525}{800} = 0,656 \text{ cm}^3 = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,656}{\pi}} = 1,89 \text{ cm.}$$

Se alege valoarea:

$$d = 20 \text{ mm.}$$

Pentru bara BC , momentul în capete are valoarea $M_B = M_t = 200 \text{ daN cm}$, iar în mijloc:

$$M_{\max} = -M_B + \frac{Pl}{4} = -200 + \frac{50 \cdot 60}{4} = 550 \text{ daNcm.}$$

Dacă bara BC se face tot cu diametrul de 20 mm, verificarea ei dă efortul unitar:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{\max}}{W_{ef}} = \frac{550}{\frac{\pi \cdot 2^3}{32}} = 700 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

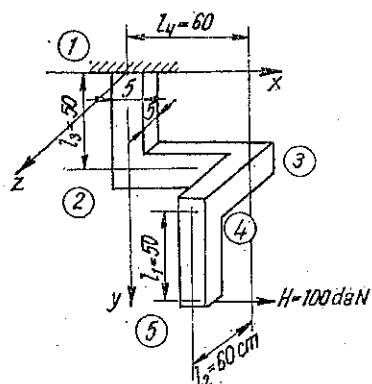


Fig. 8.24

8.24. Se dă bara cotită cu secțiunea pătrată, cu latura $a = 5$ cm, din figura 8.24. Să se verifice eforturile unitare produse de solicitările compuse pe fiecare interval.

Rezolvare. Modulul de rezistență la încovoiere este:

$$W = \frac{a^3}{6} = \frac{5^3}{6} = 20,8 \text{ cm}^3$$

Intervalul 5 - 4:

$$N = 0; M_{45} = 0;$$

$$M_{42} = Hl_1 = 100 \cdot 50 = 5\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_{45} = M_{42} = 0,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{42}}{W} = \frac{5\,000}{20,8} = 240 \text{ daN/cm}^2.$$

Intervalul 4 - 3:

$$N = 0; M_{43} = 0,$$

$$M_{43} = Hl_2 = 100 \cdot 60 = 6\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_{41} = Hl_1 = 100 \cdot 50 = 5\,000 \text{ daNcm},$$

$$\sigma = \frac{M_{43}}{W} = \frac{6\,000}{20,8} = 288 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar tangențial maxim, pentru secțiunea pătrată supusă la răsucire, este dat de formulele (6.14) și (6.16):

$$\tau = \frac{M_t}{0,208 \cdot a^3} = \frac{5\,000}{0,208 \cdot 5^3} = 192 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar echivalent, după teoria I, este:

$$\sigma_{\text{ech}} = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) = \frac{1}{2} (288 + \sqrt{288^2 + 4 \cdot 192^2}) = 384 \text{ daN/cm}^2.$$

Intervalul 2 - 3:

$$N = 100 \text{ daN}.$$

Există momente încovoietoare față de două axe:

$$M_{43} = M_{42} = Hl_2 = 100 \cdot 60 = 6\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_{43} = M_{42} = Hl_1 = 100 \cdot 50 = 5\,000 \text{ daNcm}; M_t = 0,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{43}}{W_y} + \frac{M_{42}}{W_z} = \frac{100}{5^2} + \frac{6\,000}{\frac{5^3}{6}} + \frac{5\,000}{\frac{5^3}{6}} = 532 \text{ daN/cm}^2.$$

Intervalul 2 - 1:

$$N = 0; M_{42} = Hl_1 = 100 \cdot 50 = 5\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_{41} = H(l_1 + l_2) = 100(50 + 60) = 11\,000 \text{ daNcm},$$

$$M_t = Hl_2 = 100 \cdot 60 = 6\,000 \text{ daNcm}; \sigma = \frac{M_{41}}{W} = \frac{11\,000}{\frac{5^3}{6}} = 480 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau = \frac{M_t}{0,208 \cdot a^3} = \frac{6\,000}{0,208 \cdot 5^3} = 231 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{\text{ech}} = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) = \frac{1}{2} (480 + \sqrt{480^2 + 4 \cdot 231^2}) = 573 \text{ daN/cm}^2$$

8.25. Să se dimensioneze, după teoria I de rezistență, o bară de oțel cu secțiunea pătrată, supusă unui moment încovoiător $M_t = 5\,000$ daNcm și unui moment de răsucire $M_r = 8\,000$ daNcm, cu $\sigma_a = 800$ daN/cm².

Rezolvare. Se aplică formula (8.11):

$$\sigma_{\text{ech}} = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) = \sigma_a.$$

Efortul unitar maxim de încovoiere este:

$$\sigma = \frac{M_t}{W} = \frac{5\,000}{\frac{a^3}{6}} = \frac{30\,000}{a^3}.$$

Efortul unitar tangențial maxim, pentru secțiunea pătrată, este :

$$\tau = \frac{M_t}{0,208 a^3} = \frac{8\,000}{0,208 a^3} = \frac{38\,400}{a^3}$$

Înlocuind în formula (8.11), se obține :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{30\,000}{a^3} + \sqrt{\frac{30\,000^2}{a^6} + \frac{4 \cdot 38\,400^2}{a^6}} \right) = 800,$$

$$\frac{10^4}{2a^3} (3 + \sqrt{3^2 + 4 \cdot 3,84^2}) = \frac{56\,300}{a^3} = 800; \quad a = \sqrt[3]{\frac{56\,300}{800}} = 4,13 \text{ cm.}$$

Se alege :

$$a = 42 \text{ mm.}$$

8.26. Pentru bara din figura 8.26, a se cere să se determine efortul unitar maxim.

Rezolvare. Într-o secțiune oarecare, situată la distanța x de origine, eforturile N , T_y , T_z , M_x , M_y și M_z , au valorile din tabelul 8.26, scrise separat pentru fiecare din cele trei forțe care solicită bara. Din analiza acestora rezultă că efortul unitar maxim este posibil să se producă în secțiunea din încăstrare ($x = 0$) sau în capătul liber al barei ($x = l$).

Tabelul 8.26

Sarcina	N	T_y	T_z	$M_x = M_t$	M_{ty}	M_{tz}
P	—	—	$-P$	$-Pa$	$-P(6a-x)$	—
$2P$	—	$2P$	—	$-Pa$	—	$-2P(6a-x)$
$10P$	$10P$	—	—	—	$5Pa$	$10Pa$

În secțiunea din încăstrare efortul unitar normal este maxim în punctul B și anume :

$$\sigma_B = \frac{N}{A} + \frac{M_{ty}}{W_y} + \frac{M_{tz}}{W_z} = \frac{10P}{2a^2} + \frac{Pa}{\frac{2a \cdot a^2}{6}} + \frac{2Pa}{\frac{(2a)^2 a}{6}} = 11 \frac{P}{a^2}$$

În punctul B eforturile unitare tangențiale datorite forfecării sau răsucirii sînt nule.

Pentru o secțiune din vecinătatea capătului liber al barei ($x = l - \epsilon$) s-au reprezentat în figura 8.26, b diagramele de variație ale eforturilor:

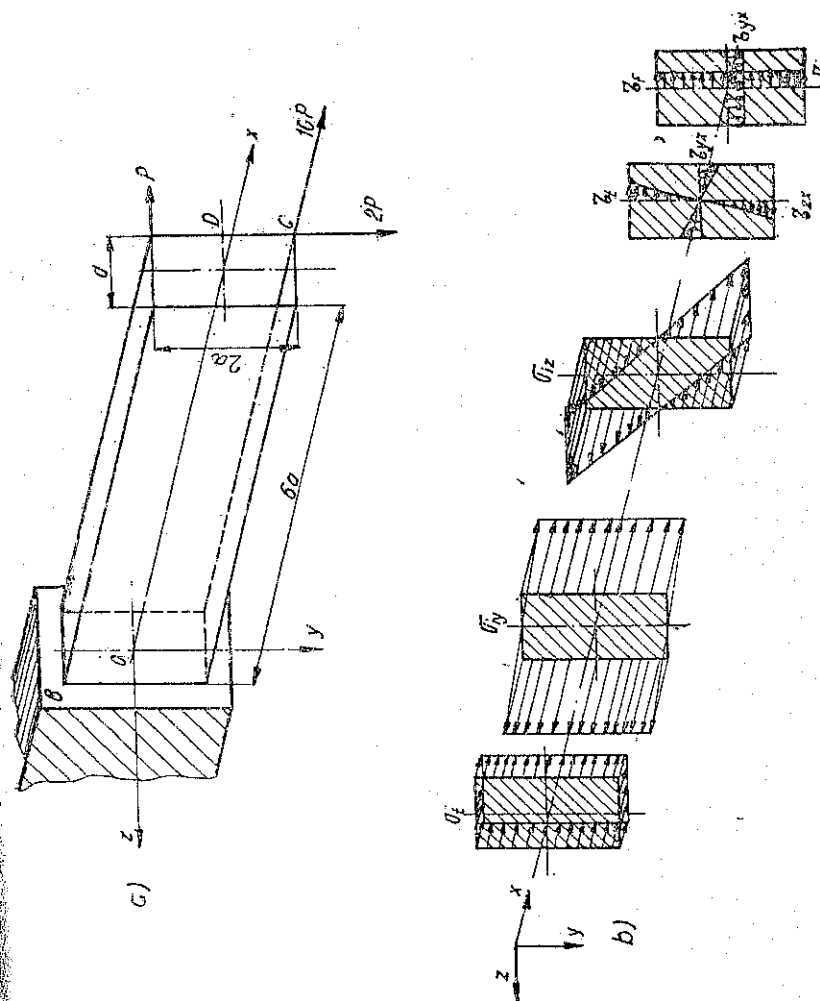


Fig. 8.26

unitare. Din analiza acestora rezultă că trebuie calculate eforturile unitare în punctele C și D (Fig. 8.26, a) ale secțiunii:

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{M_{iy}}{W_y} + \frac{M_{iz}}{W_z} = \frac{10P}{2a^2} + \frac{5Pa}{2a \cdot a^2} + \frac{10Pa}{(2a)^2 a} = 35 \frac{P}{a^2}; \quad \tau_c = 0.$$

$$\sigma_D = \frac{N}{A} + \frac{M_{iy}}{W_y} = \frac{10P}{2a^2} + \frac{5Pa}{2a \cdot a^2} = 20 \frac{P}{a^2},$$

$$\tau_D = \frac{M_t}{\alpha b^2 h} + \frac{TS}{bI_z} = \frac{2Pa}{0,246 \cdot a^2 \cdot 2a} + \frac{2P \cdot a^2 \cdot a \cdot 12}{2 \cdot a \cdot a(2a)^3} = 5,56 \frac{P}{a^2}$$

Pentru calculul efortului unitar tangențial produs de solicitarea de răsucire s-au folosit relațiile (6.14) și (6.16) în care s-a înlocuit $\alpha = 0,246$, corespunzător valorii $h/b=2$, iar pentru solicitarea de forfecare relația (4.12). Efortul unitar echivalent în punctul D , calculat cu relația (8.15), este

$$\sigma_{ech_D} = \sqrt{\sigma_D^2 + 3\tau_D^2} = \frac{P}{a^2} \sqrt{20^2 + 3 \cdot 5,56^2} = 22,2 \frac{P}{a^2}.$$

Se constată că $\sigma_{max} = \sigma_c = 35 P/a^2$.

8.27. Să se verifice porțiunea AB a barei cotite din figura 8.27, știind că: $p = 2 \text{ kN/m}$, $l = 1,2 \text{ m}$, $\sigma_a = 1400 \text{ daN/cm}^2$. Secțiunea se va considera în două variante:

- 1) pătrată, cu latura $a = 10 \text{ cm}$;
- 2) circulară, cu diametrul $d = 12 \text{ cm}$.

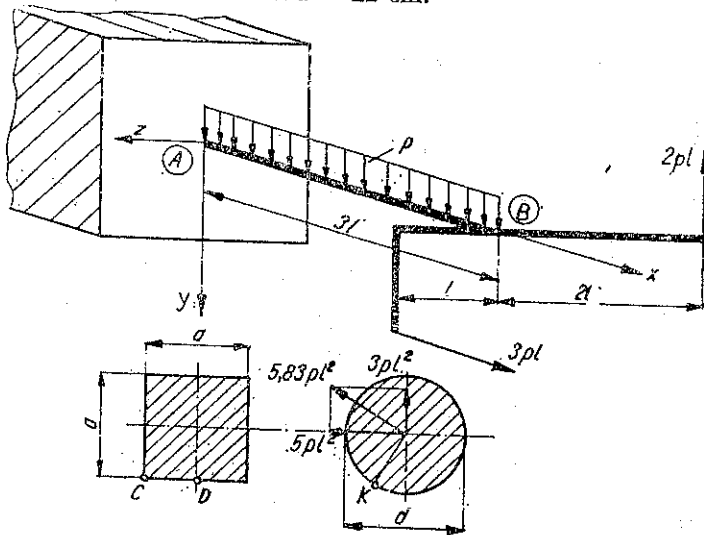


Fig. 8.27

Rezolvare. Într-o secțiune oarecare, situată la distanța x de origine, eforturile N , T_y , T_z , M_x , M_{iy} și M_{iz} au valorile din tabelul 8.27, scrise separat pentru fiecare din cele trei sarcini care acționează asupra barei. Efortul M_{iz} este maxim în secțiunea în care $T_y = 0$. Rezultă

$$T_y = 0 = p(3l - x) - 2pl; \quad x = l.$$

Tabelul 8.27

Sarcina	N	T_y	T_z	$M_x = M_t$	M_{iy}	M_{iz}
p	—	$p(3l - x)$	—	—	—	$-\frac{p}{2}(3l - x)^2$
$2pl$	—	$-2pl$	—	$4pl^2$	—	$2pl(3l - x)$
$3pl$	$3pl$	—	—	—	$-3pl^2$	$3pl^2$

Având în vedere că restul eforturilor sînt constante în lungul barei AB , calculul de verificare se va face în secțiunea $x = l$, în care

$$M_{iz_{max}} = \left(3 + 4 - \frac{4}{2}\right)pl^2 = 5pl^2.$$

- 1) Pentru secțiunea pătrată, calculul se face în punctele C și D :

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{M_{iy}}{W_y} + \frac{M_{iz}}{W_z} = \frac{3pl}{a^2} + \frac{3pl^2 6}{a^2} + \frac{5pl^2 6}{a^3} =$$

$$= \frac{pl}{a^2} \left(3 + 48 \frac{l}{a}\right) = \frac{2 \cdot 120}{10^2} \left(3 + 48 \frac{120}{10}\right) = 1390 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_D = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{W_z} = \frac{3pl}{a^2} + \frac{5pl^2 6}{a^3} = \frac{pl}{a^2} \left(3 + 30 \frac{l}{a}\right) =$$

$$= \frac{2 \cdot 120}{10^2} \left(3 + 30 \frac{120}{10}\right) = 871 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\tau_D = \frac{M_t}{\alpha a^3} = \frac{4pl^2}{0,208 a^3} = 19,2 \frac{pl^2}{a^3} = 19,2 \cdot \frac{2 \cdot 120^2}{10^3} = 553 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar echivalent în punctul D este dat de relația (8.15):

$$\sigma_{ech_D} = \sqrt{\sigma_D^2 + 3\tau_D^2} = \sqrt{871^2 + 3 \cdot 553^2} = 1295 \text{ daN/cm}^2.$$

Rezultă că pentru secțiunea pătrată

$$\sigma_{max} = \sigma_c = 1390 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

2) Pentru secțiunea circulară :

$$M_{total} = \sqrt{M_{ty}^2 + M_{tz}^2} = p l^2 \sqrt{5^2 + 3^2} = 5,83 p l^2;$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{total}}{W_z} = \frac{3 p l^4}{\pi d^2} + \frac{5,83 \cdot p l^2 \cdot 32}{\pi d^3} =$$

$$= \frac{4 p l}{\pi d^2} \left(3 + \frac{8 \cdot 5,83 l}{d} \right) = \frac{4 \cdot 2 \cdot 120}{\pi 12^2} \left(3 + \frac{8 \cdot 5,83 \cdot 120}{12} \right) = 996 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{4 p l^2 \cdot 16}{\pi d^3} = \frac{64 \cdot 2 \cdot 120^2}{\pi \cdot 12^3} = 340 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} = \sqrt{996^2 + 3 \cdot 340^2} = 1157 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

În punctul K, în care s-a făcut calculul, efortul unitar tangențial datorit solicitării de forfecare are o valoare foarte mică.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

8.28. Să se verifice eforturile unitare care se produc în bara din figura 8.28, având secțiunea circulară, cu $d = 10 \text{ cm}$, dacă $l = 1 \text{ m}$ și $P = 500 \text{ daN}$.

Răspuns: $\sigma = +260 \text{ daN/cm}^2$.

8.29. Să se dimensioneze bara din figura 8.29, cu $P = 2000 \text{ daN}$ și $\sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns: $d = 13,5 \text{ cm}$.

8.30. La bara cotită din figura 8.30, se dau: $P = 10 \text{ kN}$; $a = 1 \text{ m}$. Se cere:

a) să se construiască diagramele N , T și M pentru ambele porțiuni ale barei cotate;

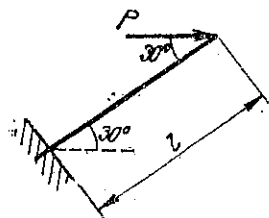


Fig. 8.28

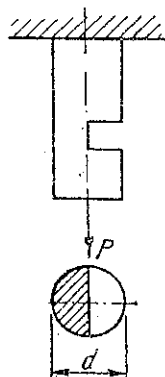


Fig. 8.29

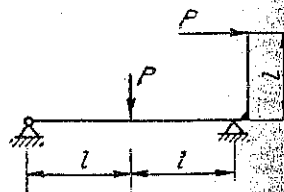


Fig. 8.30

b) să se dimensioneze bara din lemn, cu secțiunea constantă pătrată, ținând seamă de solicitarea compusă. Se dă $\sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns: $a = 19 \text{ cm}$.

8.31. Să se verifice profilul I 26 încastrat și solicitat ca în figura 8.31.

Răspuns: $\sigma_{ef} = 1030 \text{ daN/cm}^2$.

8.32. Un stîlp din lemn este solicitat de o forță înclinată $P = 100 \text{ daN}$ ca în figura 8.32. Știind că $\sigma_a = 40 \text{ daN/cm}^2$, se cere dimensionarea stîlpului, cu secțiunea pătrată (neglijînd flambajul).

Răspuns: $a = 13,3 \text{ cm}$.

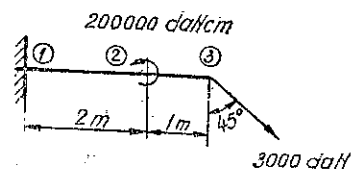


Fig. 8.31

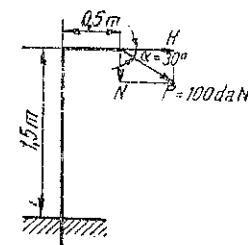


Fig. 8.32

8.33. La mecanismul de ridicare din figura 8.33 se dau: $P = 100 \text{ daN}$, $a = 50 \text{ cm}$, $b = 150 \text{ cm}$, $D_1 = 180 \text{ cm}$, $D_2 = 60 \text{ cm}$. Se cere să se afle sarcina Q care se poate ridica și să se dimensioneze arborele, luînd $\sigma_a = 600 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns: $d = 4,4 \text{ cm}$.

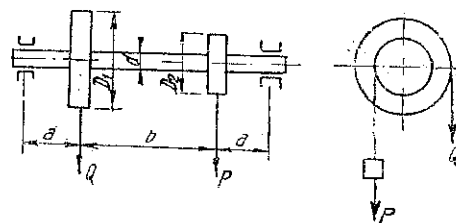


Fig. 8.33

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. La bara curbă plană, cu secțiune simetrică, reprezentată în figura 9. a, solicitată la încovoiere pură prin momentul M , efortul unitar pe un element de suprafață situat la distanța y de la axa neutră este:

$$\sigma = \frac{M}{Ae} \frac{y}{r - y} \quad (9.1)$$

în care: A este aria secțiunii; e — excentricitatea axei neutre ($e = CN$); r — distanța de la axa neutră la centrul de curbura al barei.

În general, se cunoaște raza R corespunzătoare centrului de greutate al secțiunii. De pe desen rezultă:

$$r + e = R.$$

Poziția axei neutre, respectiv valoarea excentricității e sau a razei r pentru diferite forme de secțiuni, se calculează conform tabelului 9.1

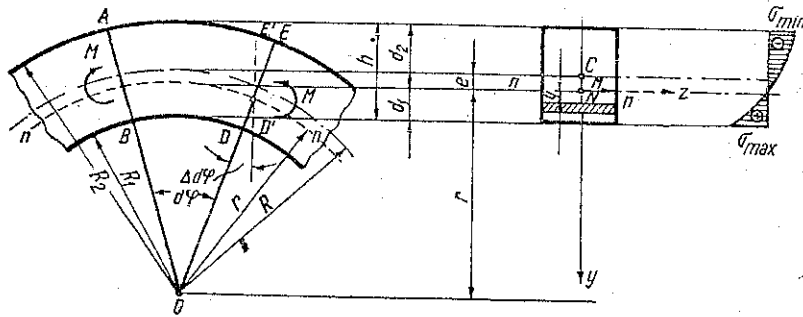


Fig. 9. a

O metodă aproximativă determină poziția axei neutre prin relația:

$$e = \frac{I_G}{AR} \quad (9.2)$$

în care I_G este momentul de inerție al secțiunii față de axa care trece prin centrul de greutate, paralelă cu axa neutră.

Pentru o bară de secțiune dreptunghiulară cu dimensiunile din figura 9. b, valoarea lui r este dată de formula:

$$r = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (9.3)$$

care prin dezvoltarea în serie a logaritmului și neglijarea unor termeni puțin importanți se transformă în următoarea:

$$r = \frac{R}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2} \quad (9.4)$$

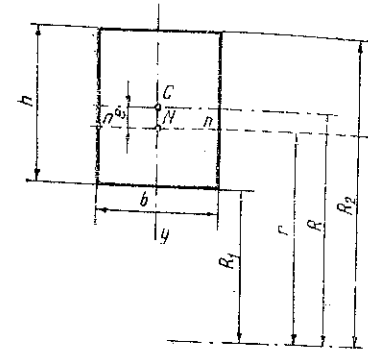


Fig. 9. b

Tabelul 9.1

Poziția axei neutre la diferite secțiuni ale barelor curbe

Nr. crt.	Forma secțiunii	Poziția r a axei neutre A = aria secțiunii R = raza centrului de greutate
1		$r = \frac{B+b}{2} \frac{h}{BR_2 - bR_1 \ln \frac{R_2}{R_1} - (B-b)}$
2		$r \approx \frac{R}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2}$ $e \approx \frac{h^2}{12R}$
3		$r = \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}$

Tabelul 9.1 (continuare)

Nr. crt.	Forma secțiunii	Poziția r a axei neutre A = aria secțiunii R = raza centrului de greutate
4		$r = \frac{A}{2\pi \left(\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} - \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}} \right)}$
5		$r = \frac{h^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - b^2})}$
6		$r = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{a}{R_1} + b_2 \ln \frac{R_2}{a}}$ $a = R_1 + h_1$
7		$r = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{a}{R_1} + b_2 \ln \frac{c}{a} + b_3 \ln \frac{R_2}{c}}$

Atunci excentricitatea e a axei neutre se calculează cu formula:

$$e = R - r \approx \frac{h^2}{12R} \quad (9.5)$$

Variația unghiului $d\varphi$ pe care îl formează secțiunile AB și DE (Fig. 9.a) se determină cu relația:

$$\Delta d\varphi = \frac{M d\varphi}{EAe} \quad (9.6)$$

În fibrele extreme ale secțiunii, la $y = d_1$ și $y = -d_2$, eforturile unitare au valorile:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_1}{r - d_1} = \frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_1}{R_1} \\ \sigma_{min} &= -\frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_2}{r + d_2} = -\frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_2}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Variația eforturilor unitare pe secțiune este redată în figura 9.a.

Dacă momentul încovoietor are sensul invers decât în desen, în formulele (9.7) el va fi introdus cu semnul minus.

2. Dacă în secțiunea barei curbe există și o forță axială N , așa cum este cazul uzual, la formulele (9.7) se adaugă efortul unitar:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

pozitiv dacă forța N este de întindere și negativ dacă ea este de compresie. Efortul unitar rezultat în fibrele extreme devine:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_1}{R_1} + \frac{N}{A} \\ \sigma_{min} &= -\frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_2}{R_2} + \frac{N}{A} \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

3. Un alt mod de a exprima eforturile unitare în barele curbe solicate prin momente M și forțe axiale N este redat de formula:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{RA} + \frac{MR}{I'} \cdot \frac{y}{R+y} \quad (9.9)$$

La folosirea acestei formule, momentul M se consideră pozitiv când are sensul din figura 9.c (invers decît în Fig. 9.a). Distanțele y se măsoară de la centrul de greutate în sus, spre deosebire de figura 9.a, unde se măsoară de la axa neutră în jos. Cele două metode menționate dau același rezultat.

În formulele (9.9), mărimea I' este analogă unui moment de inerție și este definită prin relația.

$$I' = \int \frac{R}{R+y} y^2 dA, \quad (9.10)$$

cu y măsurat ca în figura 9.c.

Pentru secțiunea dreptunghiulară de lățime b și înălțime h , I' are expresia.

$$I' = bR^2 \left(R \ln \frac{2R+h}{2R-h} - h \right). \quad (9.11)$$

Pentru secțiunea trapezoidală din figura 9.d se scrie relația:

$$I' = R^3 \left[b + \frac{B-b}{h} (e_1 + R) \ln \frac{R+e_1}{R-e_2} - \left[\frac{B-b}{h} R + \frac{B+b}{2} \right] R^2 h \right], \quad (9.12)$$

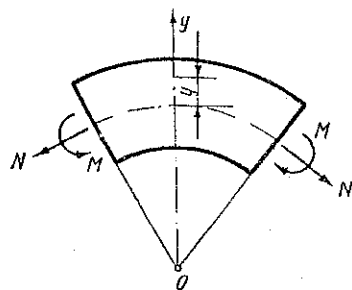


Fig. 9. c

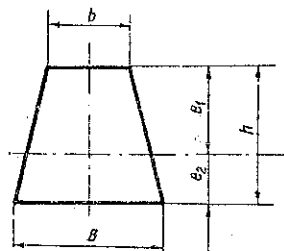


Fig. 9. d

în care distanțele e_1 și e_2 sînt:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{2B+b}{3(B+b)} h \\ e_2 &= \frac{2b+B}{3(B+b)} h \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

La secțiunea circulară de rază r , a unei bare curbe cu raza R , se scrie:

$$I' = \frac{\pi r^4}{4} \left(1 + \frac{r^2}{2R^2} + \frac{5}{4} \frac{r^4}{R^4} + \dots \right). \quad (9.14)$$

B. PROBLEME REZOLVATE

9.1. Să se verifice eforturile unitare ce se produc în secțiunea dreptunghiulară a unei bare curbe, cu $b = 3$ cm, $h = 5$ cm, $R = 10$ cm, solicitată la încovoiere pură printr-un moment $M = 125$ daNm. Se va compara rezultatul obținut cu acela care se găsește prin aplicarea formulei barelor drepte, trasînd diagrama comparativă a variației eforturilor unitare pe secțiune (Fig. 9.1).

Rezolvare. Se determină, în prealabil, elementele care intră în formulele (9.7):

$$M = 12\,500 \text{ daNcm},$$

$$A = bh = 15 \text{ cm}^2,$$

$$R_1 = R - \frac{h}{2} = 10 - 2,5 = 7,5 \text{ cm},$$

$$R_2 = R + \frac{h}{2} = 10 + 2,5 = 12,5 \text{ cm},$$

$$e = \frac{h^2}{12R} = \frac{5^2}{12 \cdot 10} = 0,208 \text{ cm},$$

$$d_1 = \frac{h}{2} - e = 2,5 - 0,208 = 2,292 \text{ cm},$$

$$d_2 = \frac{h}{2} + e = 2,5 + 0,208 = 2,708 \text{ cm}.$$

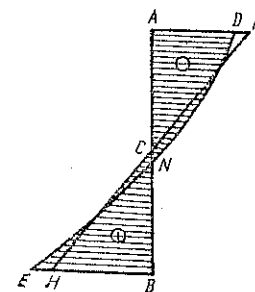


Fig. 9.1

Se aplică formulele (9.8):

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Ae} \frac{d_1}{R_1} = \frac{12\,500}{15 \cdot 0,208} \cdot \frac{2,292}{7,5} = 1\,223 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{M}{Ae} \frac{d_2}{R_2} = -\frac{12\,500}{15 \cdot 0,208} \cdot \frac{2,708}{12,5} = -868 \text{ daN/cm}^2.$$

Dacă s-ar aplica formula barelor drepte (formula lui Navier):

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{M}{W} = \frac{M}{bh^2/6} = \frac{6 \cdot 12\,500}{3 \cdot 5^2} = 1\,000 \text{ daN/cm}^2.$$

În figura 9.1 s-a reprezentat variația efortului unitar σ pe secțiune în cele două alternative de calcul.

Curba *DNE* reprezintă variația reală a lui σ , conform ipotezelor de calcul ale barelor curbe, pe când linia dreaptă *FH* arată variația conform formulei lui Navier. Eroarea maximă ce se obține prin aplicarea formulei lui Navier este:

$$\delta = \frac{1\,223 - 1\,000}{1\,223} \cdot 100 = 18,5\%.$$

9.2.5 Dacă bara curbă din problema 9.1 este solicitată printr-un moment $M = 100$ daNm și o forță axială $N = 3\,000$ daN, să se calculeze efortul unitar maxim atît prin formula (9.8) cît și formula (9.9).

Rezolvare. Pentru formula (9.8) se cunosc din problema precedentă $A = 15$ cm²; $e = 0,208$ cm; $d_1 = 2,292$ cm; $R_1 = 7,5$ cm.

$$\sigma_{\max} = \frac{3\,000}{15} + \frac{10\,000}{15 \cdot 0,208} \frac{2,292}{7,5} = 1\,178 \text{ daN/cm}^2.$$

Prin cealaltă metodă se folosește formula:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{RA} + \frac{MR}{I'} \frac{y}{R+y}$$

Valoarea lui I' este dată de formula (9.11):

$$I' = bR^2 \left(R \cdot \ln \frac{2R+h}{2R-h} - h \right),$$

$$I' = 3 \cdot 10^2 \left(10 \cdot \ln \frac{2 \cdot 10 + 5}{2 \cdot 10 - 5} - 5 \right) = 32,48 \text{ cm}^4.$$

Pentru folosirea formulei (9.9) se va observa că:

— momentul, în cazul problemei de față, este negativ, față de convențiile formulei, deci $M = -10\,000$ daNm;

— $y_{\max}$ are loc în fibra interioară, este negativ și se măsoară de la centrul de greutate:

$$y_{\max} = -\frac{h}{2} = -2,5 \text{ cm},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{3\,000}{15} - \frac{10\,000}{10 \cdot 15} + \frac{-10\,000 \cdot 10}{32,48} \frac{-2,5}{10 - 2,5} = 1\,160 \text{ daN/cm}^2.$$

Se obțin rezultate foarte apropiate, diferențele fiind de ordinul aproximației calculului cu rigla. La calcularea logaritmului natural, trebuie luate cel puțin patru zecimale, întrucît erori foarte mici la calculul lui a drept consecință variații mari ale lui I' și deci ale lui σ .

9.3. Un cîrlig de macara are forma din figura 9.3, secțiunea fiind trapezoidală, cu bazele rotunjite. Forța care soliciță cîrligul este $P = 1\,000$ daN.

Dimensiunile secțiunii *AB*, conform STAS 1944 — 68 sînt următoarele:

$$b = 3,2 \text{ cm}; \quad b_1 = 1,2 \text{ cm}; \quad h = 4,0 \text{ cm};$$

$$a = 4,5 \text{ cm}.$$

Să se calculeze efortul unitar maxim și minim din secțiune.

Rezolvare. Secțiunea *AB* este solicițată de forța axială:

$$N = P = 1\,000 \text{ daN},$$

și momentul încovoietor:

$$M = PR.$$

Raza exterioară este:

$$R_2 = R_1 + h = 2,25 + 4,0 = 6,25 \text{ cm},$$

în care raza interioară este:

$$R_1 = \frac{a}{2} = \frac{4,5}{2} = 2,25 \text{ cm}.$$

Aplicînd formula din tabelul 9.1, poziția *I*, se găsește:

$$r = \frac{\frac{b_1 + b}{2} h}{\frac{bR_2 - b_1R_1}{h} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} - (b - b_1)} = \frac{\frac{3,2 + 1,2}{2} \cdot 4,0}{\frac{3,2 \cdot 6,25 - 1,2 \cdot 2,25}{4,0} \ln \frac{6,25}{2,25} - (3,2 - 1,2)} \approx 3,64 \text{ cm}.$$

Poziția centrului de greutate al trapezului față de baza mare este dată de formula:

$$e_2 = \frac{2b_1 + b}{3(b_1 + b)} h = \frac{2 \cdot 1,2 + 3,2}{3(1,2 + 3,2)} 4,0 = 1,7 \text{ cm}.$$

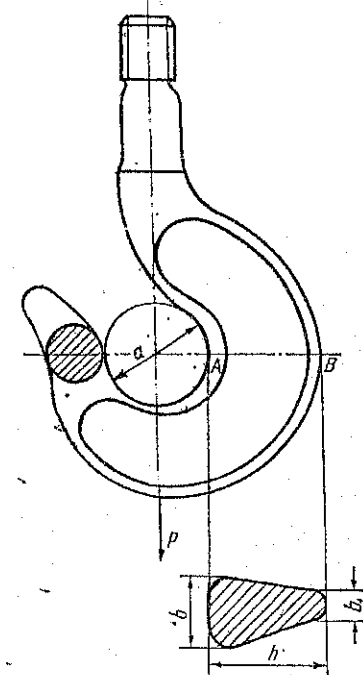


Fig. 9.3

Excentricitatea axei neutre este:

$$e = (R_1 + e_2) - r = 2,25 + 1,7 - 3,64 = 0,31 \text{ cm.}$$

Celelalte date necesare sînt:

$$R = R_1 + e_2 = 2,25 + 1,7 = 3,95 \text{ cm,}$$

$$d_1 = r - R_1 = 3,64 - 2,25 = 1,39 \text{ cm,}$$

$$d_2 = h - d_1 = 4,0 - 1,39 = 2,61 \text{ cm,}$$

$$M = PR = 1\,000 \cdot 3,95 = 3950 \text{ daN cm,}$$

$$A = \frac{b + b_1}{2} h = \frac{3,2 + 1,2}{2} 4,0 = 8,8 \text{ cm}^2.$$

Se aplică formulele (9.8). Rezultă:

$$\sigma_{max} = \frac{1\,000}{8,8} + \frac{3\,950}{8,8 \cdot 0,31} \cdot \frac{1,39}{2,25} = 1\,008 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{min} = \frac{1\,000}{8,8} - \frac{3\,950}{8,8 \cdot 0,31} \cdot \frac{2,61}{6,25} = -491 \text{ daN/cm}^2.$$

9.4. Să se verifice un cîrlig de macara, de secțiune circulară cu $R = 70 \text{ mm}$, $d = 70 \text{ mm}$, $P = 2\,000 \text{ daN}$.

Rezolvare. Se folosește formula din tabelul 9.1, poziția 3:

$$r = \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})} = \frac{7^2}{4(2 \cdot 7 - \sqrt{4 \cdot 7^2 - 7^2})} = 6,53 \text{ cm,}$$

$$e = R - r = 7 - 6,53 = 0,47 \text{ cm,}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 7^2}{4} = 38,48 \text{ cm}^2,$$

$$M = PR = 2\,000 \cdot 7 = 14\,000 \text{ daN cm,}$$

$$R_1 = R - \frac{d}{2} = 7 - 3,5 = 3,5 \text{ cm,}$$

$$R_2 = R + \frac{d}{2} = 7 + 3,5 = 10,5 \text{ cm,}$$

$$d_1 = r - R_1 = 6,53 - 3,5 = 3,03 \text{ cm,}$$

$$d_2 = d - d_1 = 7 - 3,03 = 3,97 \text{ cm.}$$

Se aplică formulele (9.8):

$$\sigma_{max} = \frac{14\,000}{38,48 \cdot 0,47} \cdot \frac{3,03}{3,5} + \frac{2\,000}{38,48} = 722 \text{ daN/cm}^2.$$

$$\begin{aligned} \sigma_{min} &= -\frac{14\,000}{38,48 \cdot 0,47} \cdot \frac{3,97}{10,5} + \frac{2\,000}{38,48} = \\ &= -240 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned}$$

9.5. Se dă bara semicirculară de oțel, cu secțiunea pătrată, din figura 9.5 la care se cunosc $a = 10 \text{ cm}$, $R = 50 \text{ cm}$, $\sigma_a = 1\,000 \text{ daN/cm}^2$.

Se cere:

a) să se determine forța maximă P cu care se poate încărcă bara;

b) după determinarea forței P , să se facă o verificare cu formula barelor drepte.

Rezolvare. a) Se determină poziția axei neutre:

$$e = \frac{h^2}{12R} = \frac{a^2}{12R} = \frac{10^2}{12 \cdot 50} = 0,167 \text{ cm,}$$

$$r = R - e = 50 - 0,167 = 49,833 \text{ cm,}$$

$$d_1 = \frac{a}{2} - e = 5 - 0,167 = 4,833 \text{ cm,}$$

$$R_1 = R - \frac{a}{2} = 50 - 5 = 45 \text{ cm.}$$

Se aplică formula (9.8) în care:

$$\sigma_a = \sigma_{max}, \quad M = 2PR = 100P,$$

$$A = 100 \text{ cm}^2,$$

necunoscuta fiind P :

$$1\,000 = \frac{100P}{100 \cdot 0,167} \cdot \frac{4,833}{45} + \frac{P}{100} = 0,653P,$$

$$P = 1\,531 \text{ daN.}$$

(1)

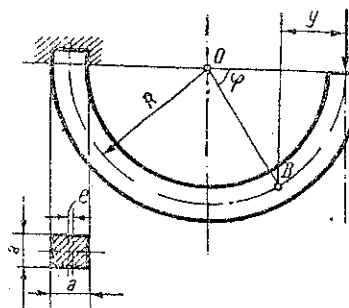


Fig. 9.5

b) Verificarea cu formula barelor drepte:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} = \frac{P}{a^2} + \frac{2PR}{\frac{a^3}{6}}$$

$$\sigma_{max} = \frac{1\,531}{10^2} + \frac{2 \cdot 1\,531 \cdot 50 \cdot 6}{10^3} = 934 \text{ daN/cm}^2. \quad (2)$$

Se constată o diferență de 6,6% între valorile lui σ_{max} date de cele două metode de calcul.

9.6. Să se verifice eforturile unitare ce se produc în secțiunea cea mai solicitată a barei din figura 9.6, dacă se dau: $R = 80 \text{ mm}$; $a = 10 \text{ mm}$; $d = 80 \text{ mm}$; $P = 1\,000 \text{ daN}$.

Rezolvare. Se procedează analog ca la problema precedentă, cu observația că forța axială și momentul încovoietor sînt pozitive:

$$I_c = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 8^4}{64} = 201 \text{ cm}^4,$$

$$R = 8 \text{ cm},$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 50,3 \text{ cm}^2,$$

$$e = \frac{201}{50,3 \cdot 8} = 0,5 \text{ cm},$$

$$M = M_{max} = P(a + R) = 1\,000(1 + 8) = 9\,000 \text{ daNcm},$$

$$N = P = 1\,000 \text{ daN},$$

$$d_1 = \frac{d}{2} - e = 3,5 \text{ cm};$$

$$d_2 = \frac{d}{2} + e = 4,5 \text{ cm},$$

$$R_1 = R - \frac{d}{2} = 4 \text{ cm};$$

$$R_2 = R + \frac{d}{2} = 12 \text{ cm},$$

$$\sigma_{max} = \frac{9\,000}{50,3 \cdot 0,5} \cdot \frac{3,5}{4} + \frac{1\,000}{50,3} = 333 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{min} = -\frac{9\,000}{50,3 \cdot 0,5} \cdot \frac{4,5}{12} + \frac{1\,000}{50,3} = -114 \text{ daN/cm}^2.$$

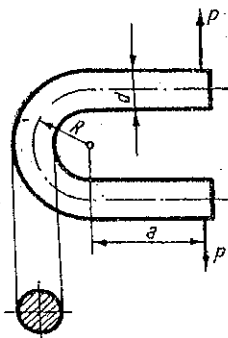


Fig. 9.6

9.7. Secțiunea barei curbe din figura 9.7, a are forma din figura 9.7, b, cu cotele din desen (în cm). Dacă bara este din fontă, cu $\sigma_{at} = 300 \text{ daN/cm}^2$ și $\sigma_{ac} = 600 \text{ daN/cm}^2$, se cere să se afle valoarea maximă a forței P , care se poate aplica, astfel încît să nu se depășească rezistențele admisibile.

Rezolvare. Pentru secțiunea periculoasă AB poziția centrului de greutate este dată de segmentul AC:

$$AC = \frac{60 \cdot 1,5 + 90 \cdot 18 + 30 \cdot 34,5}{60 + 90 + 30} =$$

$$= 15,25 \text{ cm}.$$

Se determină razele R_1 și R_2 :

$$R_1 = 20 \text{ cm},$$

$$R = R_1 + AC = 20 + 15,25 = 35,25 \text{ cm},$$

$$R_2 = R_1 + AB = 20 + 36 = 56 \text{ cm}.$$

Poziția axei neutre se determină cu relația (9.2):

$$e = \frac{I_{zc}}{A \cdot R}$$

$$I_{zc} = \frac{20 \cdot 3^3}{12} + 20 \cdot 3 \cdot 13,75^2 + \frac{3 \cdot 30^3}{12} + 30 \cdot 3 \cdot 2,75^2 + \frac{10 \cdot 3^3}{12} +$$

$$+ 10 \cdot 3 \cdot 19,25^2 = 29\,958,75 \text{ cm}^4,$$

$$A = 180 \text{ cm}^2,$$

$$e = \frac{29\,958,75}{180 \cdot 35,25} = 4,722 \text{ cm}.$$

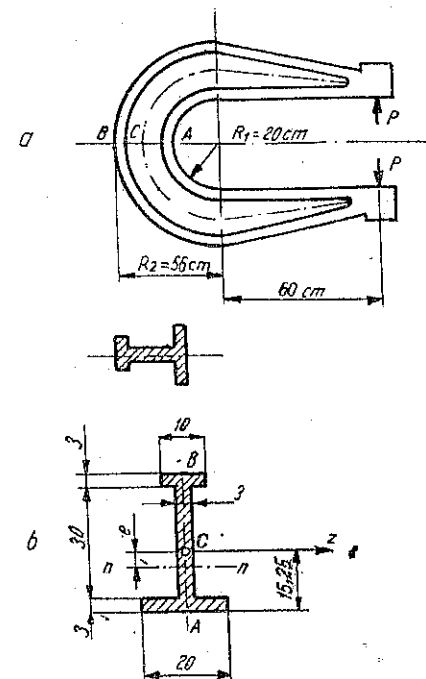


Fig. 9.7

Valoarea forței P se calculează folosind relațiile (9.8), în care se înlocuiește σ_{max} prin σ_{at} și σ_{min} prin σ_{ac} :

$$d_1 = y_c - e = 15,25 - 4,722 = 10,528 \text{ cm};$$

$$d_2 = AB - d_1 = 36 - 10,528 = 25,472 \text{ cm},$$

$$M_{max} = P(60 + 35,25) = 95,25 P \text{ daNcm},$$

$$N = P$$

$$\sigma_{at} = \frac{P}{A} + \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{d_1}{R_1}; \quad \sigma_{ac} = \frac{P}{A} - \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{d_2}{R_2};$$

$$300 = \frac{P}{180} + \frac{95,25 P}{180 \cdot 4,722} \cdot \frac{10,528}{20}; \quad P' = 4\,648 \text{ daN};$$

$$-600 = \frac{P}{180} - \frac{95,25 P}{180 \cdot 4,722} \cdot \frac{25,472}{56}; \quad P'' = 13\,220 \text{ daN}.$$

Spre a nu se depăși nici una din rezistențele admisibile, trebuie aleasă forța cea mai mică:

$$P_{cap} = 4\,648 \text{ daN}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

9.8. Să se calculeze eforturile unitare în secțiunea AB a inelului din figura 9.8, considerind că bara are:

a) secțiune circulară; b) secțiune dreptunghiulară.

Se dă $R_1 = 40 \text{ mm}$; $R_2 = 140 \text{ mm}$; $P = 2\,000 \text{ daN}$.

Răspuns: a) $\sigma_{max} = -380 \text{ daN/cm}^2$;

$$\sigma_{min} = 109 \text{ daN/cm}^2;$$

b) $\sigma_{max} = -363 \text{ daN/cm}^2$, $\sigma_{min} = 104 \text{ daN/cm}^2$.

9.9. Secțiunea barei curbe din figura 9.9 are forma de T, cu cotele din desen, în mm. Dacă bara este executată din fontă cu $\sigma_{at} = 300 \text{ daN/cm}^2$ și $\sigma_{ac} = 900 \text{ daN/cm}^2$, se cere să se afle valoarea maximă a forței P , care se poate aplica în centrul de greutate al secțiunii, astfel încât să nu se depășească rezistențele admisibile.

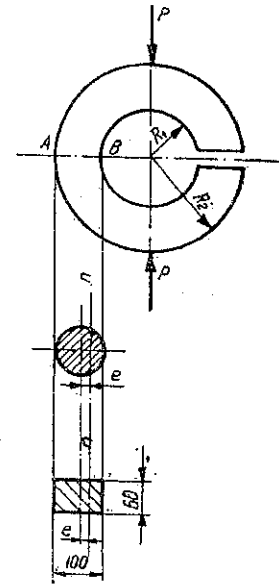


Fig. 9.8

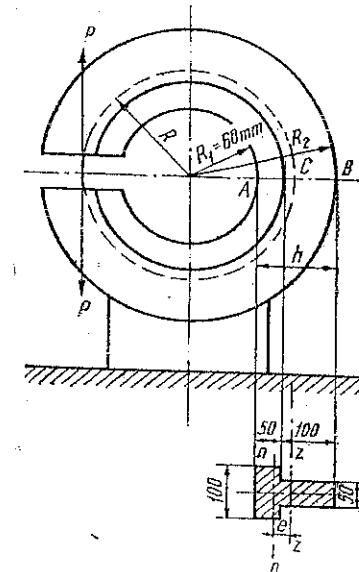


Fig. 9.9

Răspuns: Se găsesc două soluții: $P' = 2\,290 \text{ daN}$; $P'' = 13\,500 \text{ daN}$, dintre care se alege prima.

9.10. Să se refacă problema 9.9, cu aceleași cote, dar cu secțiunea așezată invers, adică cu partea lată în exterior. Să se compare rezultatul cu cel de la problema 9.9.

Răspuns: Se găsesc două soluții: $P' = 1\,270 \text{ daN}$, $P'' = 15\,000 \text{ daN}$, dintre care se alege prima. Rezultă că această formă este mai dezavantajoasă decât cea de la problema 9.9.

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. *Metoda Mohr-Maxwell* se bazează pe *teorema lui Betti*: dacă se consideră două sisteme de forțe — sistemul primar și sistemul secundar — ce pot acționa succesiv asupra unui corp elastic, atunci lucrul mecanic produs de forțele sistemului primar, care ar parcurge deplasările produse de sistemul secundar, este egal cu lucrul mecanic produs de forțele sistemului secundar, care ar parcurge deplasările produse de sistemul primar.

În *metoda Mohr-Maxwell* se consideră ca sistem primar, sistemul de forțe dat. Ca sistem secundar se consideră o forță $P = 1$ sau, în general, o forță generalizată $X = 1$.

Rezultă atunci că lucrul mecanic produs de forțele sistemului primar, cînd ele parcurg deplasările produse de sistemul secundar, este egal cu deplasarea pe direcția forței $P = 1$ a punctului ei de aplicație sau, mai general, cu deplasarea generalizată care corespunde forței generalizate $X = 1$.

2. Notînd cu M_x, N_x, M_{tx}, T_x , respectiv momentul încovoietor, forța axială, momentul de răsucire și forța tăietoare produse de sistemul de forțe dat într-o secțiune oarecare și cu m_x, n_x, m_{tx}, t_x eforturile din aceeași secțiune produse de forța $P=1$ (respectiv forța generalizată $X = 1$), deplasarea pe direcția forței $P=1$ (respectiv deplasarea generalizată) va fi:

$$\delta = \int \frac{M_x m_x}{EI} ds + \int \frac{N_x n_x}{EA} ds + \int \frac{M_{tx} m_{tx}}{GI_t} ds + \int \frac{k T_x t_x}{GA} ds. \quad (10.1)$$

3. După caz se pot neglija în expresia (10.1), termenii corespunzători forfecării, răsucirii sau solicitării axiale.

4. *Regula lui Veresceaghin*. Calculul integralelor ce intervin în *metoda Mohr-Maxwell* (10.1) poate fi făcut în cazul cînd m_x, n_x, m_{tx}, t_x au variații liniare (ceea ce se întîmplă în cazul sistemelor formate din bare drepte), folosind *regula lui Veresceaghin*: valoarea unei integrale de forma (10.1) este egală cu produsul dintre aria A a diagramei $\frac{M_x}{EI}$ (respectiv $\frac{N_x}{EA}, \frac{M_{tx}}{GI_t}, \frac{k T_x}{GA}$) și ordonata y_c a diagramei m_x (respectiv n_x, m_{tx}, t_x) corespunzătoare centrului de greutate C al primei diagrame (Fig. 10. a).

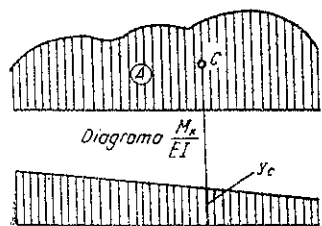


Fig. 10. a

$$\int \frac{M_x m_x}{EI} ds = A \cdot y_c. \quad (10.2)$$

5. Relația (10.2), aplicată pe intervalul $i, i + 1$, al unei grinzi pe care acționează o sarcină uniform distribuită p , devine:

$$\int_i \frac{M_x m_x}{EI_x} ds = \frac{l}{6 EI_x} \left[(M_i + M_{i+1} + \frac{p l^2}{4}) (m_i + m_{i+1}) + M_i m_i + M_{i+1} m_{i+1} \right], \quad (10.3)$$

unde:

M_i și M_{i+1} sînt momentele încovoietoare produse, în secțiunile i , respectiv $i + 1$, de forțele sistemului primar;

m_i și m_{i+1} sînt momentele încovoietoare produse, în secțiunile i , respectiv $i + 1$, de încărcarea unitară a sistemului secundar.

6. Pentru cazurile curente ce se întîlnesc în aplicații se poate utiliza tabelul 10. a, ce conține date privind aria A a diagramei $\frac{M_x}{EI}$ și poziția centrului ei de greutate. Pentru cazuri mai complicate se va descompune diagrama $\frac{M_x}{EI}$ în diagrame simple de forma celor din tabelul 10. a.

Tabelul 10. a

Diagrama $\frac{M_x}{EI}$	Expresia ordonatei diagramei	A	x_c	x'_c
	a	al	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$a \frac{x}{l}$	$\frac{al}{2}$	$\frac{2l}{3}$	$\frac{l}{3}$
	$a \frac{x^2}{l^2}$	$\frac{al}{3}$	$\frac{3l}{4}$	$\frac{l}{4}$
	$2a \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{2l} \right)$	$\frac{2al}{3}$	$\frac{5l}{8}$	$\frac{3l}{8}$
	$a \frac{x^3}{l^3}$	$\frac{al}{4}$	$\frac{4l}{5}$	$\frac{l}{5}$

7. *Metoda lui Castigliano* se bazează pe prima teoremă a lui Castigliano: derivata energiei de deformare a unui corp elastic în raport cu valoarea scalară a unei forțe P este egală cu proiecția deplasării punctului de aplicație al forței pe direcția ei.

Această teoremă poate fi extinsă și în cazul unei forțe generalizate X , derivata energiei de deformare fiind, în acest caz, egală cu deplasarea generalizată δ corespunzătoare.

Considerind ca forță generalizată un cuplu de moment $\bar{M}$, deplasarea corespunzătoare este egală cu proiecția rotirii φ a secțiunii, pe direcția vectorului $\bar{M}$.

Considerind ca forță generalizată perechea de forțe $\bar{F}$ și $-\bar{F}$ aplicate respectiv în A și B pe direcția AB , deplasarea generalizată corespunzătoare este egală cu depărtarea (apropierea) reciprocă a celor două puncte.

În cazul cînd dorim să determinăm deplasarea unui punct în care nu acționează nici o forță, se introduce o forță fictivă P , corespunzătoare deplasării pe care dorim să o determinăm. După efectuarea calculelor, în rezultatele obținute se face $P = 0$.

În mod analog se poate proceda, cînd se urmărește să se determine o deplasare generalizată.

8. Expresia energiei de deformare acumulată de un sistem de bare este:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{N^2 ds}{EA} + \frac{1}{2} \int \frac{kT^2 ds}{GA} + \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EI} + \frac{1}{2} \int \frac{M_i^2 ds}{GI_i}, \quad (10.4)$$

în care:

N este efortul axial; T — forța tăietoare; M , — momentul încovoietor; M_i , — momentul de răsucire; E — modulul de elasticitate; G — modulul de elasticitate transversal; A — aria secțiunii transversale a barei; I — momentul ei de inerție față de axa neutră; I_i , — „momentul de inerție la răsucire” față de centrul de greutate; k — un coeficient care depinde de forma secțiunii.

Integralele se calculează pentru toate barele sistemului.

În general, lucrul mecanic datorit forfecării se neglijează. Lucrul mecanic al momentelor de răsucire și al eforturilor axiale se neglijează în cazul barelor la care principala solicitare este încovoierea. Nu se neglijează lucrul mecanic al eforturilor axiale în cazul arcelor și bolților. De asemenea nu se neglijează lucrul mecanic de răsucire la arbori.

9. Deplasarea δ_i în dreptul și pe direcția unei forțe P_i , după metoda Castigliano se calculează cu relația:

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_i} ds + \int \frac{M_i}{EI} \frac{\partial M_i}{\partial P_i} ds + \int \frac{M}{GI} \frac{\partial M}{\partial P_i} ds. \quad (10.5)$$

10. Deformația unghiulară φ_i în dreptul și pe direcția unui cuplu M_i^0 , va fi:

$$\varphi_i = \frac{\partial U}{\partial M_i^0} = \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial M_i^0} ds + \int \frac{M_i}{EI} \frac{\partial M_i}{\partial M_i^0} ds + \int \frac{M}{GI} \frac{\partial M}{\partial M_i^0} ds. \quad (10.6)$$

B. PROBLEME REZOLVATE

10.1. Să se determine deplasarea pe verticală și pe orizontală a punctului A al sistemului de bare articulate din figura 10.1, *a*. Să se determine apoi condiția ca deplasarea pe orizontală să fie nulă. Barele au secțiuni și lungimi egale.

Rezolvare. Se aplică metoda Mohr-Maxwell. Se determină mai întâi eforturile în bare produse de forța P .

a) Deplasarea pe verticală (Fig. 10.1, *b*). Se izolează nodul A . Proiecția forțelor pe orizontală dă:

$$N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \beta = 0; \quad N_2 = -N_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

Proiecția forțelor pe verticală dă:

$$N_2 \sin \beta - N_1 \sin \alpha - P = 0,$$

de unde:

$$N_1 = -\frac{P \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \text{ și } N_2 = \frac{P \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (1)$$

Pentru a obține deplasarea pe verticală, se introduce în punctul A , o forță verticală egală cu 1 (Fig. 10.1, *c*).

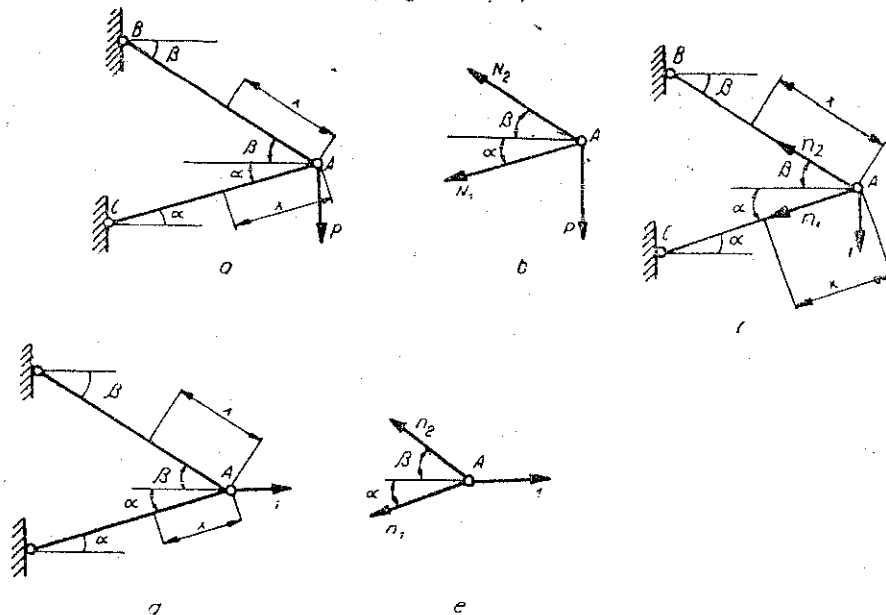


Fig. 10.1

Deoarece forța unitară coincide ca punct de aplicatie și direcție cu forța P , eforturile n_1 și n_2 se calculează folosind relația (1) în care se înlocuiește $P = 1$, de unde :

$$n_1 = -\frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \text{ și } n_2 = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (2)$$

Pentru calculul deplasării se aplică formula (10.1) în care $M_x = M_{ix} = T_x = 0$, deci

$$\delta = \Sigma \int_0^l \frac{N_x n_x}{EA} dx, \quad (3)$$

$$v_A = \left(\frac{1}{EA} \int_0^l N_1 n_1 dx + \int_0^l N_2 n_2 dx \right) = \frac{1}{EA} \left(\int_0^l \frac{P \cos^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} dx + \int_0^l \frac{P \cos^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} dx \right) = \frac{Pl}{EA} \cdot \frac{\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

b) Deplasarea pe orizontală. Se introduce o forță orizontală egală cu 1 (Fig. 10.1, d).

Se izolează nodul A (Fig. 10.1, e) și se calculează eforturile n'_1 și n'_2 . Ecuația de proiecții pe orizontală dă :

$$n'_1 \cos \alpha + n'_2 \cos \beta - 1 = 0.$$

Ecuația de proiecții pe verticală dă :

$$n'_1 \sin \alpha - n'_2 \sin \beta = 0; \quad n'_2 = n'_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

de unde

$$n'_1 = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad n'_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Deplasarea se calculează cu relația (3) :

$$v_A = \frac{1}{EA} \left(\int_0^l N_1 n'_1 dx + \int_0^l N_2 n'_2 dx \right) = \frac{1}{EA} \left(\int_0^l \frac{P \cos \beta \cdot \sin \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} dx + \int_0^l \frac{P \cos \alpha \sin \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} dx \right) = \frac{Pl}{EA} \cdot \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{2 \sin^2(\alpha + \beta)}$$

Pentru ca deplasarea pe orizontală să fie nulă, trebuie ca :

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta, \text{ adică } \alpha = \beta.$$

10.2. Se consideră grinda cu zăbrele din figura 10.2, a. Să se determine săgeata la mijlocul deschiderii. Barele sînt de secțiune constantă A . Aplicație : $a = 5$ m, $A = 10$ cm², $E = 2100000$ daN/cm².

Rezolvare. Se determină reacțiunile din reazemul simplu 1 și articulația 9.

În cazul din figura 10.2, a, din motive de simetrie :

$$V_1 = V_9 = 7,5 \text{ kN}; \quad H_9 = 0.$$

Se determină eforturile N_x în bare, folosind una dintre metodele cunoscute (izolarea nodurilor, metoda secțiunilor, metoda grafică Cremona).

Se determină apoi eforturile n_x în barele grinzii sub acțiunea unei forțe $P = 1$ kN aplicată în nodul 5 (Fig. 10.2, b). Reacțiunile sînt :

$$V_1 = V_9 = 0,5 \text{ kN}; \quad H_9 = 0.$$

Valorile eforturilor N_x și n_x sînt date în tabelul 10.2 (eforturile pozitive sînt de întindere, iar cele negative sînt de compresiune).

Pentru determinarea săgeții grinzii cu zăbrele în dreptul nodului 5 se aplică formula :

$$v_5 = \Sigma \int \frac{N_x n_x}{EA} ds,$$

dedusă din formula generală (10.1), făcînd $M_x = 0$, $M_{ix} = 0$. Ținînd seamă că N_x și n_x sînt constante :

$$v_5 = \Sigma \frac{N_x \cdot n_x \cdot l}{EA} \quad (1)$$

Calculul săgeții este redat în tabelul 10.2. Atunci săgeata pe verticală a nodului 5 este :

$$v_5 = 2[3,75 + 10,4 + 3,75 + 1,25 + 3,75 + 3,43 + 10] \frac{a}{EA} = \frac{72,66 a}{EA}$$

În cazul aplicației numerice :

$$v_5 = \frac{7266 \cdot 500}{2100000 \cdot 10} = 0,173 \text{ cm}.$$

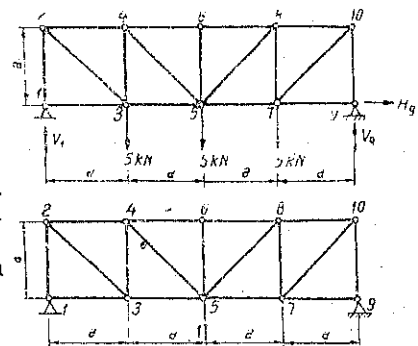


Fig. 10.2

Tabelul 10.2

Bara	N_x	n_x	l	$\frac{N_x n_x l}{EA}$
1-2 și 9-10	-7,5	-0,5	a	$\frac{3,75 a}{EA}$
1-3 și 7-9	0	0	a	0
2-3 și 7-10	+10,6	+0,7	$1,4 a$	$\frac{10,4 a}{EA}$
2-4 și 8-10	-7,5	-0,5	a	$\frac{3,75 a}{EA}$
3-4 și 7-8	-2,5	-0,5	a	$\frac{1,25 a}{EA}$
3-5 și 5-7	+7,5	+0,5	a	$\frac{3,75 a}{EA}$
4-5 și 5-8	+3,5	+0,7	$1,4 a$	$\frac{3,43 a}{EA}$
4-6 și 6-8	-10	-1	a	$\frac{10 a}{EA}$
5-6	0	0	a	0

10.3. Se consideră grinda cu zăbrele din figura 10.3, a. Să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței P , dacă toate barele au aceeași rigiditate EA .

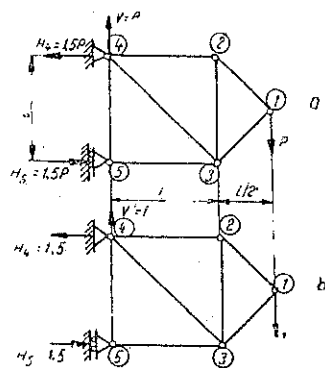


Fig. 10.3

Rezolvare. Deplasarea pe verticală se calculează cu relația

$$v = \sum \frac{N_x \cdot n_x \cdot l_i}{EA}$$

Pentru determinarea eforturilor din bare N_x , se izolează nodurile și se scriu ecuațiile de echilibru.

Se determină eforturile n_x în barele grinzii sub acțiunea forței unitare aplicată în nodul 1 după direcția forței P (Fig. 10.3, b). Eforturile N_x și n_x sînt date în tabelul 10.3 (eforturile pozitive sînt de întindere, iar cele negative sînt de compresiune). Calculul deplasării este dat în tabelul 10.3.

Tabelul 10.3

Bara	N_x	n_x	l_i	$\frac{N_x n_x l_i}{EA}$
1-2	$\frac{\sqrt{2}}{2} P$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} l$	$\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Pl}{EA}$
1-3	$-\frac{\sqrt{2}}{2} P$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} l$	$\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Pl}{EA}$
2-3	$-\frac{1}{2} P$	$-\frac{1}{2}$	l	$\frac{1}{4} \frac{Pl}{EA}$
2-4	$\frac{1}{2} P$	$\frac{1}{2}$	l	$\frac{1}{4} \frac{Pl}{EA}$
3-4	$\sqrt{2} P$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} l$	$2\sqrt{2} \frac{Pl}{EA}$
3-5	$-\frac{3P}{2}$	$-\frac{3}{2}$	l	$\frac{9}{4} \frac{Pl}{EA}$
4-5	0	0	l	0
				$v_1 = \frac{Pl}{4EA} (11 + 10\sqrt{2})$

10.4. Să se determine deplasarea pe verticală și rotirea secțiunii în punctul 2 pentru grinda încadrată din figura 10.4, știind că are momentul de inerție constant.

Rezolvare. 1) Pentru a determina deplasarea punctului 2 pe verticală, se consideră că în acest punct lucrează o forță fictivă Q .

Intervalul 2-1.

$$M = - \left(Qx + q \frac{x^2}{2} \right); \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = -x.$$

Intervalul 1-0.

$$M = - \left[Q(3a + x) + q \cdot 3a \left(\frac{3a}{2} + x \right) \right]; \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = - (3a + x),$$

$$v_2 = \frac{1}{EI} \int_0^{3a} \left(Qx + q \frac{x^2}{2} \right) x dx + \frac{1}{EI} \int_0^a \left[Q(3a + x) + 3aq \left(\frac{3a}{2} + x \right) \right] (3a + x) dx.$$

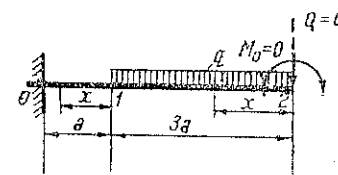


Fig. 10.4

Făcând $Q = 0$, se obține:

$$v_2 = \frac{1}{EI} \int_0^{3a} q \frac{x^3}{2} dx + \frac{1}{EI} \int_0^a \left(\frac{27}{2} a^3 q + 9a^2 qx + \frac{9}{2} a^2 qx + 3aqx^2 \right) dx;$$

$$v_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{81a^4 q}{8} + \frac{27}{2} a^4 q + \frac{9}{2} a^4 q + \frac{9}{4} a^4 q + a^4 q \right] = 31,375 q \frac{a^4}{EI}$$

2) Pentru a determina rotirea secțiunii în punctul 2, se consideră că în acest punct lucrează un moment fictiv M_2 .

Intervalul 2-1:

$$M = - \left(M_0 + q \frac{x^2}{2} \right); \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = -1.$$

Intervalul 1-0:

$$M = - \left[M_0 + q \cdot 3a \left(\frac{3a}{2} + x \right) \right];$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = -1.$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI} \int_0^{3a} \left(M_0 + q \frac{x^2}{2} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^a \left[M_0 + q \cdot 3a \left(\frac{3a}{2} + x \right) \right] dx.$$

Făcând $M_0 = 0$, obținem:

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI} \int_0^{3a} q \frac{x^2}{2} dx + \frac{1}{EI} \int_0^a 3aq \left(\frac{3a}{2} + x \right) dx.$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{27}{6} qa^3 + \frac{9}{2} qa^3 + \frac{3}{2} qa^3 \right] = \frac{10,5}{EI} qa^3.$$

10.5. Pentru bara de secțiune constantă din figura 10.5, a să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii 5 și rotirea secțiunii 3, prin două metode: 1) *Mohr-Maxwell-Verezceaghin*; 2) folosind relația (10.3).

Rezolvare. 1) Se aplică metoda *Mohr-Maxwell-Verezceaghin*. Pentru ușurința calculului se trasează diagrama M separat pentru fiecare sarcină

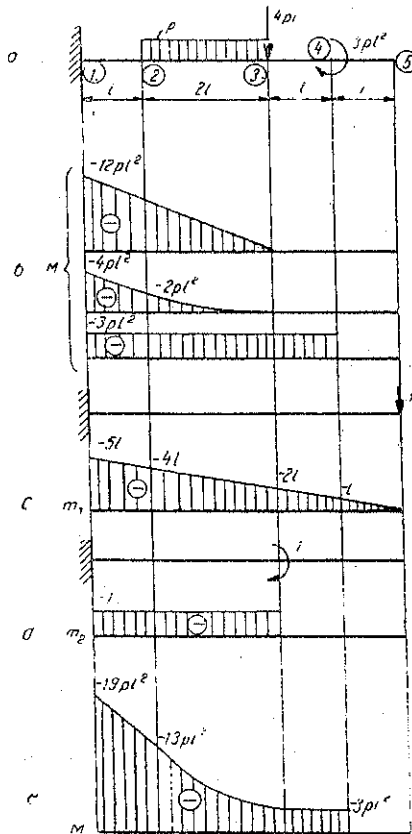


Fig. 10.5

Calculul deplasării v_5 se face folosind diagramele M și m_1 (Fig. 10.5, b și c):

$$\begin{aligned} EI v_5 &= \frac{1}{2} 12 pl^2 \cdot 3l \cdot \left(2l + \frac{2}{3} 3l \right) + \\ &+ \frac{1}{3} 2pl^2 \cdot 2l \left(2l + \frac{3}{4} 2l \right) + 2pl^2 l \left(4l + \frac{l}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} 2pl^2 \cdot l \left(4l + \frac{2}{3} l \right) + 3pl^2 \cdot 4l \cdot 3l = \\ &= pl^4 \left(72 + \frac{14}{3} + 9 + \frac{14}{3} + 36 \right) = \frac{379}{3} pl^4. \end{aligned}$$

Pentru calculul rotirii în secțiunea 3, φ_3 , se folosesc diagramele M și m_2 (Fig. 10.5, b și d):

$$\begin{aligned} EI \varphi_3 &= \left(-\frac{1}{2} 12 pl^2 \cdot 3l \right) (-1) + \left(-\frac{1}{3} 2pl^2 \cdot 2l \right) (-1) + \\ &+ \left(-\frac{6pl^2}{2} l \right) (-1) + (-3pl^2 \cdot 4l) (-1) = pl^3 \left(18 + \frac{4}{3} + 3 + 12 \right) = \frac{103}{3} pl^3. \end{aligned}$$

2) Aplicând relația (10.3) pe fiecare interval al diagramei de momente (Fig. 10.5, e și c) se obține:

$$\begin{aligned} v_5 &= \frac{l}{6EI} [(-3pl^2 - 3pl^2)(-l - 2l) + (-3pl^2)(-l) + (-3pl^2)(-2l)] + \\ &+ \frac{2l}{6EI} \left\{ \left[-3pl^2 - 13pl^2 + \frac{p(2l)^2}{4} \right] (-2l - 4l) + (-3pl^2)(-2l) + \right. \\ &+ (-13pl^2)(-4l) \left. \right\} + \frac{l}{6EI} [(-13pl^2 - 19pl^2)(-4l - 5l) + \\ &+ (-13pl^2)(-4l) + (-19pl^2)(-5l)] = \\ &= \frac{pl^4}{6EI} [18 + 3 + 6 + 2(15 \cdot 6 + 6 + 52) + 32 \cdot 9 + 52 + 95] = \frac{758 pl^4}{6EI} = \frac{379 pl^4}{3EI}. \end{aligned}$$

Calculul rotirii (Fig. 10.5, *e* și *d*):

$$\begin{aligned}\varphi_5 &= \frac{l}{6EI} [(-3pl^2 - 3pl^2)(-1-1) + (-3pl^2)(-1) - 3pl^2(-1)] + \\ &+ \frac{2l}{6EI} \left[\left[-3pl^2 - 13pl^2 + \frac{p(2l)^4}{4} \right] (-1-1) + (-3pl^2)(-1) + \right. \\ &+ \left. (-13pl^2)(-1) \right] + \frac{l}{6EI} [(-13pl^2 - 19pl^2)(-1-1) + (-13pl^2)(-1) + \\ &+ (-19pl^2)(-1)] = \frac{pl^3}{6EI} (18 + 92 + 64 + 32) = \frac{103 pl^3}{3EI}.\end{aligned}$$

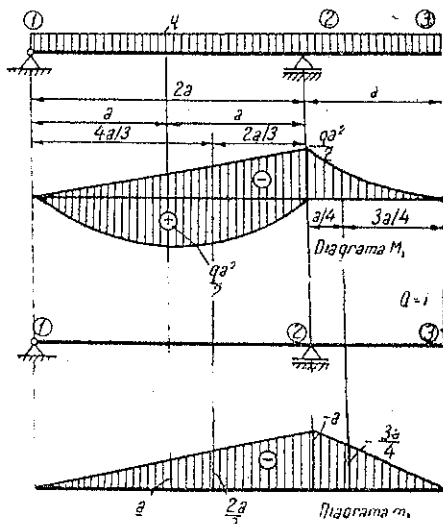


Fig. 10.6

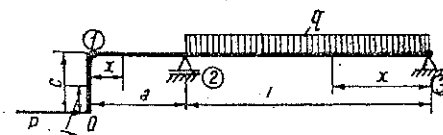


Fig. 10.7

10.7. Se consideră grindă cotită din figura 10.7, de secțiune constantă, încărcată cu o sarcină uniformă distribuită q pe deschiderea l .

10.6. Să se determine deplasarea pe verticală a punctului 3 la grinda din figura 10.6 încărcată cu sarcina uniform distribuită q , știind că are moment de inerție constant.

Rezolvare. Se folosește metoda Mohr-Maxwell. Pentru aceasta s-au trasat: diagrama M_x (prin metoda suprapunerii efectelor) și diagrama m_x pentru forța $Q = 1$ (unitatea de forță), aplicată în 3. Notind cu v_3 săgeata în punctul 3, aplicind *procedul Veresceaghin*, rezultă:

$$\begin{aligned}EIv_3 &= \frac{2}{3} \frac{qa^2}{2} 2a \left(-\frac{a}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-\frac{qa^2}{2} \right) 2a \left(-\frac{2a}{3} \right) + \\ &+ \frac{1}{3} \left(-\frac{qa^2}{2} \right) a \left(-\frac{3a}{4} \right) = \\ &= -\frac{qa^4}{3} + \frac{qa^4}{3} + \frac{qa^4}{8} = \frac{qa^4}{8},\end{aligned}$$

de unde:

$$v_3 = \frac{qa^4}{8EI}.$$

Să se determine sarcina P , astfel ca extremitatea O a consolei să nu se deplaseze pe orizontală. Să se determine în acest caz valoarea forței P , dacă: $l = 5$ m; $q = 1$ kN/m; $a = 2$ m; $c = 1,20$ m. Se vor neglija surtările datorite compresiunii.

Rezolvare. Se folosește metoda lui Castigliano. Se calculează întâi reacțiunile:

$$H_3 = P; \quad V_2 = \frac{ql}{2} + \frac{Pc}{l}; \quad V_3 = \frac{ql}{2} - \frac{Pc}{l}.$$

În tabelul 10.7 se dau expresiile M și $\frac{\partial M}{\partial P}$ în diferitele porțiuni ale grinzii:

$$\begin{aligned}u_0 &= \frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{1}{EI} \left[\int_0^c Py^2 dy + \int_0^a Pc^2 dx + \int_0^c \frac{c}{l} \left(\frac{qx^3}{2} + \frac{Pcx^2}{l} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{qlx^2}{2} \right) dx \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{Pc^3}{3} + Pc^2a + \frac{Pc^2l}{3} - \frac{ql^3c}{24} \right].\end{aligned}$$

Egalind cu zero această expresie, se obține:

$$P = \frac{1}{24} \frac{ql^3}{\frac{c^3}{3} + c^2a + \frac{c^2l}{3}} = \frac{1 \cdot 1,2^3 \cdot 5^3}{24 \left[\frac{1,2^3}{3} + 2 \cdot 1,2^2 + \frac{1,2^2 \cdot 5}{3} \right]} = 1,067 \text{ kN}.$$

Tabelul 10.7

Regiunea	0-1	1-2	2-3
M	$-Py$	$-Pc$	$V_3x - \frac{qx^2}{2} = \left(\frac{ql^2}{2} - Pc \right) \frac{x}{l} - \frac{qx^2}{2}$
$\frac{\partial M}{\partial P}$	$-y$	$-c$	$-\frac{c}{l}x$

10.8. Să se determine săgeata v_k în extremitatea liberă a unei grinzi încastrate atunci când într-o secțiune i acționează o sarcină concentrată P (Fig. 10.8, *a*). Să se determine apoi săgeata v_i în secțiunea i în ipoteza că sarcina concentrată ar acționa în extremitatea liberă a grinzii (Fig. 10.8, *b*).

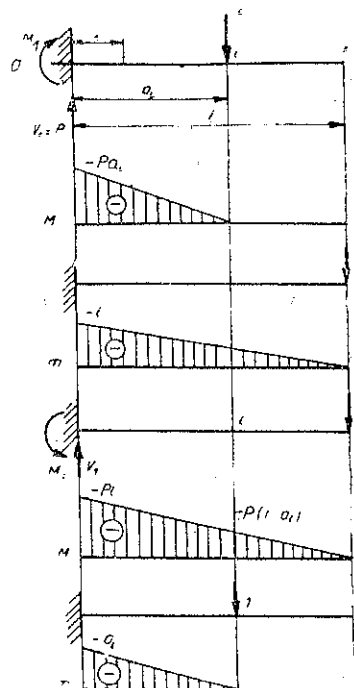


Fig. 10.8

Rezolvare. Se aplică metoda Mohr-Maxwell-Vereșceaghin.

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{P \cdot b_k}{l}; \quad V_1 = \frac{Pa_k}{l}, \\
 V'_0 &= \frac{b_i}{l}; \quad V'_1 = \frac{a_i}{l}, \\
 EI v_i &= \frac{1}{2} \frac{Pa_i b_k}{l} a_i \cdot \frac{2}{3} \frac{a_i b_i}{l} + \\
 &+ \frac{Pa_i b_k}{l} (a_k - a_i) \left(\frac{a_i b_i + a_i b_k}{2l} \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{P b_k}{l} (a_k - a_i)^2 \left[\frac{a_i b_k}{l} + \frac{1}{3} \left(\frac{a_i b_i - a_i b_k}{l} \right) \right] + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{Pa_i b_k}{l} b_k \cdot \frac{2}{3} \frac{a_i b_k}{l}
 \end{aligned}$$

Rezolvare. Se aplică metoda Mohr-Maxwell-Vereșceaghin.

a) Calculul săgeții v_k :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= P; \quad M_1 = -Pa_i, \\
 EI v_k &= \frac{1}{2} Pa_i^2 \left(l - a_i + \frac{2}{3} a_i \right); \\
 v_k &= \frac{Pa_i^2}{6EI} (3l - a_i).
 \end{aligned}$$

b) Calculul săgeții v_i :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= P; \quad M_1 = -Pl, \quad EI v_i = P(l - a_i) a_i \cdot \frac{a_i}{2} + \\
 &+ \frac{1}{2} Pa_i^2 \frac{2}{3} a_i = \frac{Pa_i^2}{2} \left(l - a_i + \frac{2}{3} a_i \right), \\
 v_i &= \frac{Pa_i^2}{6EI} (3l - a_i).
 \end{aligned}$$

Egalitatea celor două expresii este consecința teoremei reciprocității deplasărilor.

10.9. Să se determine săgeata unei grinzi simplu rezemate, de lungime l , în secțiunea i , atunci cînd în secțiunea k acționează o forță P (Fig. 10.9).

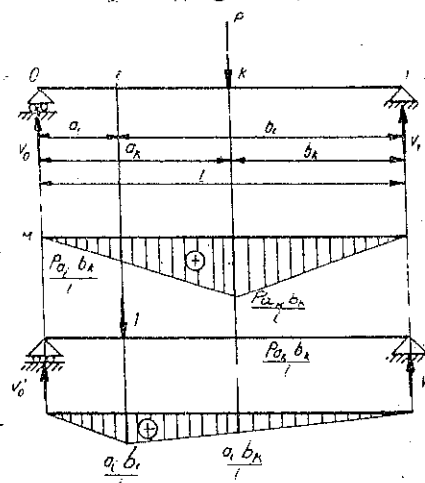


Fig. 10.9

Efectuînd calculele se obține:

$$v_i = \frac{1}{EI} \frac{Pa_i b_k}{6EI} (l^2 - a_i^2 - b_k^2).$$

10.10. La grinda din figura 10.10, a se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii 5 și rotirea secțiunii 2. Grinda este prismatică.

Rezolvare. Se folosește metoda Mohr-Maxwell, aplicînd regula de integrare a lui Vereșceaghin.

Încărcarea secundară pentru calculul deplasării pe verticală a secțiunii 5 este dată în figura 10.10, c.

Deoarece deformăția unghiulară în punctul 2 este discontinuă (Fig. 10.10, e) unghiurile φ_2^{12} , respectiv φ_2^{25} se calculează separat. Pentru calculul lui φ_2^{12} se aplică pe bara 1-2 un cuplu unitar, la stînga punctului 2 (Fig. 10.10, f), iar pentru φ_2^{25} cuplul unitar se aplică la dreapta punctului 2, adică pe bara 2-5 (Fig. 10.10, h).

Pentru calculul deplasării pe verticală, v_5 , se folosesc diagramele M și m :

$$\begin{aligned}
 EI v_5 &= \frac{1}{2} 2Pl^2 \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} Pl^2 \cdot \frac{3}{4} l + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{3}{2} Pl^2 \cdot \frac{5}{6} l + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} Pl^2 \cdot \frac{2}{3} l - \frac{1}{2} \frac{1}{2} Pl^2 \cdot \frac{2}{3} l, \\
 v_5 &= \frac{5}{3} \frac{Pl^3}{EI}
 \end{aligned}$$

Calculul rotirii secțiunii 2 se face utilizînd diagramele M ,

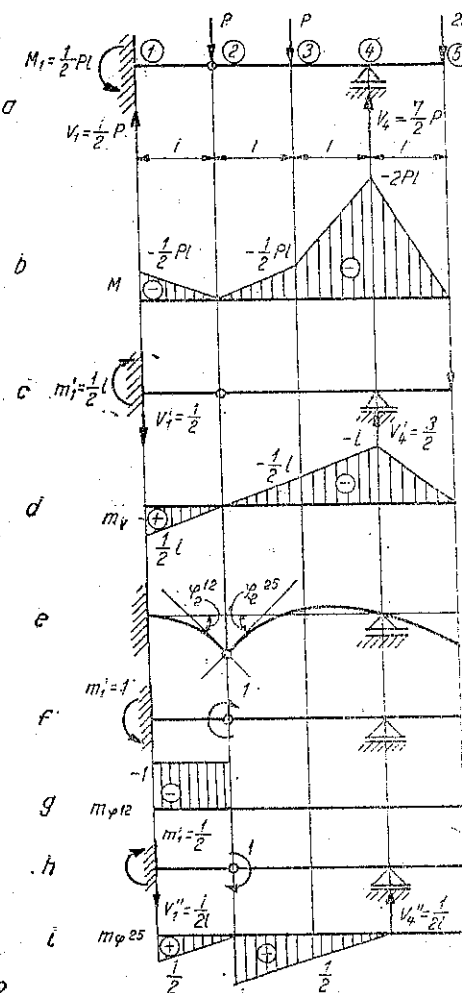


Fig. 10.10

$m_{\varphi 12}$ și $m_{\varphi 25}$. Se notează cu φ_2^{12} rotirea secțiunii 2, aparținând grinzii 1-2, iar cu φ_2^{25} rotirea secțiunii 2, a grinzii 2-5.

$$\varphi_2^{12} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{2} Pl^2 \right) \cdot (-1) = \frac{Pl^2}{4EI},$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^{25} = \frac{1}{EI} & \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{1}{2} Pl^2 \right) \frac{2}{3} \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{2} Pl^2 \right) \frac{2}{3} + \right. \\ & \left. + \left(-\frac{1}{2} Pl^2 \right) \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2} \frac{3}{2} Pl^2 \right) \frac{1}{6} \right] = -\frac{1}{2} \frac{Pl^2}{EI}. \end{aligned}$$

10.11. Să se determine deplasarea pe verticală a secțiunii 4 și rotirea secțiunii 1 pentru grinda din figura 10.11, a. Grinda este de secțiune constantă, simplu rezemată în secțiunea 2, iar legătura din punctul 4 îi permite deplasarea pe verticală, împiedicând rotirea.

Rezolvare. Se aplică metoda Mohr-Maxwell. Valorile reacțiunilor sînt:

$$V_2 = 3pl; M_4 = pl^2$$

$$M_{12} = -plx - \frac{px^2}{2}; M_{43} = -pl^3; M_{32} = -pl^2 - \frac{px^2}{2}$$

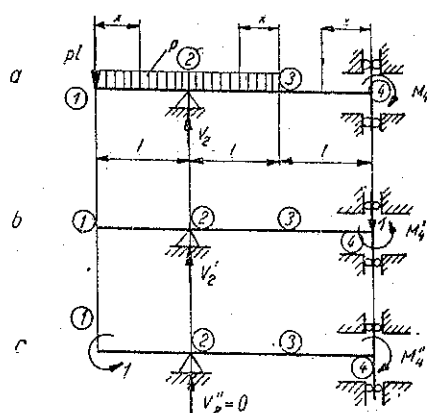


Fig. 10.11

Pentru calculul deplasării v_4 se introduce forța unitară în secțiunea 4 (Fig. 10.11, b). Reacțiunile sînt: $V'_2 = 1$, $M'_4 = 2l$.

$$m_{12} = 0; m_{43} = 2l - x;$$

$$m_{32} = 2l - (l + x) = l - x,$$

$$\begin{aligned} EI v_4 = \int_0^l (-pl^2)(2l - x) dx + \\ + \int_0^l \left(-pl^2 - p \frac{x^2}{2} \right) (l - x) dx = -\frac{49}{24} pl^4. \end{aligned}$$

Pentru calculul rotirii secțiunii 1, φ_1 , se introduce un cuplu unitar în secțiunea 1 (Fig. 10.11, c). Reacțiunile sînt: $V'_2 = 0$, $M'_4 = 1$.

$$m_{12} = m_{43} = m_{32} = -1.$$

$$\begin{aligned} EI \varphi_1 = \int_0^l \left(-plx - \frac{px^2}{2} \right) (-1) dx + \int_0^l (-pl^2) (-1) dx + \\ + \int_0^l \left(-pl^2 - \frac{px^2}{2} \right) (-1) dx = \frac{17}{6} pl^3. \end{aligned}$$

10.12. Să se determine deplasarea pe verticală, pe orizontală și rotirea secțiunii 3 pentru grinda cotită din figura 10.12, știind că are momentul de inerție constant. Se va neglija lungirea barei 1-2.

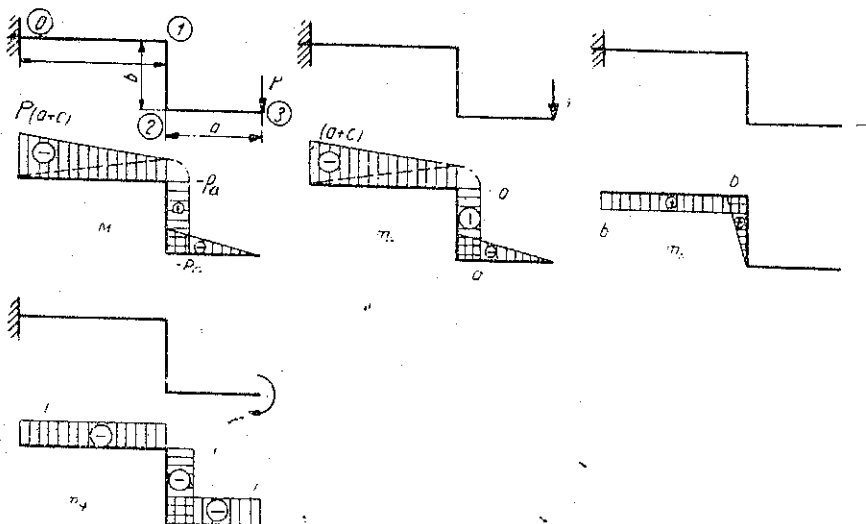


Fig. 10.12

Rezolvare. Se aplică metoda Mohr-Maxwell-Vereșceaghin. Cu ajutorul diagramelor M și m , se obține:

$$\begin{aligned} v_3 = \frac{1}{EI} \sum \int M m dx = \frac{1}{EI} \sum A y_c = \frac{1}{EI} & \left[\frac{1}{2} (-Pa) a \frac{2}{3} (-a) + \right. \\ & + (-Pa) b (-a) + \frac{1}{2} (-Pa) c \left\{ \frac{2}{3} (-a) + \frac{1}{3} [-(a+c)] \right\} + \\ & + \frac{1}{2} [-P(a+c)] c \left\{ \frac{1}{3} (-a) + \frac{2}{3} [-(a+c)] \right\} \left. \right] = \frac{P}{EI} \left[\frac{a^3}{3} + a^2b + \right. \\ & + \frac{a^2c}{3} + \frac{ac(a+c)}{6} + \frac{ac(a+c)}{6} + \frac{c(a+c)^2}{3} \left. \right] = \frac{P}{3EI} [(a+c)^3 + 3a^2b]. \end{aligned}$$

Cu ajutorul diagramelor M și m_b .

$$\begin{aligned} u_3 = \frac{1}{EI} & \left[-\frac{1}{2} [Pa + P(a+c)] c (+b) + (-Pa) b \frac{1}{2} (+b) \right] = \\ & = -\frac{Pb}{2EI} [ab + 2ac + c^2]. \end{aligned}$$

Semnul (-) arată că deplasarea se face în sens invers forței unitare.

Cu ajutorul diagramelor M și m_φ :

$$\varphi_3 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (-Pa) a(-1) + (-Pa) b(-1) + \left[-\frac{Pa + P(a+c)}{2} c \right] (-1) \right] =$$

$$= \frac{P}{2EI} (a^2 + 2ab + 2ac + c^2).$$

10.13. Se consideră sistemul de bare din figura 10.13. Să se determine deplasarea pe verticală, pe orizontală paralel cu bara 3-2 și rotirea secțiunii 4, știind că toate barele sînt de secțiune circulară, de același diametru d . Modulul de elasticitate al materialului este E . Se va neglija scurtarea barelor 1-2 și 4-2.

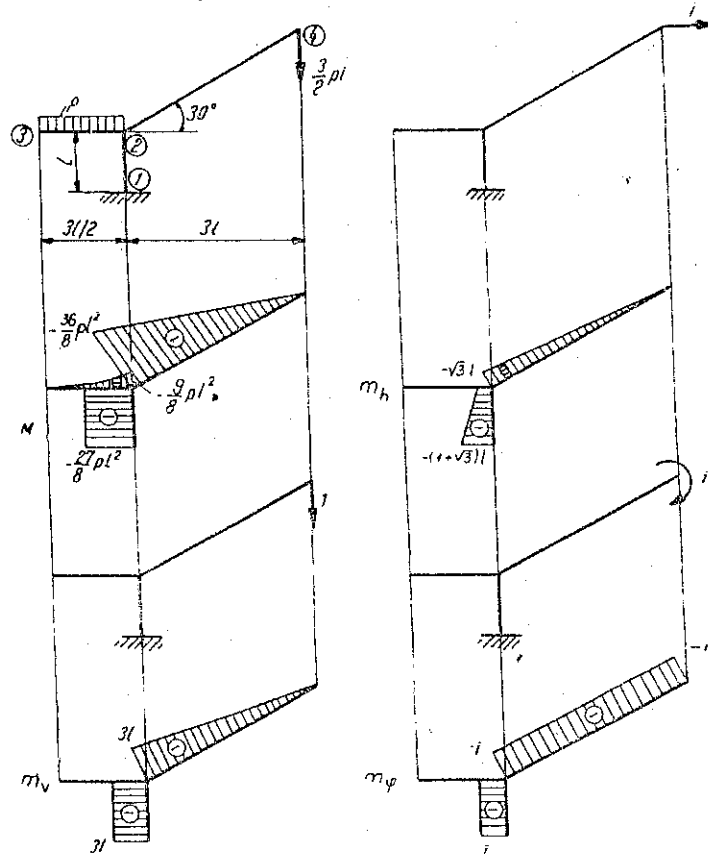


Fig. 10.13

Rezolvare. Se aplică metoda Mohr-Maxwell-Verescheaghin. Se trasează diagramele M , m_v , m_h și m_φ .

Deplasarea pe verticală:

$$v_4 = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{27}{8} Pl^2 \right) l \cdot (-3l) + \frac{1}{2} \left(-\frac{36}{8} Pl^2 \right) 2\sqrt{3}l \left(-\frac{2}{3} 3l \right) \right] = 25,7 \frac{Pl^4}{EI}$$

Deplasarea pe orizontală:

$$u_4 = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{27}{8} Pl^2 \right) l(-2,232l) + \frac{1}{2} \left(-\frac{36}{8} Pl^2 \right) 2\sqrt{3}l \left(-\frac{2}{3} \sqrt{3}l \right) \right] = 16,53 \frac{Pl^4}{EI}$$

Rotirea secțiunii 4.

$$\varphi_4 = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{27}{8} Pl^2 \right) l \cdot (-1) + \frac{1}{2} \left(-\frac{36}{8} Pl^2 \right) 2\sqrt{3}l(-1) \right] = 11,17 \frac{Pl^3}{EI}$$

10.14. Bara cotită 1-2-3 (Fig. 10.14,a) se sprijină în punctul 1 pe grinda 1-4-5-6, iar în capătul 3 este solicitată de cuplul M_x . Se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii 5, grinda avînd momentul de inerție, I , constant.

Rezolvare. Datorită cuplului M_x , în punctul 1 se produce forța verticală P , care echilibrează cuplul. Din ecuația de momente față de axa x , rezultă:

$$P = \frac{M_x}{r}$$

Grinda 1-4-5-6 este solicitată de forța P . Problema se reduce la studiul deformației grinzii din figura 10.14, b.

În figura 10.14,c este trasată diagrama de momente pentru încărcarea primară (Fig. 10.14, b), iar în figura 10.14, e pentru încărcarea secundară (Fig. 10.14,d). Aplicînd procedeul Verescheaghin rezultă:

$$v_5 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} 2l \frac{l}{2} \frac{Pl}{2} \right) = \frac{Pl^3}{4EI}$$

Observație. Deoarece pe intervalul 4-5-6 diagramele

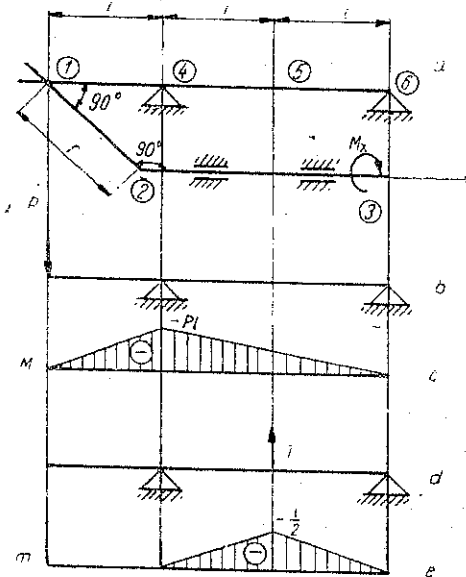


Fig. 10.14

M și m sînt liniare s-a luat aria din diagrama m și ordonata din diagrama M , avînd în felul acesta de calculat un singur termen.

10.15. Un cadru cîot în spațiu (Fig. 10.15, a) are secțiunea circulară cu momentul de inerție I . Materialul din care este făcut cadrul are modulul de elasticitate longitudinal E și modulul de elasticitate transversal G . Se cere să se determine, pentru punctul 4 al cadrului, deplasările pe verticală și pe orizontală după direcțiile barelor 3-4 și 2-3.

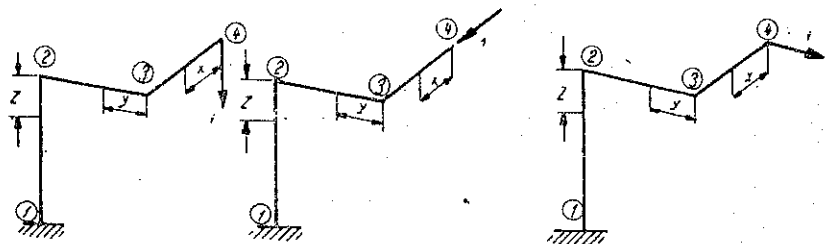
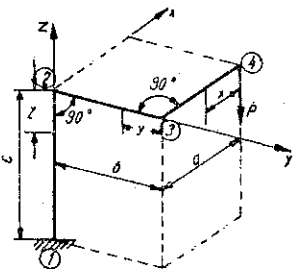


Fig. 10.15

Rezolvare. Se aplică metoda *Mohr-Maxwell*.

Sistemul primar este reprezentat în figura 10.15, a și este format din încărcarea dată. Sistemul secundar este reprezentat în:

- figura 10.15, b pentru calculul deplasării pe verticală;
- figura 10.15, c pentru calculul deplasării pe orizontală după direcția barei 3-4;
- figura 10.15, d pentru calculul deplasării pe orizontală paralelă cu bara 2-3.

Eforturile produse de sistemul primar și de cel secundar sînt date în tabelul 10.15.

Tabelul 10.15

Bara	Eforturile produse de:			
	sistemul primar	sistemul secundar		
	fig. 10.15, a	fig. 10.15, b	fig. 10.15, c	fig. 10.15, d
4-3	$M_y = -Px$	$m_y' = -x$	$n'' = -1$	$m_z''' = -x$
3-2	$M_y = M_z = Pa$ $M_x = -1Py$	$m_y' = m_z' = a$ $m_x' = -y$	$n_z'' = -z$	$n'' = 1$ $m_z''' = -a$
2-1	$M_y = -Pa$ $M_x = -Pb$ $N = -P$	$m_y' = -a$ $m_x' = -b$ $n' = -1$	$m_z'' = m_y'' = b$ $m_y'' = z$	$m_z''' = m_y''' = a$ $m_x''' = -z$

Deplasarea pe verticală:

$$v_4 = \int_0^a \frac{M_y m_y'}{EI} dx + \int_0^b \frac{M_x m_x'}{EI} dy + \int_0^b \frac{M_z m_z'}{GI_p} dy + \\ + \int_0^c \frac{M_y m_y'}{EI} dz + \int_0^c \frac{M_x m_x'}{EI} dz + \int_0^c \frac{N n'}{EA} dz.$$

Ținînd seama de datele din tabelul 10.15 și de faptul că la secțiunea circulară $I_x = 2I$ se obține:

$$v_4 = \frac{P}{3EI} [a^3 + b^3 + 3(a^2 + b^2)c] + \frac{Pa^2b}{2GI} + \frac{Pc}{EA}.$$

Deplasarea pe orizontală după direcția barei 3-4:

$$u_4 = \int_0^c \frac{M_y m_y''}{EI} dz = -\frac{Pac^2}{2EI}.$$

Deplasarea pe orizontală paralelă cu bara 2-3:

$$u_4 = \int_0^c \frac{M_x m_x''}{EI} dz = \frac{Pbc^2}{2EI}.$$

10.16. Se consideră cadrul din figura 10.16, a. Să se determine cu cît se apropie în urma deformăției punctele A și B. Rigla și stîlpul au același moment de inerție I . Modulul de elasticitate al materialului este E .

Rezolvare. Se aplică metoda *Mohr-Maxwell-Vereșceaghin*. Se consideră două sisteme de încărcare:

- sistemul primar (Fig. 10.16, a);
- sistemul secundar format din forța $P = 1$, avînd ca suport dreapta AB (Fig. 10.16, b).

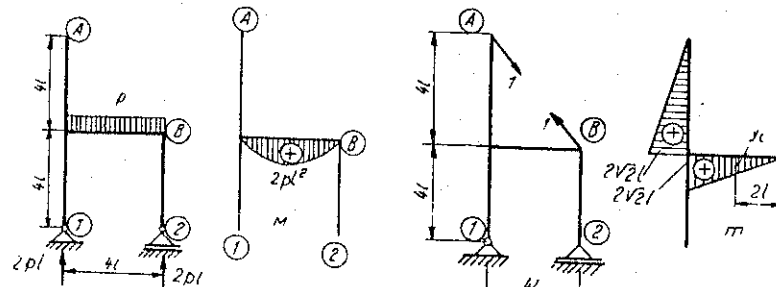


Fig. 10.16

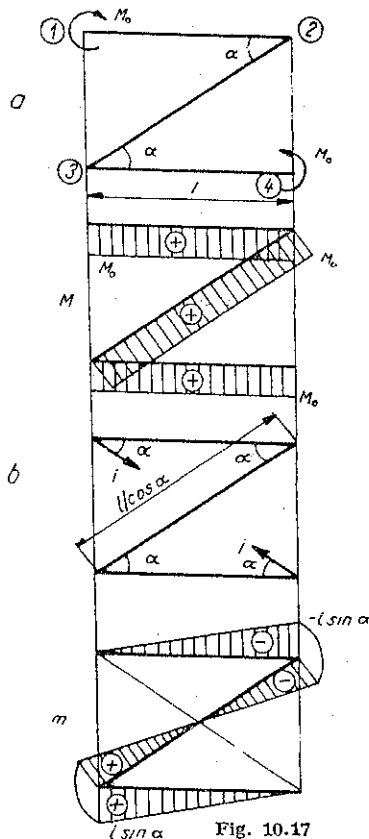


Fig. 10.17

Se construiesc diagramele M și m cu ajutorul cărora se calculează distanța Δ cu care se apropie punctele A și B ,

$$\Delta = \frac{1}{EI} \frac{2}{3} 4l \cdot 2pl^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} l = \frac{16\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{pl^4}{EI}$$

10.17. Pentru sistemul de bare drepte din figura 10.17, a să se determine cu cât se apropie punctele 1 și 4 datorită solicitării cu cuplurile M_0 . Barele au același moment de inerție I .

Rezolvare. Se aplică metoda Mohr-Maxwell-Vereșceaghin:

- sistemul primar (Fig. 10.17, a);
- sistemul secundar (Fig. 10.17, b).

Se construiesc diagramele M și m cu ajutorul cărora se calculează valoarea Δ cu care se apropie punctele 1 și 4,

$$\Delta = \frac{1}{EA} \left[-M_0 l \frac{l \sin \alpha}{2} - \frac{M_0 l}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{l \sin \alpha}{2} + \frac{M_0 l}{2 \cos \alpha} \frac{l \sin \alpha}{2} + M_0 l \frac{l \sin \alpha}{2} \right] = 0.$$

Observație. Când diagrama M este simetrică, iar diagrama m este antisimetrică, deplasarea calculată, folosind cele două diagrame, este nulă.

10.18. Să se determine deplasarea pe orizontală a reazemului 2 la cadrul din figura 10.18. Ambele grinzi ale cadrului au același moment de inerție I .

Se neglijează deformările datorite eforturilor axiale.

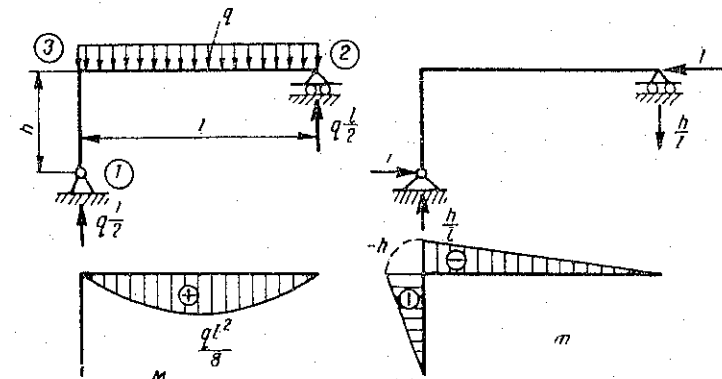


Fig. 10.18

Rezolvare. Se aplică metoda Mohr-Maxwell-Vereșceaghin.

$$u_2 = \int_1^2 \frac{M_x m_x}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \left(-\frac{h}{2} \right) = -\frac{ql^3 h}{24 EI}$$

Semnul (—) arată că deplasarea reazemului 2 se face în sens invers sensului forței unitare.

10.19. Să se determine deplasarea reazemului 2 al cadrului din figura 10.19, încărcat cu o sarcină uniform distribuită q pe grinda orizontală. Cadrul este articulat la capătul 1 și simplu rezemat în 2. Toate grinzile cadrului au același moment de inerție I .

Rezolvare. Se aplică metoda lui Castigliano. Pentru ușurința calculului se înlocuiește tabelul 10.19.

Înlocuind $H = 0$ în aceste expresii, se obține:

$$u_2 = \frac{1}{EI} \int M \cdot \frac{\partial M}{\partial H} ds = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) (-h) dx = -\frac{ql^3 h}{12 EI}$$

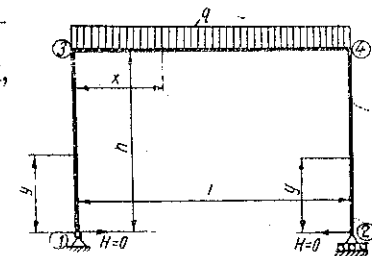


Fig. 10.19

Tabelul 10.19

Regiunea	1-3	3-4	4-2
M	$-Hy$	$\frac{qx}{2} - \frac{qx^2}{2} - Hh$	$-Hy$
$\frac{\partial M}{\partial H}$	$-y$	$-h$	$-y$

10.20. Se consideră cadrul închis din figura 10.20, a, acționat de o sarcină uniform distribuită p . Se cere să se determine deplasarea pe verticală a articulației 5. Secțiunea barelor este constantă (momentul de inerție I), iar modulul de elasticitate este E .

Rezolvare. Se determină reacțiunile cu ajutorul ecuațiilor de echilibru:

$$-H_1 + 2pl = 0,$$

$$-V_1 + V_2 = 0,$$

$$2pl \cdot l - 4l \cdot V_2 = 0.$$

$$\text{Rezultă: } H_1 = 2pl; V_1 = V_2 = \frac{pl}{2}.$$

Apoi se determină forțele interioare din articulația 5 în modul următor. Se presupune articulația 5 desfăcută: pe secțiunea din stânga acționează două forțe H_5 și V_5 , iar pe secțiunea din dreapta aceleași forțe cu sensuri opuse (Fig. 10.20, b). Se scrie că momentele încovoietoare în articulațiile 3 și 4 sînt nule:

$$+H_5 \cdot 2l - V_5 \cdot 2l + 2pl \cdot 2l - 2pl \cdot l = 0; H_5 \cdot 2l + V_5 \cdot 2l = 0.$$

De aici se deduc valorile H_5 și V_5 :

$$H_5 = -\frac{pl}{2}; V_5 = \frac{pl}{2}.$$

Se trasează diagrama momentelor încovoietoare. S-a ales în mod convențional sensul de parcurgere 5-2-4-3-1-5. Rezultă:

$$M_2 = -V_5 \cdot 2l = -pl^2; M_4 = 0,$$

$$M_3 = 0, M_1 = V_5 \cdot 2l = pl^2.$$

Pe bara 1-3 variația este parabolică. Pe bara 3-4, $M_x = 0$. Pe barele 4-2 și 1-2 variațiile sînt liniare (Fig. 10.20, c).

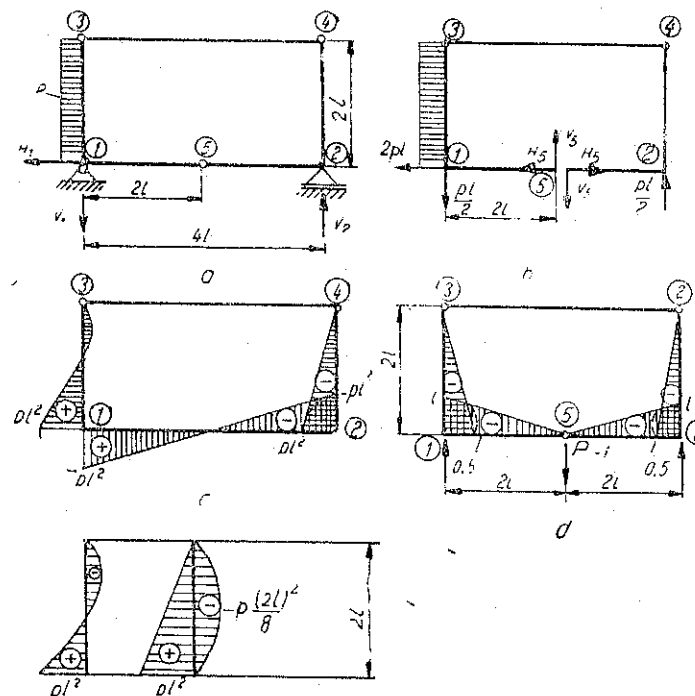


Fig. 10.20

Observație. Dacă se alegea ca sens de parcurgere al cadrului sensul 5-1-3-4-2-5, semnele momentelor se inversau.

Se presupune acum același cadru sollicitat de o sarcină concentrată verticală $P = 1$ în articulația 5. Procedind ca mai sus, rezultă:

— reacțiunile: $V_1 = V_2 = 0,5$; $H_1 = 0$,

— componentele reacțiunii din articulația 5: $H_5 = 0$; $V_5 = 0,5$,

— diagrama momentelor încovoietoare (Fig. 10.20, d).

Deplasarea pe verticală a articulației 5 este:

$$v_5 = \int \frac{M_x m_x}{EI} ds.$$

Integralele se calculează cu metoda Verzeaghin. Pentru bara 1-3 se descompune diagrama din figura 10.20, c în două diagrame (Fig. 10.20, e): una parabolică datorită sarcinii uniform repartizate p acționind pe grinda

simplu rezemată 1-3 și una triunghiulară datorită momentului $M_1 = pl^2$ acționind în secțiunea 1.

$$v_5 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} pl^2 \cdot 2l \cdot \left(-\frac{2}{3} l \right) + \left(-\frac{2}{3} p \frac{(2l)^2}{8} \right) 2l \cdot \left(-\frac{l}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} pl^2 \cdot 2l \cdot \left(-\frac{2}{3} l \right) + \left(-\frac{1}{2} pl^2 \cdot 2l \right) \cdot \left(-\frac{2}{3} l \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (-pl^2) \cdot 2l \cdot \left(-\frac{2}{3} l \right) \right] = \frac{pl^4}{3EI}.$$

Deplasarea articulației 5 se face în jos ($v_5 > 0$).

10.21. Pentru barele curbe cu secțiune constantă din figura 10.21, a, b se cere să se calculeze deplasările pe orizontală ale secțiunii 2.

Rezolvare. Pentru ambele cazuri se aplică metoda Mohr-Maxwell.

a) Pentru bara din figura 10.21, a (Fig. 10.21, c):

$$(1-3) \quad M_\varphi = Pr \sin \varphi - \frac{P}{2} r (1 - \cos \varphi); \quad m_\varphi = r \sin \varphi;$$

$$(2-3) \quad M_\varphi = \frac{P}{2} r (1 - \cos \varphi); \quad m_\varphi = r \sin \varphi.$$

$$\delta_{2h} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi m_\varphi r d\varphi = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[Pr \sin \varphi - \frac{P}{2} r (1 - \cos \varphi) \right] r \sin \varphi r d\varphi + \right. \\ \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P}{2} r (1 - \cos \varphi) r \sin \varphi r d\varphi \right\} = \frac{\pi Pr^3}{4EI}.$$

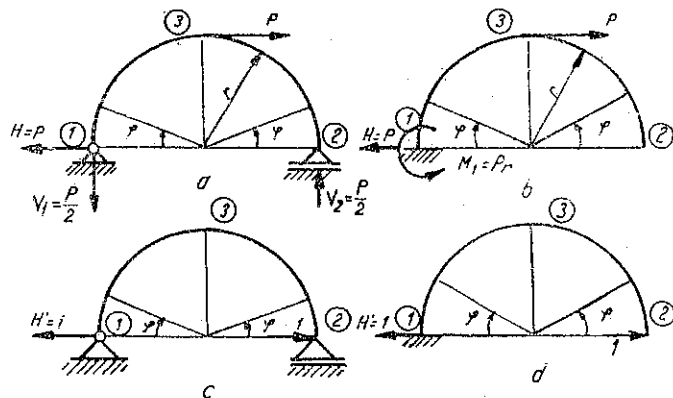


Fig. 10.21

b) Pentru bara din figura 10.21, b (Fig. 10.21, d):

$$(1-3) \quad M_\varphi = Pr \sin \varphi - Pr; \quad m_\varphi = r \sin \varphi;$$

$$(2-3) \quad M_\varphi = 0; \quad m_\varphi = r \sin \varphi.$$

$$\delta_{2h} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Pr (\sin \varphi - 1) r \sin \varphi r d\varphi = \frac{Pr^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi - \sin \varphi) d\varphi = \\ = \frac{Pr^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) = \frac{(\pi - 4) Pr^3}{4 EI}.$$

10.22. Un inel circular, fără eforturi inițiale, este tăiat într-o secțiune (Fig. 10.22), iar capetele sint îndepărtate cu o distanță f , prin acțiunea forțelor P .

Se cere să se calculeze forța P necesară pentru producerea deformației f , respectiv să se determine valorile f și P așa ca să nu se depășească rezistența admisibilă.

Aplicație numerică: secțiunea dreptunghiulară cu $b=4$ mm; $h=3$ mm; $R=50$ mm; materialul: fontă cu $E=10^6$ daN/cm²; $\sigma_a=300$ daN/cm².

Rezolvare. Se aplică relația (10.5) în care se face $N=0$, $M=0$, iar $ds=Rd\varphi$. Momentul încovoietor în secțiunea φ este:

$$M = PR(1 - \cos \varphi), \quad \frac{\partial M}{\partial P} = R(1 - \cos \varphi).$$

Săgeata f , în direcția forței P , este:

$$f = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^{2\pi} M \frac{\partial M}{\partial P} R d\varphi = \\ = \frac{1}{EI} \int_0^{2\pi} PR (1 - \cos \varphi) R (1 - \cos \varphi) R d\varphi = \frac{3\pi PR^3}{EI}.$$

Forța necesară este:

$$P = \frac{EIf}{3\pi R^3}. \quad (1)$$

Considerind bara cu rază de curbura mare, se aplică formula barelor drepte și se calculează momentul încovoietor capabil:

$$M_{max} = W \sigma_a = \frac{bh^2}{6} \sigma_a = \frac{0,4 \cdot 0,3^2}{6} \cdot 300 = 1,8 \text{ daNcm}.$$

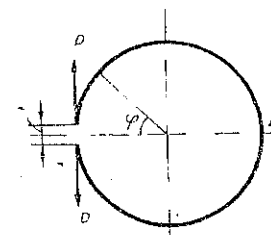


Fig. 10.22

Acest moment are loc în secțiunea B:

$$M_{max} = M_B = 2PR = 1,8 \text{ daNm.}$$

$$P = \frac{M_{max}}{2R} = \frac{1,8}{2 \cdot 5} = 0,18 \text{ daN.} \quad (2)$$

Săgeata se află din (1):

$$f = \frac{3\pi PR^3}{EI} = \frac{3\pi \cdot 0,18 \cdot 5^3}{10^6 \cdot \frac{1}{12} \left(\frac{4}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^3} = 0,235 \text{ cm.} \quad (3)$$

Problema reprezintă operația de montare a unui segment de fontă pe piston. În realitate, la segment, distanța f este mai mare, întrucât s-a tăiat o porțiune din inel, necesară producerii presiunii pe cilindru în stare montată.

10.23. Cele două arce de oțel din figura 10.23, a de rază $R = 50 \text{ cm}$ și moment de inerție $I_z = 1 \text{ cm}^4$ sunt apăsate cu forțele $P = 500 \text{ daN}$. Să se calculeze cu cât se apropie punctele de aplicație ale forțelor P .

Rezolvare. Se separă barele ca în figura 10.23, b și se scrie momentul încovoietor într-o secțiune oarecare D :

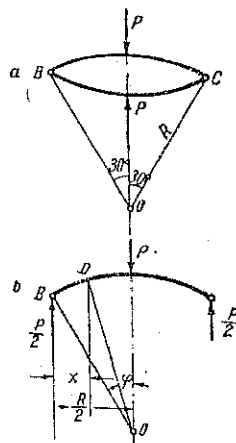


Fig. 10.23

$$M = \frac{P}{2} x = \frac{P}{2} \left(\frac{R}{2} - R \sin \varphi \right),$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{2} - R \sin \varphi \right).$$

Se aplică teorema lui Castigliano, cu limite de la 0 la 30° , de patru ori:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{4}{EI_z} \int_0^{30^\circ} M \frac{\partial M}{\partial P} R d\varphi = \\ &= \frac{4}{EI_z} \int_0^{30^\circ} \frac{PR^3}{4} \left(\frac{1}{2} - \sin \varphi \right)^2 d\varphi, \\ f &= \frac{PR^3}{EI} \int_0^{30^\circ} \left(\frac{1}{4} - \sin \varphi + \sin^2 \varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{PR^3}{EI_z} \left(\frac{3\pi}{24} + \frac{3\sqrt{3}}{8} - 1 \right) = 0,042 \frac{PR^3}{EI_z}. \end{aligned}$$

Cu datele numerice:

$$f = 0,042 \frac{500 \cdot 50^3}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1} = 1,25 \text{ cm.}$$

10.24. Să se calculeze deplasarea pe verticală și rotirea capătului liber pentru sistemul de bare din figura 10.24, a . Barele sistemului au același moment de inerție.

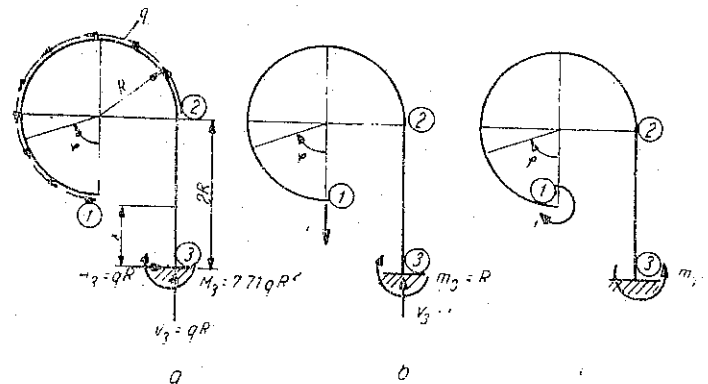


Fig. 10.24

Rezolvare. Se aplică metoda Mohr-Maxwell. Încărcarea primară este reprezentată în figura 10.24, a . În figura 10.24, b este dată încărcarea secundară pentru calculul deplasării verticale, v_1 , iar în figura 10.24, c pentru calculul rotirii, β_1 . Expresiile momentelor încovoietoare pentru cele trei sisteme de încărcare sunt date în tabelul 10.24. Expresia momentului M a fost dedusă la problema 3.62.

Tabelul 10.24

Intervalul	Expresia momentului încovoietor pentru încărcarea din figura		
	10.24, a M	10.24, b m_v	10.24, c m_β
1 - 2	$qR^2(\sin \varphi - \varphi)$	$R \sin \varphi$	1
3 - 2	$-7,71qR^2 + qRx$	$-R$	1

$$\begin{aligned} EIv_1 &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} qR^2(\sin \varphi - \varphi) \sin \varphi \cdot R d\varphi + \int_0^{2R} (-7,71qR^2 + qRx)(-R) dx = \\ &= qR^4 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin^2 \varphi - \varphi \sin \varphi) d\varphi + qR^2 \int_0^{2R} (7,71R - x) dx = \\ &= qR^4 \left[\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi - (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \right]_{0}^{\frac{3\pi}{2}} + 13,42 qR^4 \end{aligned}$$

$$EI v_1 = qR^3 \left[\frac{3\pi}{4} + 1 \right] + 13,42 qR^4 = 16,775 qR^4,$$

$$v_1 = 16,775 \frac{qR^4}{EI}.$$

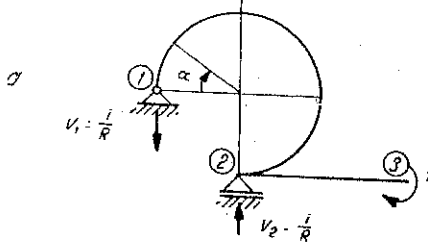
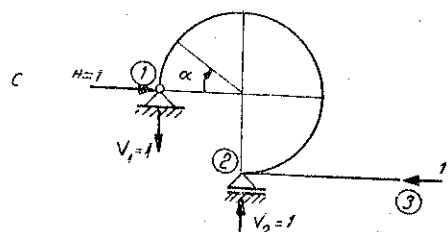
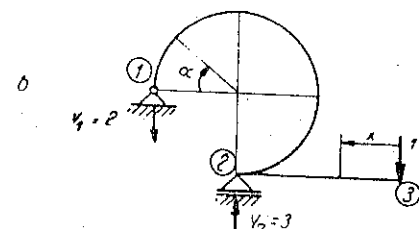
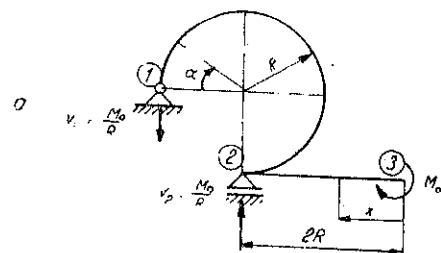


Fig. 10.25

$$EI \beta_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} qR^2 (\sin \varphi - \varphi) R d\varphi +$$

$$+ \int_0^{2R} (-7,71qR^2 + qRx) dx =$$

$$= qR^3 \left[-\cos \varphi - \frac{\varphi^2}{2} \right]_0^{\frac{3\pi}{2}} -$$

$$-13,42 qR^3 = -qR^3 \left(\frac{9\pi^2}{8} + 12,42 \right),$$

$$\beta_1 = -23,52 \frac{qR^3}{EI}.$$

Semnul minus arată că secțiunea 1 se rotește în sens invers cuplului unitar din figura 10.24,c.

10.25. Se consideră sistemul de bare de secțiune constantă din figura 10.25,a. Să se determine deplasarea pe verticală, orizontală și rotirea secțiunii 3.

Rezolvare. Se aplică metoda Mohr-Maxwell.

Din figura 10.25,a :

$$M_{12} = -\frac{M_0}{R} (R - R \cos \alpha).$$

$$M_{32} = -M_0.$$

— Deplasarea pe verticală (Fig. 10.25, b), v_3 :

$$m_{12} = -2 (R - R \cos \alpha); m_{32} = -x,$$

$$EI v_3 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 2M_0 R (1 - \cos \alpha)^2 R d\alpha +$$

$$+ \int_0^{2R} M_0 x dx = 2M_0 R^2 \left(\frac{9\pi}{4} + 3 \right).$$

— Deplasarea pe orizontală (Fig. 10.25,c), u_3 :

$$m_{12} = -1 \cdot R \sin \alpha - 1 \cdot (R - R \cos \alpha); m_{32} = 0,$$

$$EI u_3 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} M_0 (1 - \cos \alpha) (\sin \alpha + 1 - \cos \alpha) R \cdot R d\alpha = M_0 R^2 \left(\frac{9\pi}{4} + \frac{5}{2} \right).$$

— Rotirea secțiunii 3 (Fig. 10.25, d), φ_3 :

$$m_{12} = -\frac{1}{R} (R - R \cos \alpha); m_{32} = -1,$$

$$EI \varphi_3 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} M_0 (1 - \cos \alpha)^2 R d\alpha +$$

$$+ \int_0^{2R} M_0 dx = M_0 R \left(\frac{9\pi}{4} + 4 \right).$$

10.26. Pentru sistemul de bare din figura 10.26 se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a capătului liber. Barele sistemului sînt de secțiune circulară avînd același diametru.

Rezolvare. Se aplică metoda Castigliano.

Calculul deplasării este redat în tabelul 10.26.

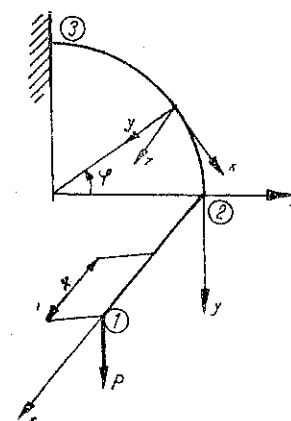


Fig. 10.26

Tabelul 10.26

Bara	M	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$\frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial P} ds; \frac{1}{GI_p} \int M \frac{\partial M}{\partial P} ds.$
1-2	$M_x = -Px$	$-x$	$\frac{1}{EI} \int_0^R Px^2 dx = \frac{PR^3}{3EI}$
2-3	$M_x = -PR \sin \varphi$	$-R \sin \varphi$	$\frac{PR^3}{GI_p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{PR^3}{GI_p} \frac{\pi}{4}$
	$M_y = -PR \cos \varphi$	$-R \cos \varphi$	$\frac{PR^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{PR^3}{EI} \frac{\pi}{4}$
	$M_z = -PR(1 - \cos \varphi)$	$-R(1 - \cos \varphi)$	$\frac{PR^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{PR^3}{EI} \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right)$

$$v_1 = \frac{PR^3}{EI} \left(\pi - \frac{5}{3} \right) + \frac{PR^3}{GI_p} \frac{\pi}{4}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

10.27. O bară de secțiune circulară cu diametrul de 80 mm, articulată în O , de lungime $l = 1,00$ m, este legată în A cu o altă bară AB de secțiune circulară cu diametrul de 10 mm (Fig. 10.27). Prima bară este acționată transversal de o sarcină uniform distribuită $p = 1000$ daN/m. Se cere să se determine deplasarea verticală a punctului A .

Răspuns: $v_A \approx 0,086$ cm.

10.28. Să se determine deplasarea pe verticală și pe orizontală a punctului 3 al sistemului de bare articulate din figura 10.28. Bara 1-3 este de secțiune circulară cu diametrul $d = 40$ mm, iar bara 2-3 este executată din două corniere identice $L 50 \times 50 \times 5$.

Se dă: $P = 10^4$ daN, $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm².

Răspuns: $v_1 = 0,097$ cm; $u_1 = 0,008$ cm.

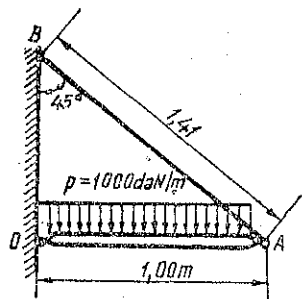


Fig. 10.27

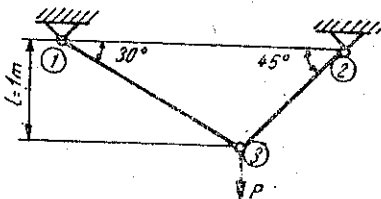


Fig. 10.28

10.29. Să se determine distanța δ cu care se apropie extremitățile A și B ale grinzii din figura 10.29, știind că este omogenă și are secțiune constantă.

Răspuns: $\delta = \frac{pl^3 \alpha}{12EI}$.

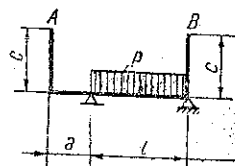


Fig. 10.29

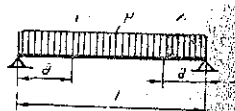


Fig. 10.30

10.30. Să se determine unghiul de rotire relativă a secțiunilor 1 și 2 ale grinzii din figura 10.30, știind că este omogenă și are secțiune constantă.

Răspuns: $\varphi_{12} = \frac{p(l-2a)(l^2 + 2la - 2a^2)}{12EI}$.

10.31. Să se determine deplasarea pe verticală a extremității O a grinzii din figura 10.31, știind că este omogenă și are secțiunea constantă.

Răspuns: $v_0 = \frac{pl_1 l_3^2 l_4}{24 EI l_2}$.

10.32. Să se determine săgeata la mijlocul unei grinzii simplu rezemate având pe porțiunea 1-3 momentul de inerție I_1 și pe porțiunea 3-2 momentul de inerție I_2 în cazul când este încărcată cu o sarcină uniform distribuită (Fig. 10.32).

Răspuns: $v_3 = \frac{5pl^4}{768E} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right)$.

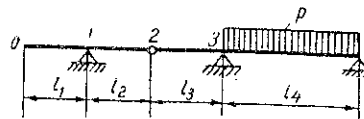


Fig. 10.31

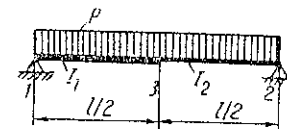


Fig. 10.32

10.33. Să se determine rotirea secțiunii 3 a unei grinzii simplu rezemate, încărcată ca în figura 10.33, știind că are momentul de inerție constant.

Răspuns: $\varphi_3 = \frac{2}{3} \frac{Ha^2}{EI}$.

10.34. Folosind rezultatul obținut la problema 10.8, să se determine săgeata în extremitatea liberă a unei grinzii încastrate, acționată de mai multe sarcini concentrate (Fig. 10.34).

Răspuns: $v_k = \frac{1133}{3} \frac{Pa^3}{EI}$.

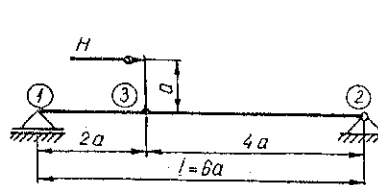


Fig. 10.33

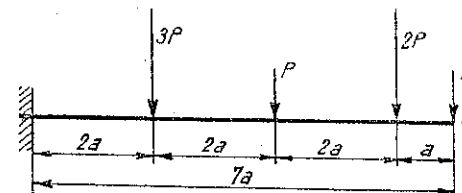


Fig. 10.34

10.35. Să se determine săgeata la mijlocul unei grinzii de lemn, de secțiune 12×20 cm², acționată de trei sarcini concentrate, așa cum se

arată în figura 10.35. Se va neglija greutatea proprie a grinzii și se va folosi relația stabilită la problema 10.9, aplicând principiul suprapunerii efectelor. Se da modulul de elasticitate longitudinal, $E = 10^5 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns: $v = 0,98 \text{ cm}$.

10.36. Se consideră sistemul de grinzi articulate reprezentate în figura 10.36. Se cere să se determine săgeata punctului 6 (se cunosc E și $I = \text{const. în lungul tuturor grinzilor}$).

Răspuns: $v_6 = \frac{2Pa^3}{3EI}$.

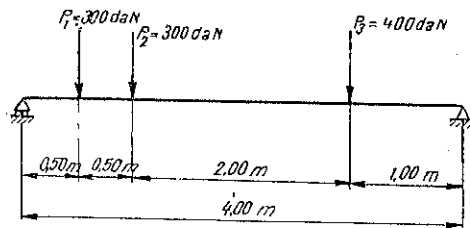


Fig. 10.35

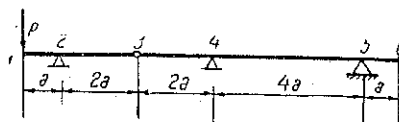


Fig. 10.36

10.37. O grindă orizontală cotită în unghi drept, încastrată la o extremitate și liberă la cealaltă, este solicitată la capătul liber de o forță verticală P (Fig. 10.37). Secțiunea barei este circulară plină. Secere:

a) să se determine săgeata la extremitatea grinzii;

b) să se determine raportul dintre a și b , astfel încât săgeata datorită încovoierii să fie egală cu cea datorită răsucirii;

c) să se studieze influența răsucirii, indicându-se în ce caz poate fi neglijată.

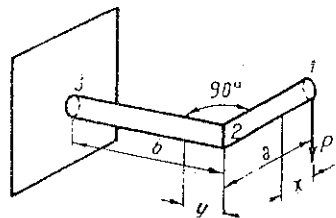


Fig. 10.37

Se da $G = \frac{3}{8} E$.

Răspuns:

$$a) v_1 = \frac{P(a^3 + b^3)}{3EI} + \frac{Pa^2 b}{GI_p}$$

$$b) \frac{a}{b} = 0,54; \quad \frac{a}{b} = 3,94,$$

c) $\frac{a}{b} < 0,072$; $\frac{a}{b} > 196$, ca răsucirea să producă numai 2% din săgeată.

10.38. Pentru grinda cotită din figura 10.38 se cere să se calculeze deplasarea pe verticală și pe orizontală a extremității libere 4, E și I fiind constante pe toată lungimea grinzii.

Răspuns: $v_4 = \frac{41}{3} \frac{qa^4}{EI}$; $h_4 = \frac{4qa^4}{EI}$.

10.39. Pentru cadrul din figura 10.39 se cere să se determine deplasarea pe verticală și pe orizontală a punctului 4.

Răspuns: $v_4 = h_4 = \frac{qa^4}{45EI}$.

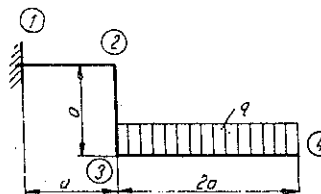


Fig. 10.38

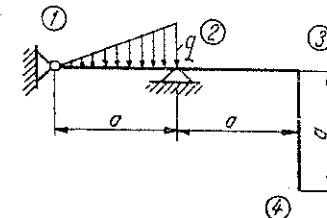


Fig. 10.39

10.40. Să se determine deplasarea reazemului 1 pentru cadrul din figura 10.40. Toate grinzile cadrului au același moment de inerție I .

Răspuns: $h_1 = \frac{qh^6}{24EI} (11h + 18l)$.

10.41. Se consideră sistemul de bare articulate din figura 10.41. Se cere să se determine deplasarea pe orizontală a articulației 3. Secțiunile barelor se vor presupune constante (moment de inerție I), iar modulul de elasticitate E .

Răspuns: $h_3 = \frac{5}{3} \frac{Pa^3}{EI}$.

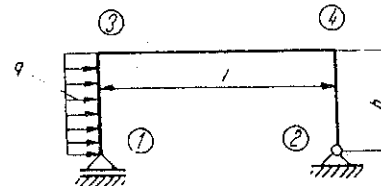


Fig. 10.40

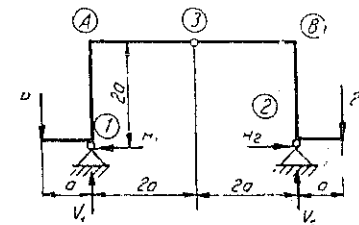


Fig. 10.41

10.42. Să se determine deplasarea pe verticală și pe orizontală a punctului 2 al stîlpului din figura 10.42, încărcat cu o sarcină P în punctul 2. Secțiunea stîlpului este constantă (momentul de inerție I), iar modulul de elasticitate este E . Se va neglija deformarea datorită compresiunii și forfecării.

$$\text{Răspuns: } v_2 = \frac{PR^2}{EI} \left(\frac{3\pi}{2} R + 4l \right),$$

$$u_2 = \frac{PR}{EI} (-2R^2 + l^2).$$

10.43. Să se calculeze cu cât se depărtează capetele unui inel tăiat, de forma celui reprezentat în figura 10.22, dacă în locul forței P se aplică două cupluri egale M_0 .

$$\text{Răspuns: } f = \frac{2\pi M_0 R^2}{EI}.$$

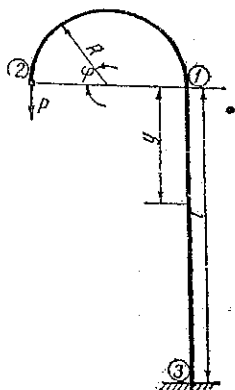


Fig. 10.42

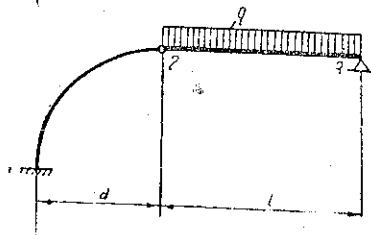


Fig. 10.44

10.44. Să se determine deplasările punctului 2 pentru grinda din figura 10.44.

$$\text{Răspuns: } v_2 = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{qla^3}{EI}, \quad u_2 = \frac{qla^3}{4EI}.$$

SISTEME STATIC NEDETERMINATE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. În cazul cadrelor și al sistemelor static nedeterminate în general se pot folosi metoda directă (a eforturilor) sau metode indirecte.

2. În metoda eforturilor se procedează astfel: se transformă sistemul static nedeterminat într-un sistem static determinat, înlăturînd legăturile suplimentare și înlocuindu-le cu eforturi. Aceste eforturi (forțe sau momente) constituie necunoscutele static nedeterminate $X_1, X_2, \dots$. Sistemul static determinat în care a fost transformat sistemul static nedeterminat poartă numele de *sistem de bază*. Necunoscutele static nedeterminate sînt considerate încărcări acționînd asupra sistemului de bază.

Se scriu apoi *ecuațiile de condiție* care exprimă faptul că sistemul de bază are aceleași deformații ca sistemul static nedeterminat. Pentru scrierea acestor ecuații se folosesc: metoda *Mohr-Maxwell* și metoda *Castigliano* (v. cap. 10 „Calculul deplasărilor prin metode energetice”).

3. *Metoda Mohr-Maxwell* pornește de la faptul că deplasările secțiunilor în care acționează necunoscutele static nedeterminate sînt nule. Aceste deplasări se exprimă cu ajutorul coeficienților de influență (deformațiile produse de eforturi egale cu unitatea). Dacă se notează cu $\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{1n}$ deplasările pe care le produc în secțiunea 1 încărcările $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, \dots, X_n = 1$ și cu δ_{10} deplasarea produsă de încărcarea cu sarcinile date (statice), deplasarea secțiunii 1 este:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0.$$

4. În mod analog se găsesc și celelalte ecuații, astfel încît se obține următorul sistem de ecuații de condiții:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \delta_{20} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \dots + \delta_{3n}X_n + \delta_{30} &= 0 \\ &\vdots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

Coeficienții necunoscutelor respectă teorema lui *Maxwell*,

$$\delta_{ji} = \delta_{ij}.$$

5. *Metoda Castigliano*. Se scrie expresia energiei de deformare. Derivatele parțiale ale acestei expresii în raport cu necunoscutele static nedeterminate, în virtutea teoremei lui *Castigliano*, reprezintă deplasările

(săgețile sau rotirile) secțiunilor în care acționează necunoscutele static nedeterminate. Dacă aceste deplasări sînt nule, derivatele parțiale ale energiei vor fi și ele nule.

Se obține astfel un număr de ecuații egal cu numărul necunoscutelor :

$$\int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_1} \cdot ds = 0; \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_2} \cdot ds = 0, \dots \quad (11.2)$$

6. După ce necunoscutele static nedeterminate $X_1 \dots X_n$ au fost găsite prin rezolvarea sistemului de ecuații respectiv, se procedează la trasarea diagramelor de eforturi.

În acest scop se poate proceda în două moduri :

a) Se recalculează reacțiunile, ținînd seamă de corecțiile aduse pe sistemul de bază de încărcările cu forțele și momentele static nedeterminate. După ce aceste reacțiuni au fost calculate, se determină pentru fiecare bară în parte expresia efortului căutat (moment încovoietor, forță tăietoare, forță axială etc.) și apoi se trasează diagrama corespunzătoare.

b) Un al doilea mod, ușor de aplicat în cazul cînd se folosește metoda Mohr-Maxwell, pentru diagrama momentelor încovoietoare (care interesează de cele mai multe ori), constă în a suprapune peste diagrama momentelor încovoietoare dată de sarcinile exterioare, diagramele date de încărcările $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$ amplificate cu valorile găsite prin rezolvarea sistemului de ecuații pentru aceste necunoscute :

$$M_x = M_{xs} + X_1 m_{x1} + X_2 m_{x2} + \dots + X_n m_{xn}, \quad (11.3)$$

în care : M_x este momentul încovoietor dintr-o secțiune oarecare ;
 M_{xs} — momentul încovoietor produs pe sistemul de bază, de încărcările date (statice);
 $m_{x1}, m_{x2}, \dots, m_{xn}$ sînt momentele încovoietoare produse în aceeași secțiune respectiv de încărcările $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$.

7. Pentru aflarea momentelor pe reazeme ale grinzii continue (Fig. 11.a), se folosește ecuația celor trei momente (ecuația lui Clapeyron) :

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} + 6A_n + 6EI_z \left(\frac{f_{n-1} - f_n}{l_n} + \frac{f_{n+1} - f_n}{l_{n+1}} \right) = 0 \quad (11.4)$$

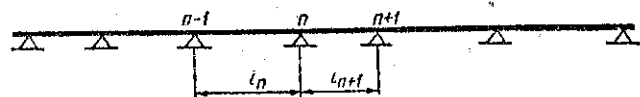


Fig. 11. a

în care : M_{n-1}, M_n, M_{n+1} sînt momentele pe trei reazeme succesive ;

f_{n-1}, f_n, f_{n+1} — denivelările celor trei reazeme ;

l_n, l_{n+1} — deschiderile notate în figura 11. a ;

A_n este reacțiunea în reazemul mijlociu n a suprafeței de momente de pe intervalele adiacente l_n și l_{n+1} , această suprafață de momente fiind construită ca și cum grinzile l_n și l_{n+1} ar fi simplu rezemate la capete.

Pentru A_n se poate scrie expresia :

$$A_n = \frac{S_{n-1}}{l_n} + \frac{S_{n+1}}{l_{n+1}}, \quad (11.5)$$

în care : S_{n-1} este momentul static al suprafeței de momente static determinate de pe intervalul $n-1, n$, luat față de reazemul $n-1$; analog S_{n+1} — calculat față de reazemul $n+1$.

În cazul frecvent cînd reazemele nu se denivelează (grindă cu reazeme de nivel) ecuația celor trei momente se reduce la :

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} + 6A_n = 0. \quad (11.6)$$

Pentru rezolvarea unei grinzi continue, se scrie această ecuație succesiv, pentru grupe de câte trei reazeme.

Astfel se obține un sistem cu atîtea ecuații cîte necunoscute are problema. La aplicarea ecuației pentru primele trei reazeme și pentru ultimele trei, se va ține seamă că momentele sînt nule pe reazemele simple situate în extremitățile grinzii.

8. Dacă grinda static nedeterminată are un reazem încastat, cum este reazemul 1 din figura 11. b, se înlocuiește încastarea prin două reazeme simple — 0 și 1 — cu observația că $M_0 = 0$ și $l_1 = 0$ și apoi se aplică, în modul cunoscut, ecuația celor trei momente.

9. Dacă grinda are o consolă, ca în figura 11. b, se poate înlocui consola prin momentul pe care ea îl produce în ultimul reazem ($M_3 = -Fa$ în cazul desenului) și apoi se aplică ecuația celor trei momente, cu observația că momentul de pe ultimul reazem este cunoscut.

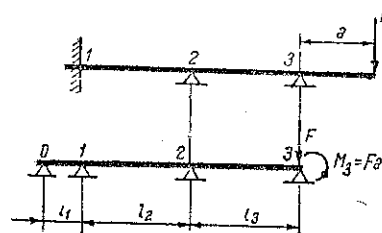


Fig. 11. b

10. La o grindă cu o încastare și un reazem simplu, ca în figura 11. c, particularizînd relația (11.6), pentru acest mod de rezemare, se obține :

$$M_1 = -\frac{3S_2}{l^2}, \quad (11.7)$$

unde S_2 este momentul static al suprafeței de momente încovoietoare, față de reazemul 2, diagrama de momente fiind construită ca pentru o grindă simplu rezemată la capete. Construind triunghiul cu baza M_1 , ca

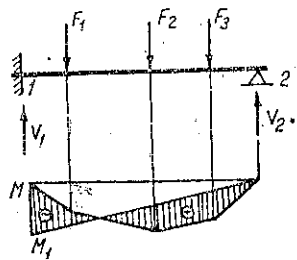


Fig. 11. c

pe desen, și suprapunându-l peste diagrama de momente a grinzii considerată static determinată, se află diagrama reală a grinzii static nedeterminate.

11. Pentru grinda dublu încastrată, momentele pe reazeme se determină cu ajutorul formulelor :

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{2}{l^2} (2S_2 - S_1); \quad -\frac{a \cdot b^2}{l^2} \\ M_2 &= -\frac{2}{l^2} (2S_1 - S_2); \quad -\frac{a \cdot b^3}{l^2} \end{aligned} \quad (11.8)$$

În cazul cînd sarcina aplicată pe grindă este o singură forță F , la distanțele a și b de reazeme, momentele statice din formulele (11.7) și (11.8) au expresiile :

$$S_2 = \frac{Fab(b+l)}{6}; \quad S_1 = \frac{Fab(a+l)}{6} \quad (11.9)$$

12. La calculul reacțiunilor grinzii continue pe n reazeme, se consideră aceasta descompusă în $(n-1)$ grinzi simplu rezemate la capete, încărcate cu diferite sarcini și câte două cupluri pe reazeme (Fig. 11. d).

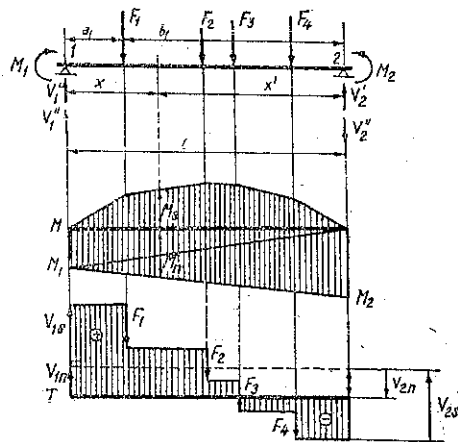


Fig. 11. d

Pentru o astfel de grindă simplu rezemată la capete, pe care sînt aplicate o serie de sarcini și două cupluri M_1 și M_2 pe reazeme, reacțiunile pot fi exprimate pe baza principiului suprapunerii efectelor, prin relațiile :

$$V_1 = V_{1s} + V_{1n}, \quad V_2 = V_{2s} + V_{2n}, \quad (11.10)$$

unde V_{1s} și V_{2s} sînt reacțiunile datorite sarcinilor de pe grindă, iar

$$V_{1n} = \frac{M_2 - M_1}{l}, \quad V_{2n} = -\frac{M_2 - M_1}{l} \quad (11.11)$$

sînt reacțiunile datorite celor două cupluri de pe reazeme.

Momentul încovoietor și forța tăietoare într-o secțiune oarecare x sînt :

$$\begin{aligned} M_x &= M_s + M_n = M_s + M_1 \frac{x'}{l} + M_2 \frac{x}{l}, \\ T_x &= T_s + T_n = T_s + \frac{M_2 - M_1}{l}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

În aceste relații T_s și M_s sînt forțele tăietoare și momentele încovoietoare datorite sarcinilor de pe grindă, iar T_n și M_n , cele datorite cuplurilor M_1 și M_2 aplicate pe reazeme. În figura 11. d se vede cum se interpretează grafic formulele (11.12).

La problemele static nedeterminate, în general, mărimile M_1 și M_2 de mai sus sînt momentele static nedeterminate de pe reazeme. Valorile lor se determină prin metodele indicate, iar după aceea calculul eforturilor se face cu formulele (11.10) și (11.12). Așa, de exemplu, în reazemul n , dacă V_{ns} este reacțiunea static determinată, dată de grinzile $n-1$, n și $n+1$ considerate simplu rezemate la capete, iar M_{n-1} , M_n , M_{n+1} sînt momentele pe reazeme, reacțiunea este :

$$V_n = V_{ns} - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} \quad (11.13)$$

13. După rezolvarea nedeterminării, prin una din metodele arătate mai sus, deplasările se pot calcula prin metodele cunoscute.

În cazul folosirii metodei *Mohr-Maxwell*, deplasarea într-un punct oarecare al unui sistem static nedeterminat se calculează cu relația :

$$\delta = \int \frac{Nn}{EA} dx + \int \frac{M_i m_i}{EI} dx + \int \frac{M_i m_i}{GI} dx, \quad (11.14)$$

în care :

— N , M , M , reprezintă eforturile din sistemul static nedeterminat (rezolvat);

— n , m , m , sînt eforturile produse de sarcina unitară aplicată în sistemul de bază, în punctul în care se calculează deplasarea și pe direcția acesteia.

B. PROBLEME REZOLVATE

11.1. La grinda de secțiune constantă din figura 11.1, *a*, articulată în punctele 1, 2 și 3 se cere să se calculeze reacțiunile și să se traseze diagrama de forțe axiale.

Rezolvare. Din ecuațiile de proiecții pe verticală și ecuațiile de momente față de punctele 1 și 3 rezultă că reacțiunile verticale din articulații sînt nule. Se determină reacțiunile orizontale. Ecuația de proiecții pe orizontală este :

$$-H_1 + 2P - H_2 - P + H_3 = 0. \quad (1)$$

Problema este dublu static nedeterminată. Se folosește metoda eforturilor. Se alege sistemul de bază ca în figura 11.1, *b*. Se aplică relația (11.1) :

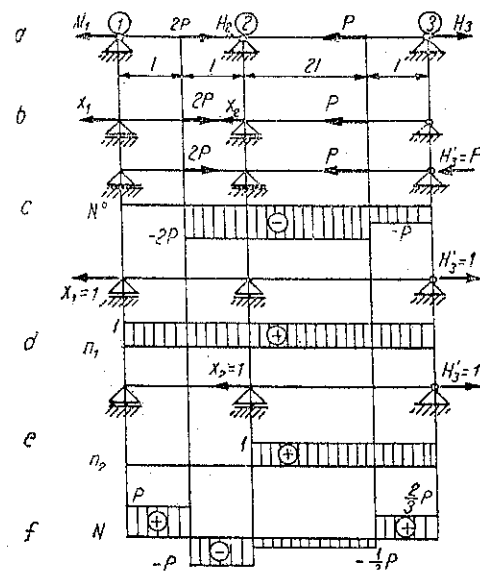


Fig. 11.1

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0 \quad (2)$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0.$$

Calculul coeficienților sistemului (2) se face aplicînd metoda *Mohr-Maxwell-Vereșcaghin*. Se folosesc diagramele trasate în figurile 11.1, *c*, *d* și *e* :

$$EA \delta_{10} = -2P \cdot 3l \cdot 1 - Pl \cdot 1 = -7Pl,$$

$$EA \delta_{20} = -2P \cdot 2l \cdot 1 - Pl \cdot 1 = -5Pl,$$

$$EA \delta_{11} = 1 \cdot 5l \cdot 1 = 5l,$$

$$EA \delta_{22} = 1 \cdot 3l \cdot 1 = 3l,$$

$$EA \delta_{12} = 1 \cdot 3l \cdot 1 = 3l.$$

Înlocuind deplasările calculate, sistemul de ecuații (1) devine :

$$\begin{cases} 5lX_1 + 3lX_2 = 7Pl \\ 3lX_1 + 3lX_2 = 5Pl \end{cases} \quad (3)$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (3), se obține :

$$X_1 = P; \quad X_2 = \frac{2}{3}P.$$

Din ecuația (1), înlocuind valorile X_1 și X_2 , rezultă $H_3 = \frac{2}{3}P$.

În figura 11.1, *f* este trasată diagrama de forțe axiale.

11.2. Să se verifice sistemul de bare din figura 11.2, *a*, cunoscînd : $P = 4000$ daN, ariile secțiunilor $A_1 = A_3 = A = 3 \text{ cm}^2$ și $A_2 = 1,5A$; $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm²; $\sigma_a = 900$ daN/cm².

Rezolvare. Problema este dublu static nedeterminată. Sistemul de bază este dat în figura 11.2, *b*. Aplicînd relația (11.1) rezultă :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0, \quad (1)$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0.$$

Pentru calculul coeficienților sistemului de ecuații (1) se aplică metoda *Mohr-Maxwell*, cu eforturile produse de încărcările din figurile 11.2, *c*, *d* și *e*.

Din figura 11.2, *c* rezultă :

$$N_1^0 = N_3^0; \quad 2N_1^0 \cos 60^\circ = P;$$

$$N_1^0 = N_3^0 = P; \quad N_2^0 = 0.$$

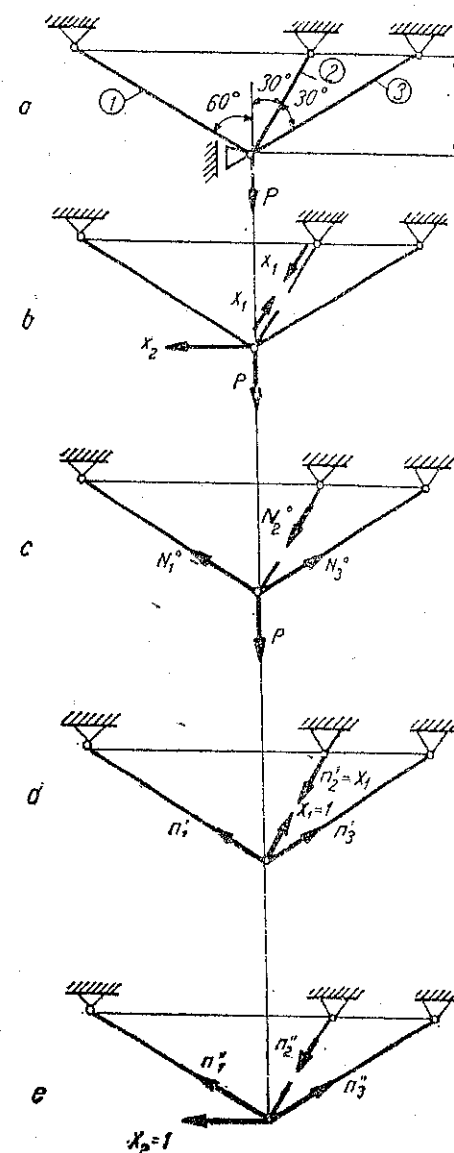


Fig. 11.2

Din figura 11.2, d, $n'_2 = 1$,

$$\begin{cases} n'_1 \sin 60^\circ - 1 \sin 30^\circ - n'_3 \sin 60^\circ = 0 \\ n'_1 \cos 60^\circ + 1 \cos 30^\circ + n'_3 \cos 60^\circ = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Soluțiile sistemului (2) sînt: $n'_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $n'_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Din figura 11.2, e, $n'_2 = 0$,

$$\begin{cases} 1 + n''_1 \sin 60^\circ - n''_3 \sin 60^\circ = 0 \\ n''_1 \cos 60^\circ + n''_3 \cos 60^\circ = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Soluțiile sistemului (3) sînt: $n''_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $n''_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Se calculează coeficienții δ_{ij} :

$$\delta_{10} = \Sigma \int \frac{N'_i n'_i}{EA_i} dx = \frac{1}{EA} \left[\int_0^{2l} P \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) dx + \int_0^{2l} P \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) dx \right] = -2\sqrt{3} \frac{Pl}{EA}$$

$$\delta_{20} = \Sigma \int \frac{N'_i n''_i}{EA_i} dx = \frac{1}{EA} \left[\int_0^{2l} P \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) dx + \int_0^{2l} P \frac{1}{\sqrt{3}} dx \right] = 0,$$

$$\delta_{11} = \Sigma \int \frac{(n'_i)^2}{EA_i} dx = \frac{1}{EA} \left[\int_0^{2l} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 dx + \int_0^{2l} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{1,5 EA} \int_0^{2l} 1 \cdot 1 \cdot dx = \frac{10\sqrt{3} + 4}{3\sqrt{3}} \frac{l}{EA}$$

$$\delta_{22} = \Sigma \int \frac{(n''_i)^2}{EA_i} dx = \frac{1}{EA} \left[\int_0^{2l} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 dx + \int_0^{2l} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 dx \right] = \frac{4l}{3EA};$$

$$\delta_{12} = \Sigma \int \frac{n'_i n''_i}{EA_i} dx = \frac{1}{EA} \left[\int_0^{2l} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) dx + \int_0^{2l} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) dx \right] = -\frac{2}{3} \frac{l}{EA}$$

$$\begin{cases} \frac{10\sqrt{3} + 4}{3\sqrt{3}} \frac{l}{EA} X_1 - \frac{2}{3} \frac{l}{EA} X_2 - 2\sqrt{3} \frac{Pl}{EA} = 0 \\ -\frac{2}{3} \frac{l}{EA} X_1 + \frac{4}{3} \frac{l}{EA} X_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Soluțiile sistemului (4) sînt: $X_1 = 0,918 P$; $X_2 = 0,459 P$.

Eforturile în bare se calculează prin suprapunerea efectelor. Valorile lor sînt:

$$N_1 = N'_1 + n'_1 X_1 + n''_1 X_2 = P - \frac{1}{\sqrt{3}} 0,918 P - \frac{1}{\sqrt{3}} 0,459 P = 0,2 P,$$

$$N_2 = X_1 = 0,918 P,$$

$$N_3 = N'_3 + n'_3 X_1 + n''_3 X_2 = P - \frac{2}{\sqrt{3}} 0,918 P + \frac{1}{\sqrt{3}} 0,459 P = 0,2 P = N_1.$$

Calculul eforturilor unitare:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,2 \cdot 4000}{3} =$$

$$= 267 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{\text{ad}}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,918 \cdot 4000}{1,5 \cdot 3} =$$

$$= 816 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{\text{ad}}.$$

11.3. Bara rigidă BC din figura 11.3, a este sprijinită în punctul C și susținută de tiranții 1, 2 și 3. Să se calculeze eforturile din tiranți datorită forței P aplicată pe bara BC. Tiranții sînt din același material (modulul de elasticitate E), au aceeași lungime l, ariile secțiunilor sînt: $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = 2A$.

Rezolvare. Problema este simplu static nedeterminată. Se alege ca necunoscută (X_1) efortul din tirantul 1. Sistemul de bază este dat în figura 11.3, b. Se aplică relația (11.1):

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0.$$

Pentru calculul deplasărilor δ_{11} și δ_{10} se folosesc figurile 11.3, c și d.

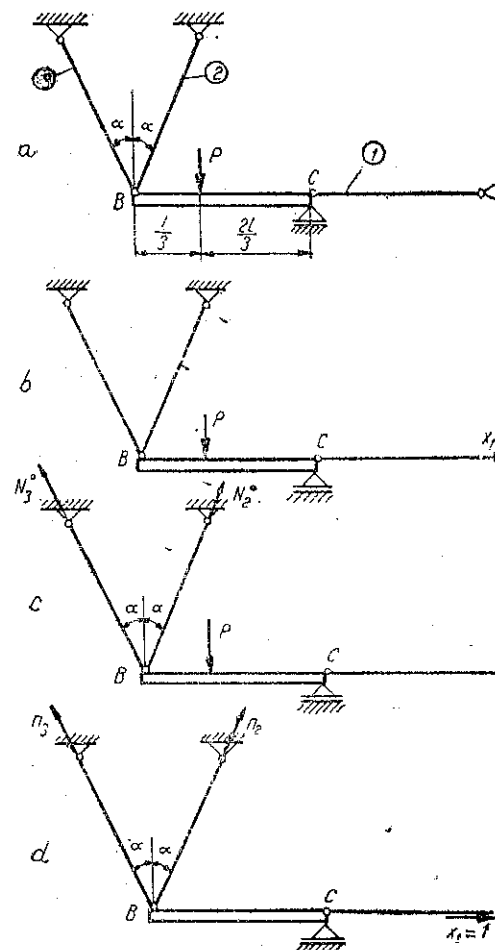


Fig. 11.3

Din ecuația de proiecții pe orizontală și ecuația de momente față de punctul O (Fig. 11.3, c) rezultă :

$$N_2^0 = N_3^0$$

$$(N_2^0 \cos \alpha + N_3^0 \cos \alpha)l - \frac{2Pl}{3} = 0$$

$$N_2^0 = N_3^0 = \frac{P}{3 \cos \alpha}$$

Din figura 11.3, d rezultă :

$$\begin{cases} 1 + n_2 \sin \alpha - n_3 \sin \alpha = 0 \\ n_2 \cos \alpha + n_3 \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$n_2 = -\frac{1}{2 \sin \alpha}; \quad n_3 = \frac{1}{2 \sin \alpha}$$

Se calculează coeficienții

$$\delta_{10} = \frac{1}{EA} \int_0^l N_2^0 n_2 dx + \frac{1}{2EA} \int_0^l N_3^0 n_3 dx = \frac{1}{EA} \int_0^l \frac{P}{3 \cos \alpha} \left(-\frac{1}{2 \sin \alpha} \right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2EA} \int_0^l \frac{P}{3 \cos \alpha} \frac{1}{2 \sin \alpha} dx = -\frac{Pl}{6EA \sin 2\alpha}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} \int_0^l n_2^2 dx + \frac{1}{2EA} \int_0^l n_3^2 dx + \frac{1}{EA} \int_0^l 1 dx = \frac{1}{EA} \int_0^l \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} dx +$$

$$+ \frac{1}{2EA} \int_0^l \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} dx + \frac{l}{EA} = \frac{l}{EA} \left(\frac{1}{4 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{8 \sin^2 \alpha} + 1 \right) = \frac{(3+8 \sin^2 \alpha)l}{EA \cdot 8 \sin^2 \alpha}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{2P \operatorname{tg} \alpha}{3(3+8 \sin^2 \alpha)}$$

Cunoscând efortul în tirantul I , se calculează eforturile în tiranți 2 și 3 :

$$N_2 = N_2^0 + n_2 X_1 = \frac{P}{3 \cos \alpha} - \frac{1}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{2P \operatorname{tg} \alpha}{3(3+8 \sin^2 \alpha)} = \frac{P(2+8 \sin^2 \alpha)}{3 \cos \alpha(3+8 \sin^2 \alpha)}$$

$$N_3 = N_3^0 + n_3 X_1 = \frac{P}{3 \cos \alpha} + \frac{1}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{2P \operatorname{tg} \alpha}{3(3+8 \sin^2 \alpha)} = \frac{P(4+8 \sin^2 \alpha)}{3 \cos \alpha(3+8 \sin^2 \alpha)}$$

11.4. Bara dreaptă din figura 11.4, a este încastrată la un capăt, sprijinită la celălalt și susținută de un tirant, de secțiune A , în punctul I . Se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii I .

Rezolvare. Problema este dublu static nedeterminată.

Necunoscutele static nedeterminate sînt puse în evidență în schema din figura 11.4, b . Se aplică relația (11.1) :

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$$

(1)

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0.$$

Coeficienții sistemului (1) se calculează folosind diagramele din figurile 11.4, c , d și e .

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[(-Pl \cdot 2l)l + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{1}{2} 2Pl \cdot 2l \right) \cdot \frac{2}{3} 2l \right] =$$

$$= -\frac{14}{3} \frac{Pl^3}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} 3Pl \cdot 3l \right) \cdot 3l =$$

$$= -\frac{27}{2} \frac{Pl^3}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} (2l)^2 \frac{2}{3} 2l +$$

$$+ \frac{1}{EA} l \cdot 1 \cdot 1 = \frac{8}{3} \frac{l^3}{EI} +$$

$$+ \frac{l}{EA} = \frac{l^3}{3EI} \left(8 + 3 \frac{I}{Al^2} \right),$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} (4l)^2 \frac{2}{3} 4l =$$

$$= \frac{64}{3} \frac{l^3}{EI}$$

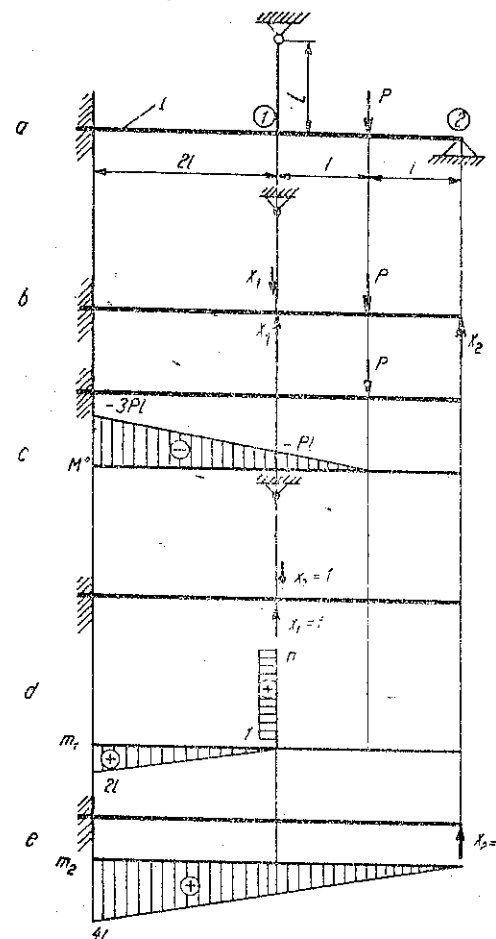


Fig. 11.4

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} (2l)^2 \cdot \left(2l + \frac{2}{3} 2l \right) = \frac{20}{3} \frac{l^3}{EI}.$$

$$\begin{cases} \frac{l^3}{3EI} \left(8 + 3 \frac{l}{Al^2} \right) X_1 + \frac{20}{3} \frac{l^3}{EI} X_2 - \frac{14}{3} \frac{Pl^3}{EI} = 0, \\ \frac{20}{3} \frac{l^3}{EI} X_1 + \frac{64}{3} \frac{l^3}{EI} X_2 - \frac{27}{2} \frac{Pl^3}{EI} = 0. \end{cases}$$

Soluțiile sistemului sînt :

$$X_1 = \frac{43 P}{8 \left(7 + 12 \frac{l}{Al^2} \right)}; \quad X_2 = \frac{P \left(22 + \frac{243}{4} \frac{l}{Al^2} \right)}{8 \left(7 + 12 \frac{l}{Al^2} \right)}.$$

Deplasarea pe verticală a secțiunii 1 este egală cu lungirea tirantului vertical

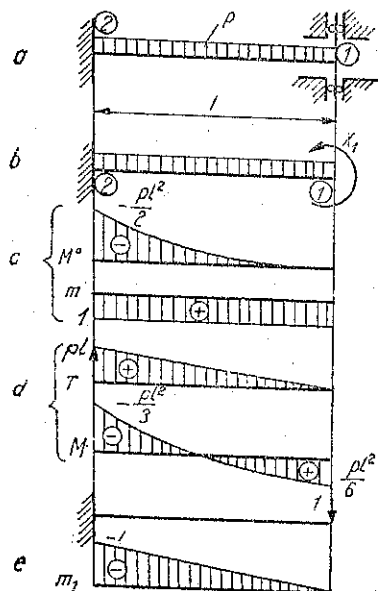


Fig. 11.5

$$v_1 = \frac{X_1 l}{EA} = \frac{43 Pl}{8 \left(7 + 12 \frac{l}{Al^2} \right) EA}.$$

11.5. Bara de secțiune constantă din figura 11.5, a este încastrată la un capăt iar la celălalt, legătura permite deplasarea pe verticală și împiedică rotația. Se cere să se construiască diagramele de eforturi T și M și să se calculeze deplasarea v_1 în secțiunea 1.

Rezolvare. Problema este simplu static nedeterminată. Necunoscuta static nedeterminată este cuplul X_1 (Fig. 11.5, b). Relația (11.1) devine :

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0. \quad (1)$$

Deplasările se calculează cu regula lui Veresceaghin. În figura 11.5, c s-au trasat : diagrama M^0 , pentru cazul cînd asupra barei acționează sarcina uniform distribuită și diagrama m , pentru cazul cînd asupra barei acționează cuplul $X_1 = 1$.

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{3} \frac{pl^2}{2} \cdot l \right) \cdot 1 = -\frac{pl^3}{6EI}; \quad \delta_{11} = \frac{1}{EI} l \cdot 1 \cdot 1 = \frac{l}{EI}.$$

Ecuatia (1) devine :

$$\frac{l}{EI} X_1 - \frac{pl^3}{6EI} = 0,$$

de unde :

$$X_1 = \frac{pl^2}{6}.$$

În figura 11.5, d sînt date diagramele T și M .

Pentru calculul deplasării v_1 se folosesc diagramele din figurile 11.5, c și e. Diagrama m din figura 11.5, e este amplificată cu $X_1 = \frac{pl^2}{6}$

$$v_1 = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{1}{3} \frac{pl^2}{2} l \right) \cdot \left(-\frac{3}{4} l \right) + \frac{pl^2}{6} \cdot l \left(-\frac{l}{2} \right) \right] = \frac{pl^4}{24 EI}.$$

11.6. La cadrul din figura 11.6, a se cere să se calculeze deplasarea în punctul 2 pe direcția forței P . Ambele bare ale cadrului au același E și I .

Rezolvare. Se aplică metoda Mohr-Maxwell-Veresceaghin. Cadrul este simplu static nedeterminat.

1) Fie sistemul de bază ca în figura 11.6, b, și necunoscuta static nedeterminată — momentul din încastrare.

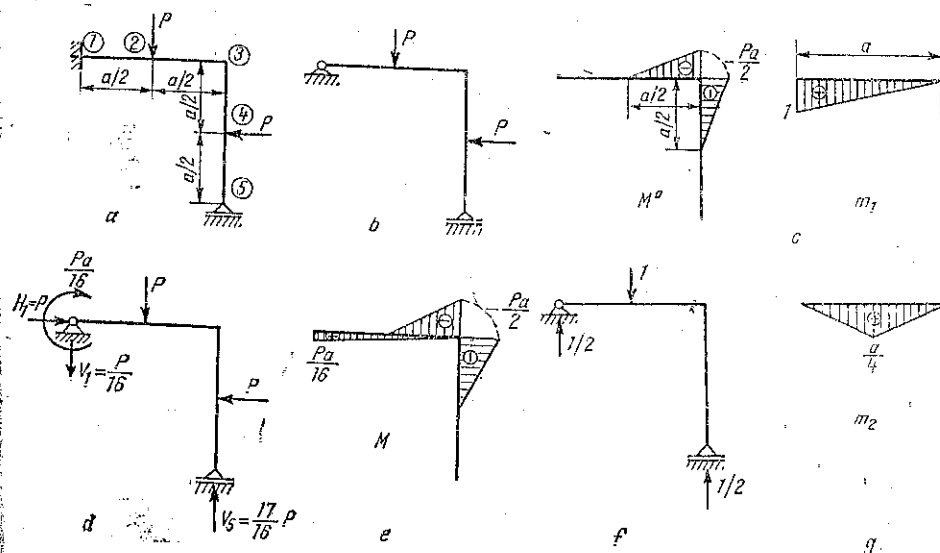


Fig. 11.6

Cu ajutorul diagramelor M^0 și m_1 din figura 11.6, c, se calculează:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{-Pa}{2} \right) \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{Pa^2}{48EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} a \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{a}{3EI},$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{Pa}{16}.$$

2) La cadrul din figura 11.6, d se construiește diagrama M (Fig. 11.6, e).

3) Pentru încărcarea cu forța 1 aplicată sistemului de bază în secțiunea 2 (Fig. 11.6, f) se construiește diagrama m_2 din figura 11.6, g.

Cu ajutorul diagramelor M și m_2 se obține:

$$EIv_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{-Pa}{2} \right) \frac{a}{2} \frac{1}{3} \frac{a}{4} + \frac{1}{2} \frac{a}{2} \frac{Pa}{32} \frac{2}{3} \frac{a}{4} +$$

$$+ \frac{a}{2} \frac{Pa}{32} \frac{1}{2} \frac{a}{4} + \frac{1}{2} \frac{a}{2} \frac{Pa}{32} \frac{1}{3} \frac{a}{4} = \frac{Pa^3}{1536} (-16 + 2 + 3 + 1),$$

$$v_2 = -\frac{5Pa^3}{768EI}.$$

11.7. Să se traseze diagrama de momente pentru cadrul din figura 11.7, a.

Rezolvare. Sistemul este simplu static nedeterminat. Se alege ca necunoscută static nedeterminată componenta orizontală din articulația 1 (Fig. 11.7, b). Sistemul de ecuații (11.1) devine:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0. \quad (1)$$

Calculul deplasărilor δ_{10} și δ_{11} se face cu metoda *Mohr-Maswell-Vereșceghin*. Se folosesc diagramele trasate în figurile 11.7, c și d:

$$\delta_{10} = 2 \frac{1}{2EI} \left[-\frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2 \cos \alpha} \left(2l + \frac{1}{3} \frac{l}{2} \right) - \frac{Pl}{2} \frac{l}{2 \cos \alpha} \left(2l + \frac{3}{4} \frac{l}{2} \right) \right] =$$

$$= -\frac{83 Pl^3}{96 \cos \alpha EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} 2 \frac{1}{2} (2l)^2 \cdot \frac{2}{3} 2l + \frac{1}{2EI} 2 \left[2l \frac{l}{\cos \alpha} \left(2l + \frac{l}{4} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{l}{2 \cos \alpha} \left(2l + \frac{2}{3} \frac{l}{2} \right) \right] = \left(\frac{16}{3} + \frac{61}{12 \cos \alpha} \right) \frac{l^3}{EI}.$$

Din ecuația (1), rezultă:

$$X_1 = \frac{83 P}{8 (64 \cos \alpha + 61)}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$X_1 = 0,0876 P.$$

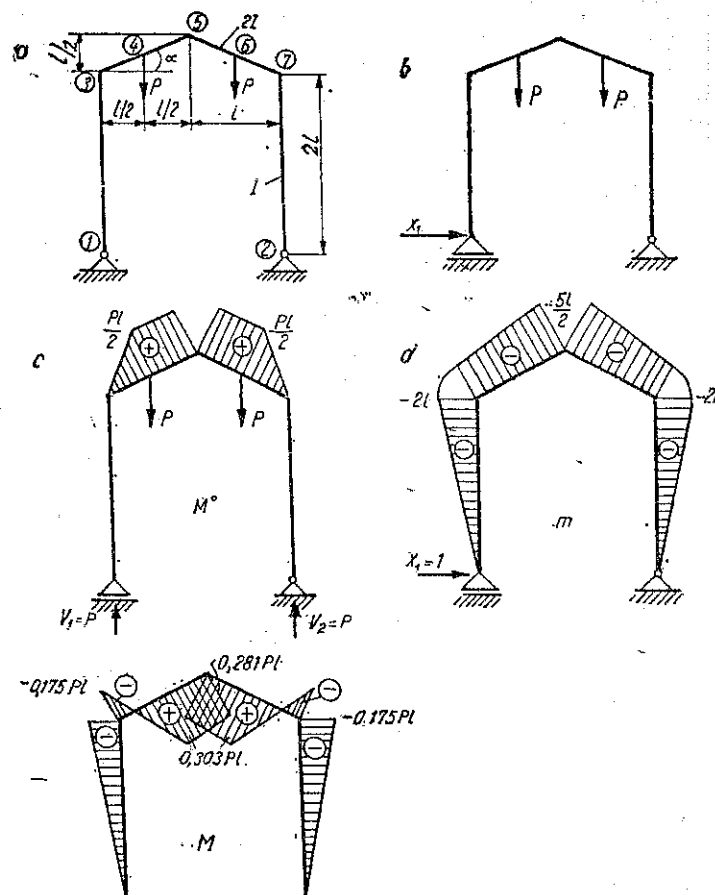


Fig. 11.7

Se trasează diagrama de momente prin suprapunerea efectelor: diagrama M^0 și diagrama m amplificată cu X_1 :

$$M_3 = M_7 = -0,175 Pl,$$

$$M_5 = \frac{Pl}{2} - 0,219 Pl = 0,281 Pl,$$

$$M_4 = M_6 = \frac{Pl}{2} - 0,197 Pl = 0,303 Pl.$$

Diagrama de momente este trasată în figura 11.7, e.

11.8. La cadrul din figura 11.8, a să se calculeze deplasările pe direcția forței P , în punctele 5 și 6, știind că pentru toate barele, rigiditatea la încovoiere $EI = \text{const.}$

Rezolvare. Cadrul este simplu static nedeterminat.

Se formează sistemul de bază ca în figura 11.8, b și se construiesc diagramele M^0 și m_2 (Fig. 11.8, c). Coeficienții din relația (11.1) se calculează cu metoda Mohr-Macwell-Vereșcagin.

$$EI\delta_{20} = \frac{1}{2} Pa \cdot a \frac{2}{3} (-a) + \left[\frac{1}{2} Pa \frac{a}{3} + \frac{1}{2} (-2Pa) \frac{2a}{3} \right] (-a) = -\frac{Pa^3}{6};$$

$$EI\delta_{22} = 2 \frac{1}{2} a(-a) \frac{2}{3} (-a) + a(-a)(-a) = \frac{5}{3} a^3;$$

$$X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} = -\frac{-\frac{Pa^3}{6}}{\frac{5a^3}{3}} = -\frac{P}{10}.$$

La cadrul din figura 11.8, d se construiește diagrama M (Fig. 11.8, e) prin suprapunerea efectelor.

Pentru încărcarea cu forța 1 aplicată în punctul 5 se construiește diagrama m_5 (Fig. 11.8, f). Rezultă:

$$EIv_5 = \frac{1}{2} a \frac{11Pa}{10} \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} Pa \frac{a}{3} \frac{8}{9} 3a + \\ + \frac{1}{2} (-2Pa) \frac{2a}{3} \frac{2}{9} 3a + \frac{Pa}{10} a \frac{3a}{2} = \frac{31}{60} Pa^3; \quad v_5 = \frac{31Pa^3}{60EI}.$$

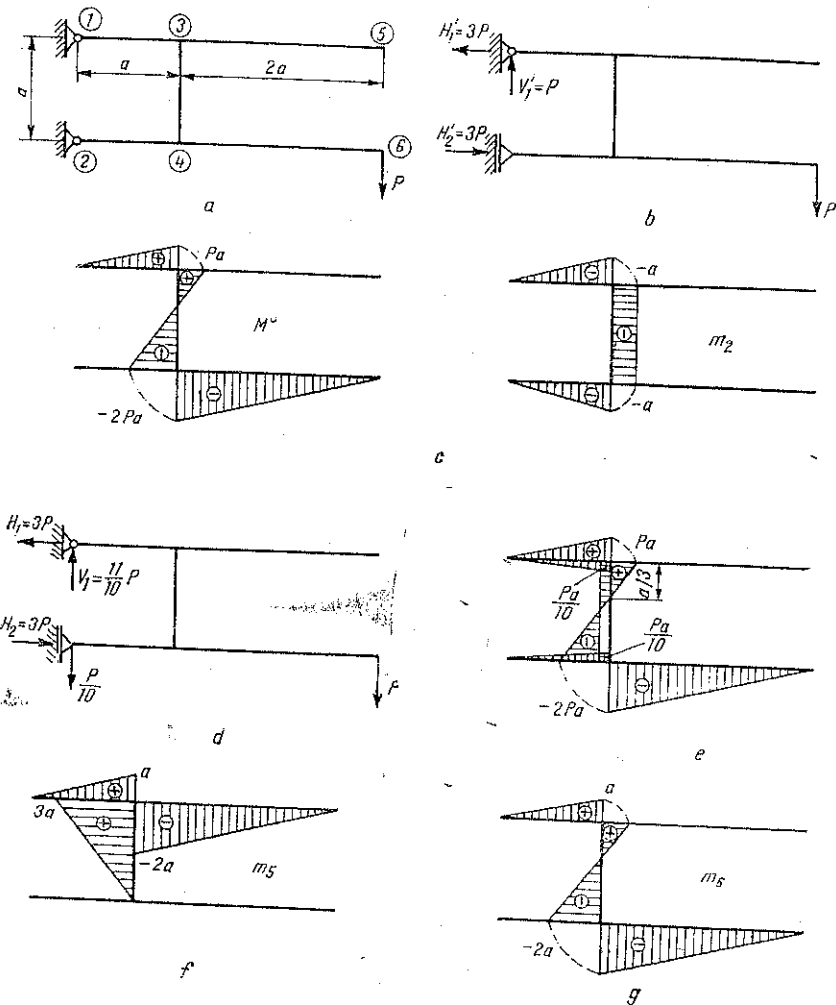


Fig. 11.8

Pentru încărcarea cu forța 1 aplicată în punctul 6 se construiește diagrama m_6 (Fig. 11.8, g). Rezultă:

$$EIv_6 = \frac{1}{2} a \left(Pa + \frac{Pa}{10} \right) \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} Pa \frac{a}{3} \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} (-2Pa) \frac{2a}{3} \frac{2}{3} (-2a) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{Pa}{10} \frac{a}{3} \frac{a}{2} + \frac{Pa}{10} \frac{2a}{3} (-a) + \frac{1}{2} (-2Pa) 2a \frac{2}{3} (-2a) = \\
 & = Pa^3 \left(\frac{11}{30} + \frac{1}{9} + \frac{8}{9} + \frac{1}{60} - \frac{2}{30} + \frac{8}{3} \right) = \frac{239}{60} Pa^3; \\
 & v_6 = \frac{239 Pa^3}{60 EI}.
 \end{aligned}$$

11.9. Să se construiască diagrama de momente încovoietoare pentru cadrul din figura 11.9, a. Se dă momentul de inerție al barei orizontale (rigla) $I_1 = 54 \text{ dm}^4$, momentul de inerție al stîlpului $I_2 = 16 \text{ dm}^4$.

Rezolvare. Cadrul este o dată static nedeterminat. Se alege ca necunoscută static nedeterminată componenta orizontală a reacțiunii, H_1 , cu sensul din figura 11.9, a.

Pentru aplicarea teoremei lui Castigliano se consideră cadrul static determinat, sub acțiunea sarcinilor q și H_1 . Se caută deplasarea pe direcția lui H_1 , derivând expresia energiei de deformare în raport cu această forță. Deplasarea fiind nulă, expresia ei se egalează cu zero, obținând o ecuație în H_1 .

Reacțiunile. Din proiecția pe orizontală se vede că $H_1 = H_2 = H$. Scriind ecuația de momente față de punctul 2 se obține:

$$V_1 = \frac{ql}{2} + H \frac{h}{l}; \quad V_2 = \frac{ql}{2} - H \frac{h}{l}.$$

Din tabelul 11.9 rezultă:

$$\delta_H = \frac{Hh^3}{3EI_2} - \frac{1}{EI_1} \left(\frac{qhl^3}{24} - \frac{Hh^2l}{3} \right) = 0,$$

$$H \left(\frac{h^3}{3I_2} + \frac{h^2l}{3I_1} \right) = \frac{qhl^3}{24I_1},$$

$$H = \frac{\frac{qhl^3}{24I_1}}{h^2 \left(\frac{h}{I_2} + \frac{l}{I_1} \right)} = \frac{ql^3}{8hI_1 \left(\frac{h}{I_2} + \frac{l}{I_1} \right)}.$$

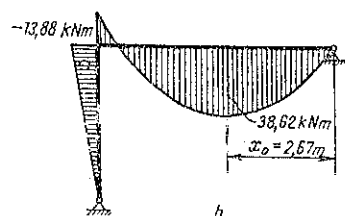
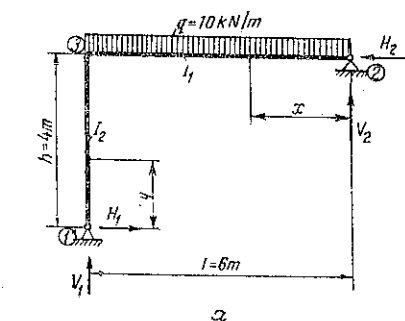


Fig. 11.9

Pentru construirea diagramei de momente încovoietoare, se stabilește valoarea momentelor în punctele caracteristice ale cadrului, și anume în

punctul 3 și în punctul în care se anulează forța tăietoare pe intervalul 3-2 (de moment maxim):

$$M_3 = -Hh = -\frac{ql^3}{8I_1 \left(\frac{h}{I_2} + \frac{l}{I_1} \right)}.$$

Tabelul 11.9

Regiuni	M	$\frac{\partial M}{\partial H}$	$\frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial H} ds$
1-3	$-Hy$	$-y$	$\frac{1}{EI_2} \int_0^h Hy^2 dy = \frac{Hh^3}{3EI_2}$
2-3	$\left(\frac{ql}{2} - \frac{Hh}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2} =$ $= \frac{qlx}{2} - \frac{Hh}{l} x - \frac{qx^2}{2}$	$-\frac{h}{l} x$	$-\frac{1}{EI_1} \int_0^l \left(\frac{qlx}{2} - \frac{Hh}{l} x - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{h}{l} x dx =$ $= -\frac{1}{EI_1} \left(\frac{qhl^3}{6} - \frac{Hh^2l}{3} - \frac{qhl^3}{8} \right) =$ $= -\frac{1}{EI_1} \left(\frac{qhl^3}{24} - \frac{Hh^2l}{3} \right).$

Pentru a găsi secțiunea de moment maxim, se scrie, pe intervalul 3-2, expresia forței tăietoare într-o secțiune oarecare x , care, egalată cu zero, dă o ecuație din care se află abscisa punctului de moment maxim:

$$T_x = V_2 - qx_0 = 0; \quad x_0 = \frac{V_2}{q} = \frac{l}{2} - \frac{H}{q} \cdot \frac{h}{l}.$$

Rezultă:

$$M_{max} = V_2 x_0 - q \frac{x_0^2}{2} = \left(\frac{ql}{2} - H \frac{h}{l} \right) x_0 - q \frac{x_0^2}{2}.$$

Aplicație numerică:

$$H = \frac{10 \cdot 6^3 \cdot 10^6}{8 \cdot 400 \cdot 54 \cdot 10^4 \left(\frac{400}{16 \cdot 10^4} + \frac{600}{54 \cdot 10^4} \right)} = 346 \text{ daN} = 3,46 \text{ kN}.$$

$$M_3 = -H \cdot h = -346 \cdot 4 = -1384 \text{ daN m} = -13,84 \text{ kNm},$$

$$x_0 = \frac{6}{2} - \frac{3,46}{10} \cdot \frac{4}{6} = 3 - 0,23 = 2,67 \text{ m},$$

$$M_{max} = \left(\frac{10 \cdot 6}{2} - 3,46 \cdot \frac{4}{6} \right) 2,67 - 10 \frac{2,67^2}{2} = 38,62 \text{ kNm}.$$

Diagrama de momente este reprezentată în figura 11.9, b.

11.10. Să se construiască diagramele de eforturi N , T , M pentru cadrul din figura 11.10, a , încărcat cu o sarcină uniform distribuită, știind că momentul de inerție este constant pe întreg cadrul.

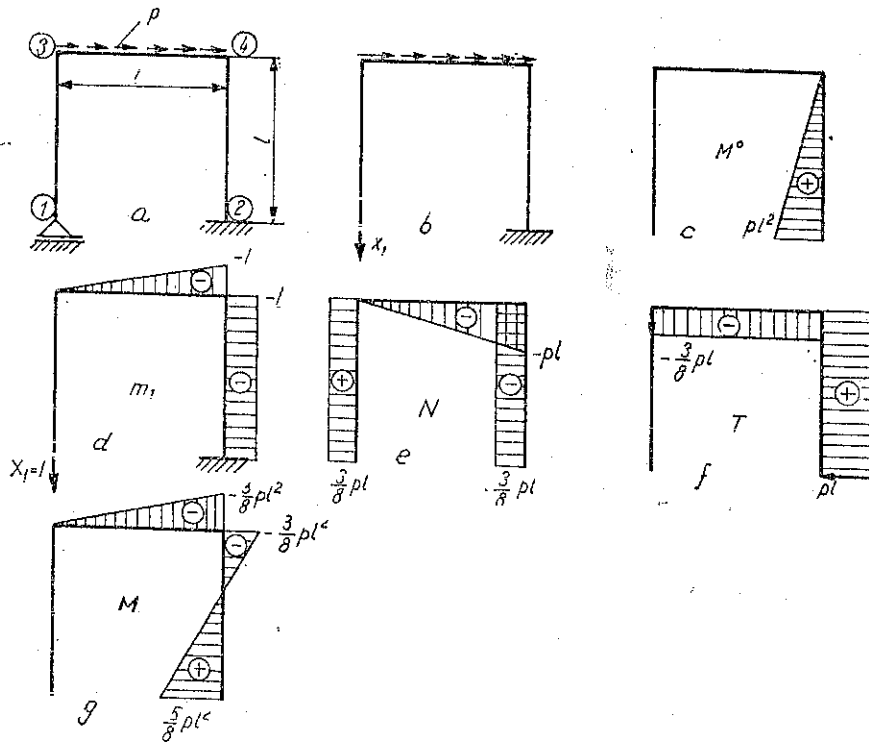


Fig. 11.10

Rezolvare. Cadrul este simplu static nedeterminat. Se aplică relația (11.1):

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0,$$

unde X_1 este efortul necunoscut din reazemul 1. Calculul deplasărilor se face cu regula lui Veresceaghin.

În figura 11.10, c este dată diagrama M^0 datorită încărcării cadrului cu sarcina distribuită p , iar în figura 11.10, d — diagrama m_1 corespunzătoare încărcării cu $X_1 = 1$.

$$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} pl^2 \cdot l \cdot l = -\frac{pl^4}{2EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} l^2 \frac{2}{3} l + l^2 \cdot l \right) = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EI}.$$

$$\frac{4}{3} \frac{l^3}{EI} X_1 - \frac{pl^4}{2EI} = 0; \quad X_1 = \frac{3}{8} pl.$$

În figurile 11.10, e , f și g sunt date diagramele N , T , M .

11.11. Să se construiască diagrama de momente încovoietoare pentru cadrul din figura 11.11, a dacă momentul de inerție al rigiei este de trei ori mai mare decât momentul de inerție al stîlpilor. Se dă: $q = 10 \text{ kN/m}$, $l = 6 \text{ m}$, $h = 4 \text{ m}$.

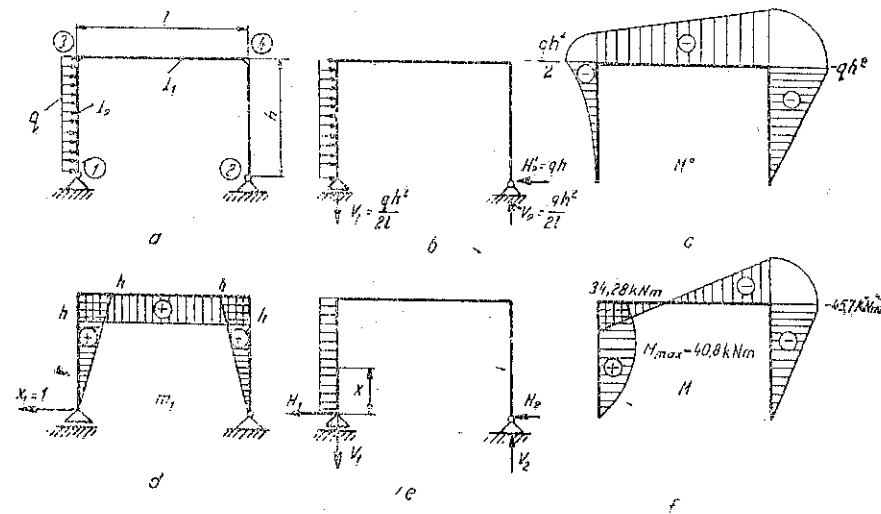


Fig. 11.11

Rezolvare. Se alege ca necunoscută, componenta orizontală a reacțiunii din articulația 1. Se formează sistemul de bază ca în figura 11.11, b . Se aplică relația (11.1):

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0; \quad X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

În figura 11.11, c este dată diagrama de momente M^0 , datorită încărcării cadrului cu sarcina uniform distribuită pe stîlp, iar în figura 11.11, d este dată diagrama m_1 corespunzătoare încărcării cadrului cu forța $X_1 = 1$, în reazemul 1.

Rezultă .

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{3}{4} qh^2 \cdot l \right) h + \frac{1}{EI_2} \left(-\frac{1}{3} \frac{qh^3}{2} \cdot \frac{3}{4} h - \frac{1}{2} qh^3 \cdot \frac{2}{3} h \right) =$$

$$= -\frac{3}{4} \frac{qh^3 l}{EI_1} - \frac{11}{24} \frac{qh^4}{EI_2},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_1} h \cdot l \cdot h + \frac{1}{EI_2} 2 \cdot \frac{1}{2} h^2 \frac{2}{3} h = \frac{h^3 l}{EI_1} + \frac{2}{3} \frac{h^3}{EI_2},$$

$$X_1 = \frac{\frac{qh^3}{E} \left(\frac{3}{4} \frac{l}{I_1} + \frac{11}{24} \frac{h}{I_2} \right)}{\frac{h^3}{E} \left(\frac{l}{I_1} + \frac{2}{3} \frac{h}{I_2} \right)} = \frac{qh \left(\frac{3}{4} \frac{l}{I_1} + \frac{11}{24} \frac{h}{I_2} \right)}{\frac{l}{I_1} + \frac{2}{3} \frac{h}{I_2}}.$$

Pentru $I_1 = 3 I_2$, rezultă :

$$X_1 = \frac{qh(6l + 11h)}{8(l + 2h)}.$$

Aplicație numerică :

$$X_1 = \frac{10 \cdot 400(6 \cdot 600 + 11 \cdot 400)}{8(600 + 2 \cdot 400)} = 2857 \text{ daN}.$$

Reacțiunile orizontale (Fig. 11.11, e) sînt :

$$H_1 = 2857 \text{ daN}$$

$$H_2 = H_1 - qh = 2857 - 10 \cdot 400 = 1143 \text{ daN}.$$

Reacțiunile verticale sînt .

$$V_1 = V_2 = \frac{qh^2}{2l} = \frac{10 \cdot 400^2}{2 \cdot 600} = 1333 \text{ daN}.$$

Pentru a găsi poziția momentului maxim, precum și valoarea sa, pe stîlpul 1-3, se anulează expresia forței tăietoare :

$$T_{1-3} = H_1 - qx = 0; \quad x = \frac{2857}{10} = 285,7 \text{ cm},$$

$$M_{max} = 2857 \cdot 285,7 - 10 \frac{(285,7)^2}{2} = 408122 \text{ daNcm}.$$

$$M_3 = 2857 \cdot 400 - 10 \frac{400^2}{2} = 342800 \text{ daNcm},$$

$$M_4 = -1143 \cdot 400 = -457200 \text{ daNcm}.$$

Diagrama momentelor este reprezentată în figura 11.11, f.

11.12. Să se calculeze săgeata grinzii din figura 11.12, a la mijlocul deschiderii. Firele au secțiune constantă $A = 2 \text{ cm}^2$, iar grinda este metalică avînd secțiunea un profil I 20.

Rezolvare. Sistemul este o dată static nedeterminat. Se determină în primul rînd valoarea reacțiunii X din firul central.

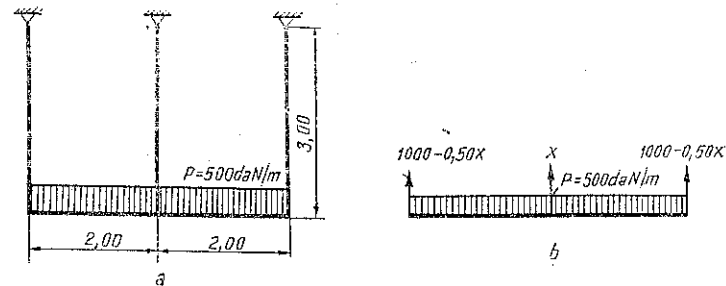


Fig. 11.12

Din ecuația de proiecții pe verticală rezultă valorile reacțiunilor din firele marginale :

$$500 \cdot \frac{4,00}{2} - \frac{X}{2} = 1000 - 0,50 X.$$

Momentul într-un punct oarecare ($0 \leq x \leq 2,00$) este :

$$M = (1000 - 0,50 X)x - \frac{500x^2}{2}.$$

Efortul în cablul marginal este :

$$N = 1000 - 0,50 X,$$

iar în cel central :

$$N = X.$$

Aplicând metoda *Castigliano* și ținând seama și de efectul forței axiale se obține:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EI} + \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx, \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \int M \frac{\partial M}{\partial X} \cdot \frac{dx}{EI} + \int N \frac{\partial N}{\partial X} \cdot \frac{dx}{EA} = 0,$$

$$I = 2140 \text{ cm}^4, \quad A = 2 \text{ cm}^2,$$

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -\frac{x}{2}, \quad \frac{\partial N}{\partial X} = -\frac{1}{2} \text{ (pentru firele marginale),}$$

$$\frac{\partial N}{\partial X} = 1 \text{ (pentru firul central),}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 2 \left\{ - \int_0^{2,00} \left[\left(1000 - \frac{X}{2} \right) x - \frac{500x^2}{2} \right] \cdot \frac{x}{2} \frac{dx}{EI} - \int_0^{3,00} \left(1000 - \frac{X}{2} \right) \frac{dx}{EA} \right\} + \int_0^{3,00} \frac{X dx}{EA} = 0.$$

Simplificând cu E și înlocuind pe I și A cu valorile lor, se obține după integrare ecuația:

$$8,43 X = 9350 \text{ daN},$$

de unde:

$$X = \frac{9350}{8,43} = 1120 \text{ daN}.$$

Săgeata f a grinzii în mijloc va fi egală cu diferența între lungirea firului central și a celui marginal.

$$\text{Lungirea firului central } \Delta l_1 = \frac{Xl}{EA} = \frac{1120 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2} = 0,08 \text{ cm}.$$

$$\text{Lungirea firului marginal } \Delta l_2 = \frac{(1000 - 0,50X)l}{EA} = \frac{440 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2} = 0,032 \text{ cm}.$$

$$\text{Săgeata grinzii: } f = \Delta l_1 - \Delta l_2 = 0,080 - 0,032 = 0,048 \text{ cm} \approx 0,5 \text{ mm}.$$

11.13. Să se construiască diagramele de eforturi M_i , M_e , pentru barele sistemului din figura 11.13, a . Barele sînt din oțel, de secțiune circulară, avînd același moment de inerție.

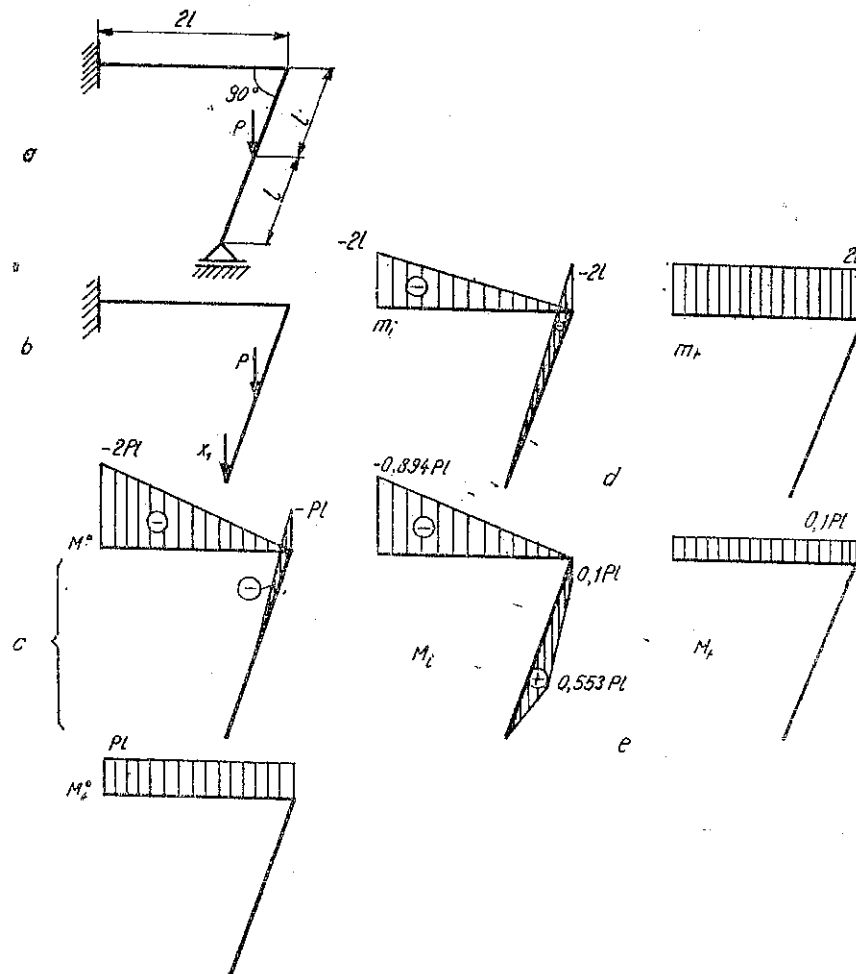


Fig. 11.13

Rezolvare. Sistemul este simplu static nedeterminat. Sistemul de bază este dat în figura 11.13, b. Relația (11.1) aplicată sistemului devine:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0.$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} Pl^2 \left(l + \frac{2}{3} l \right) + \frac{1}{2} 2Pl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l \right] +$$

$$+ \frac{1}{GI_p} Pl \cdot 2l \cdot 2l = \frac{7}{2} \frac{Pl^3}{EI} + \frac{4Pl^3}{GI_p},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} (2l)^2 \cdot \frac{2}{3} 2l \cdot 2 + \frac{1}{GI_p} (2l)^2 \cdot 2l = \frac{16}{3} \frac{l^3}{EI} + \frac{8l^3}{GI_p},$$

$$X_1 = - \frac{\left(\frac{7}{2EI} + \frac{4}{GI_p} \right) P}{\frac{16}{3EI} + \frac{8}{GI_p}}.$$

Înlocuind în expresia lui X_1 , $I_p = 2I$ și $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$, în care $\nu = 0,3$ pentru oțel, aceasta devine:

$$X_1 = - \frac{\left(\frac{7}{2EI} + \frac{4 \cdot 2,6}{E \cdot 2 \cdot I} \right) P}{\frac{16}{3EI} + \frac{8 \cdot 2,6}{E \cdot 2I}} = - 0,553 P.$$

În figura 11.13, c sunt date diagramele M , și M , trasate corespunzător încărcării sistemului cu forțele P și $X_1 = -0,553 P$.

11.14. Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare pentru cadrul din figura 11.14, a, la o variație de temperatură de 50°C , dacă secțiunile barelor sînt de $30 \times 40 \text{ cm}^2$ (stâlpi) și de $30 \times 80 \text{ cm}^2$ (riglă); cadrul este din beton armat ($E = 240\,000 \text{ daN/cm}^2$), coeficientul de dilatare liniară fiind $\alpha = 10^{-5}$.

Rezolvare. Se face sistemul static determinat, înlocuind articulația 1 cu un reazem simplu (Fig. 11.14, b).

Ecuatia de condiție este

$$\delta_{11}X_1^t + \delta_{10}^t = 0, \text{ de unde } X_1^t = - \frac{\delta_{10}^t}{\delta_{11}},$$

unde s-a notat cu $X_1^t = H$ necunoscuta static nedeterminată și cu δ_{10}^t dilatarea liniară a riglei

$$\delta_{10}^t = - \alpha t l = - 10^{-5} \cdot 50 \cdot 6,00 = - 300 \cdot 10^{-5} \text{ m},$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 4,00 \cdot 4,00 \right) \frac{2}{3} \cdot 4,00 + \frac{1}{EI_2} (4,00 \cdot 6,00) 4,00,$$

unde:

$$I_1 = \frac{3 \cdot 4^3}{12} \cdot 10^{-4} = 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4; \quad I_2 = \frac{3 \cdot 8^3}{12} \cdot 10^{-4} = 128 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$E = 2,4 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2; \quad \delta_{11} = 1,43 \cdot 10^{-2},$$

$$X_1^t = H = - \frac{\delta_{10}^t}{\delta_{11}} = 0,21 \text{ kN}; \quad M_3 = M_4 = 0,21 \cdot 4,00 = 0,84 \text{ kNm}.$$

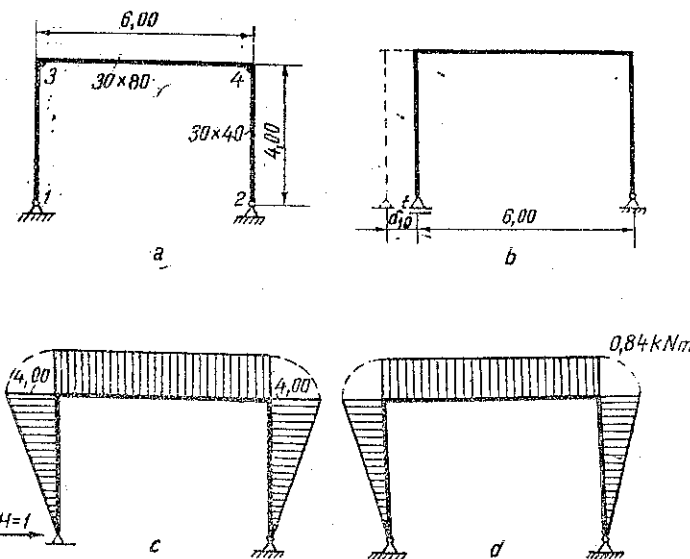


Fig. 11.14

11.15. Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare pentru cadrul din figura 11.15, a, cînd articulația 1 se tasează cu $0,5 \text{ cm}$. Secțiunea stîlpului este $30 \times 40 \text{ cm}^2$, a riglei $30 \times 60 \text{ cm}^2$, iar modulul de elasticitate al betonului $E = 240\,000 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Sistemul fiind o dată static nedeterminat, se face static determinat prin introducerea unei articulații în nodul 2 (Fig. 11.15, b), în care apare momentul necunoscut X_1 , care se determină din relația :

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

În cazul de față δ_{10} este chiar rotația grinzii din cauza tasării reazemului (Fig. 11.15, c) adică :

$$\delta_{10} = \frac{0,5}{500} = 0,001 = 10^{-3}$$

Momentele de inerție sînt :

Stîlp : $I = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ dm}^4$. Riglă : $I = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4$.

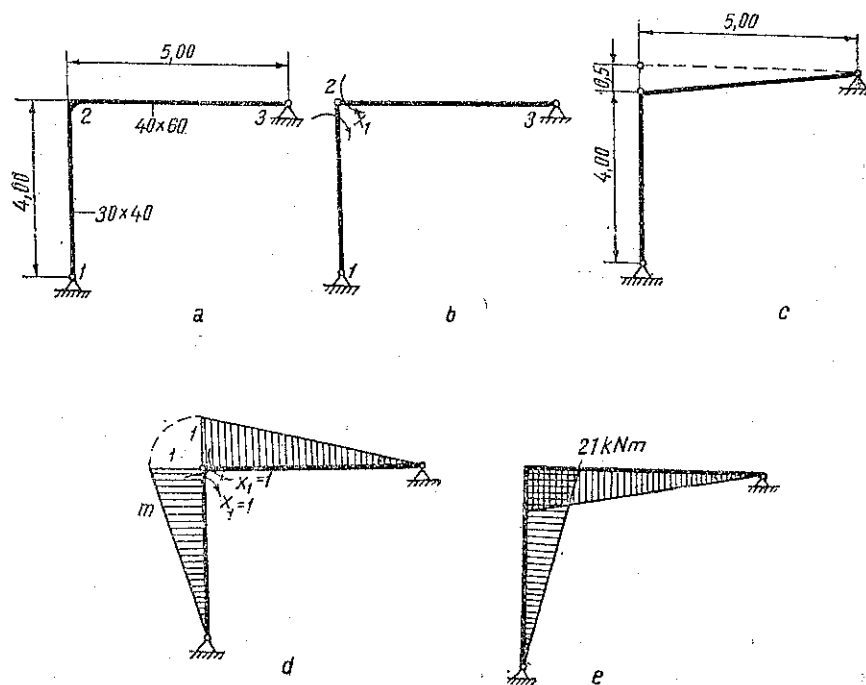


Fig. 11.15

Diagrama de momente datorită încărcării $X_1 = 1$ este arătată în figura 11.15, d.

Rezultă :

$$E\delta_{11} = \left(\frac{1 \cdot 5,00}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5,4 \cdot 10^{-3}} + \left(\frac{1 \cdot 4,00}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-3}}$$

$$E\delta_{11} = 11,43 \cdot 10^2, \quad \delta_{11} = \frac{11,43 \cdot 10^2}{2,4 \cdot 10^7} = 4,78 \cdot 10^{-5}$$

$$X_1 = -\frac{10^{-3}}{4,78 \cdot 10^{-5}} \approx -21,0 \text{ kNm.}$$

Rezultă diagrama de momente din figura 11.15, e.

11.16. Să se construiască diagrama momentelor încovoietoare pentru un cadru încastrat la ambele capete (Fig. 11.16, a), încărcat cu o sarcină uniform distribuită, știind că momentul de inerție este constant pe întreg cadrul. Se dau : $q = 1 \text{ kN/m}$; $l = 6 \text{ m}$; $h = 4 \text{ m}$.

Rezolvare. Cadrul fiind încărcat simetric, reacțiunile verticale sînt egale :

$$V_1 = V_2 = \frac{ql}{2}$$

Cadrul rămîne astfel numai de două ori static nedeterminat, necunoscutele fiind M_0 și $H = H_1 = H_2$.

Se aplică metoda lui Castigliano, așezînd calculele ca în tabelul 11.16.

Tabelul 11.16

Regiuni	M	$\frac{\partial M}{\partial H}$	$\frac{\partial M}{\partial M_0}$	$\frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial H} ds$	$\frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial M_0} ds$
1-3 și 2-4	$M_0 - Hy$	$-y$	1	$\frac{-2}{EI} \int_0^h (M_0 - Hy)y dy =$ $= -\frac{2}{EI} \left[\frac{M_0 y^2}{2} - \frac{Hy^3}{3} \right]_0^h =$ $= -\frac{2h^3}{EI} \left(\frac{M_0}{2} - \frac{Hh}{3} \right)$	$\frac{2}{EI} \int_0^h (M_0 - Hy) dy =$ $= \frac{2}{EI} \left(M_0 h - \frac{Hh^2}{2} \right)$
3-4	$M_0 - Hh +$ $+\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$	$-h$	1	$\frac{1}{EI} \left(-M_0 hl + Hh^2 + \right.$ $\left. -\frac{ql}{2} \frac{l^2}{2} h + \frac{q}{2} \frac{l^3}{3} h \right)$	$\frac{1}{EI} \left(M_0 l - Hhl + \right.$ $\left. +\frac{ql}{2} \frac{l^2}{2} - \frac{ql^3}{6} \right)$

Deplasarea pe orizontală pe direcția lui H și rotirea reazemului fiind ambele nule, rezultă două ecuații cu două necunoscute :

$$-\frac{2h^2}{EI} \left(\frac{M_0}{2} - \frac{Hh}{3} \right) + \frac{1}{EI} \left(-M_0hl + Hh^2l - \frac{ql^3}{4}h + \frac{ql^3}{6}h \right) = 0;$$

$$\frac{2}{EI} \left(M_0h - \frac{Hh^2}{2} \right) + \frac{1}{EI} \left(M_0l - Hhl - \frac{ql^3}{4} - \frac{ql^3}{6} \right) = 0.$$

$$\begin{cases} -M_0h^2 + \frac{2}{3}h^3H - M_0hl + Hh^2l - \frac{ql^3}{4}h + \frac{ql^3}{6}h = 0; \\ 2M_0h - Hh^2 + M_0l - Hhl + \frac{ql^3}{4} - \frac{ql^3}{6} = 0. \end{cases}$$

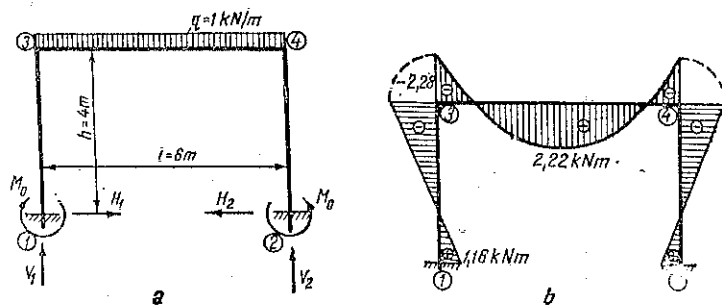


Fig. 11.16

Simplificând prima ecuație cu h și grupând termenii, se obține :

$$Hh \left(\frac{2}{3}h + l \right) - M_0(l + h) = \frac{ql^3}{12},$$

$$-Hh(h + l) + M_0(2h + l) = -\frac{ql^3}{12}.$$

Înlocuind valorile numerice se obține :

$$\begin{cases} 34,5H - 10M_0 = 18 \\ -40H + 14M_0 = -18 \end{cases}$$

$$H = 0,86 \text{ kN}; \quad M_0 = 1,16 \text{ kNm}.$$

Momentele la colțuri sînt :

$$M_3 = M_4 = M_0 - Hh = +1,16 - 0,86 \cdot 4 = -2,28 \text{ kNm}.$$

Momentul maxim la mijlocul riglei este :

$$\frac{ql^2}{8} + M_3 = \frac{1 \cdot 6^2}{8} - 2,31 = 2,22 \text{ kNm}.$$

Diagrama de momente este reprezentată în figura 11.16, b.

11.17. Să se traseze diagrama de momente pentru sistemul de bare din figura 11.17, a.

Rezolvare. Sistemul, reprezentat printr-un contur închis, este de trei ori static nedeterminat. Necunoscutele static nedeterminate X_1 , X_2 și X_3

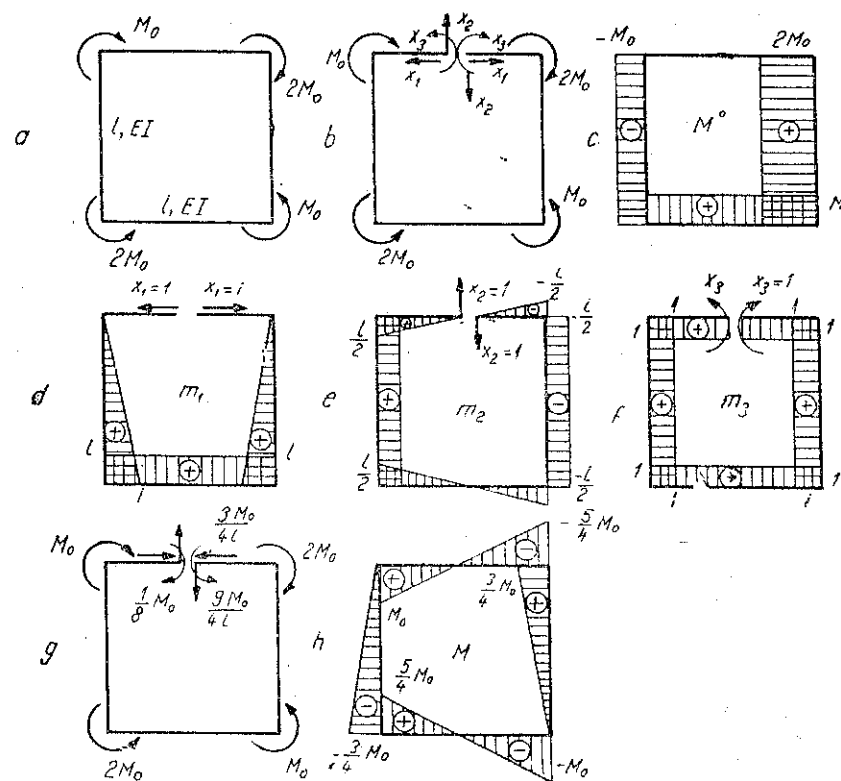


Fig. 11.17

se pun în evidență prin secționarea sistemului (Fig. 11.17, b). Sistemul de ecuații (11.1) devine:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{10} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{20} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{30} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Calculul deplasărilor δ_{ij} se face cu metoda *Mohr-Maxwell-Vereșcea-ghin*, folosind diagramele date în figurile 11.7, c, d, e și f.

$$EI\delta_{10} = (-M_0l) \cdot \frac{l}{2} + M_0l \cdot l + 2M_0l \cdot \frac{l}{2} = \frac{3}{2} M_0l^2,$$

$$EI\delta_{20} = (-M_0l) \cdot \frac{l}{2} + 2M_0l \left(-\frac{l}{2}\right) = -\frac{3}{2} M_0l^2,$$

$$EI\delta_{30} = (-M_0l) \cdot 1 + M_0l \cdot 1 + 2M_0l \cdot 1 = 2M_0l,$$

$$EI\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l + l^2 \cdot l = \frac{5}{3} l^3,$$

$$EI\delta_{22} = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2} + 2 \frac{l^2}{2} \frac{l}{2} = \frac{2}{3} l^3,$$

$$EI\delta_{33} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{l}{2} \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot l \cdot 1 = 4l,$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = 0,$$

$$EI\delta_{13} = EI\delta_{31} = 2 \cdot \frac{1}{2} l^2 \cdot 1 + l^2 \cdot 1 = 2l^2,$$

$$EI\delta_{23} = EI\delta_{32} = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{5}{3} l^3 X_1 + 2l^2 X_3 + \frac{3}{2} M_0 l^2 = 0 \\ \frac{2}{3} l^3 X_2 - \frac{3}{2} M_0 l^2 = 0 \\ 2l^2 X_1 + 4l X_3 + 2M_0 l = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (2) rezultă:

$$X_1 = -\frac{3}{4} \frac{M_0}{l}, \quad X_2 = \frac{9}{4} \frac{M_0}{l}, \quad X_3 = -\frac{1}{8} M_0.$$

În figura 11.17, h este dată diagrama de momente.

11.18. Să se traseze diagramele de eforturi N , T , M pentru barele sistemului din figura 11.18, a.

Rezolvare. Sistemul reprezentat printr-un contur închis este de trei ori static nedeterminat. Sistemul de bază este dat în figura 11.18, b. Sis-

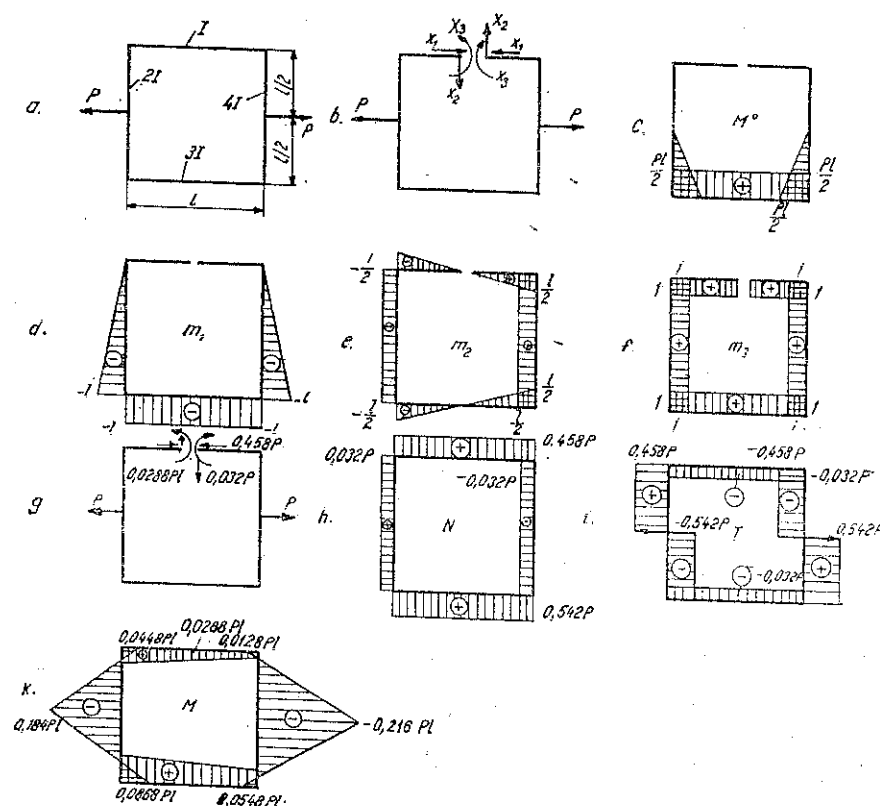


Fig. 11.18

temul de ecuații (11.1) a fost scris la problema 11.17. Calculul deplasărilor se face folosind diagramele date în figurile 11.18, *c*, *d*, *e* și *f*.

$$E\delta_{10} = \frac{1}{2I} \frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2} \left(-\frac{5}{6} l \right) + \frac{1}{3I} \frac{Pl}{2} l (-l) + \frac{1}{4I} \frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2} \left(-\frac{5}{6} l \right) = -\frac{47}{192} \frac{Pl^3}{I},$$

$$E\delta_{20} = \frac{1}{2I} \frac{1}{2} \frac{Pl^2}{4} \left(-\frac{l}{2} \right) + \frac{1}{4I} \frac{1}{2} \frac{Pl^2}{4} \frac{l}{2} = -\frac{1}{64} \frac{Pl^3}{I},$$

$$E\delta_{30} = \frac{1}{2I} \frac{1}{2} \frac{Pl^2}{4} \cdot 1 + \frac{1}{3I} \frac{Pl^2}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4I} \cdot \frac{1}{2} \frac{Pl^2}{4} \cdot 1 = \frac{25}{96} \frac{Pl^2}{I},$$

$$E\delta_{11} = \frac{1}{2I} \frac{1}{2} l^2 \frac{2}{3} l + \frac{1}{3I} l^3 + \frac{1}{4I} \frac{1}{2} l^2 \frac{2}{3} l = \frac{7}{12} \frac{l^3}{I},$$

$$E\delta_{22} = \frac{1}{I} \frac{2}{2} \frac{1}{4} \frac{l^2}{3} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2} + \frac{1}{2I} \frac{l^2}{2} \frac{l}{2} + \frac{1}{3I} \frac{2}{2} \frac{1}{4} \frac{l^2}{3} \frac{l}{2} + \frac{1}{4I} \frac{l^3}{2} \frac{l}{2} = \frac{43}{144} \frac{l^3}{I},$$

$$E\delta_{33} = \frac{1}{I} \frac{2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{l}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2I} l \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{3I} l \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{4I} l \cdot 1 \cdot 1 = \frac{25}{12} \frac{l}{I},$$

$$E\delta_{12} = E\delta_{21} = \frac{1}{2I} \left(-\frac{1}{2} l^2 \right) \cdot \left(-\frac{l}{2} \right) + \frac{1}{4I} \left(-\frac{1}{2} l^2 \right) \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{1}{16} \frac{l^3}{I},$$

$$E\delta_{13} = E\delta_{31} = \frac{1}{2I} \left(-\frac{1}{2} l^2 \right) \cdot 1 + \frac{1}{3I} (-l^2) \cdot 1 + \frac{1}{4I} \left(-\frac{l^2}{2} \right) \cdot 1 = -\frac{17}{24} \frac{l^2}{I},$$

$$E\delta_{23} = E\delta_{32} = \frac{1}{2I} \left(-\frac{l^2}{2} \right) \cdot 1 + \frac{1}{4I} \frac{l^2}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{8} \frac{l^2}{I},$$

$$\begin{cases} \frac{7}{12} l^3 X_1 + \frac{1}{16} l^3 X_2 - \frac{17}{24} l^2 X_3 - \frac{47}{192} Pl^3 = 0 \\ \frac{1}{16} l^3 X_1 + \frac{43}{144} l^3 X_2 - \frac{1}{8} l^2 X_3 - \frac{1}{64} Pl^3 = 0 \\ -\frac{17}{24} l^2 X_1 - \frac{1}{8} l^2 X_2 + \frac{25}{12} l X_3 + \frac{25}{96} Pl^2 = 0. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul de ecuații se obține:

$$X_1 = 0,458 P; X_2 = -0,032 P; X_3 = 0,0288 Pl.$$

În figurile 11.18, *h*, *i* și *j* sunt date diagramele *N*, *T*, *M*.

11.19. Pentru sistemul de bare din figura 11.19, *a*, de secțiune constantă, să se traseze diagramele *N* și *M*.

Rezolvare. Sistemul este triplu static nedeterminat interior.

Necunoscutele static nedeterminate X_1 , X_2 și X_3 sunt puse în evidență în figura 11.19, *b*. Sistemul de ecuații (11.1) aplicat acestui sistem a fost scris la problema 11.17. Coeficienții sistemului se calculează folosind diagramele din figurile 11.19, *c*, *d*, *e* și *f*.

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} l \frac{\sqrt{3}}{4} Pl \cdot \frac{1}{3} \frac{l}{2} - \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{3}}{4} Pl \cdot \frac{1}{3} \frac{l}{2} \right] + \frac{1}{EA} \left[\frac{5}{4} Pl \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{3}{4} Pl \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \frac{\sqrt{3} Pl}{EA},$$

$$\delta_{20} = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{4} Pl^2 \cdot \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} l \right] + \frac{1}{EA} \left[\frac{5}{4} Pl \frac{1}{2} - \frac{3}{4} Pl \frac{1}{2} \right] = \frac{Pl^3}{4EI} + \frac{Pl}{4EA},$$

$$\delta_{30} = \frac{2}{EI} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{4} Pl^2 = \frac{\sqrt{3} Pl^2}{4EI},$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{4} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2} \right) + \frac{2}{EA} \frac{\sqrt{3}}{2} l \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l^3}{4EI} + \frac{3}{2} \frac{l}{EA},$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{EI} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} l^2 \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} l + \frac{1}{EA} \left(2 \cdot \frac{1}{2} l \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \frac{l}{2} \cdot 1 \right) = \frac{l^3}{2EI} + \frac{3}{2} \frac{l}{EA},$$

$$\delta_{33} = \frac{3}{EI} (l \cdot 1 \cdot 1) = \frac{3l}{EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = 0,$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{2}{EI} l \cdot 1 \frac{\sqrt{3}}{4} l = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l^2}{EI},$$

$$X_1 \left(\frac{l^3}{4EI} + \frac{3}{2} \frac{l}{EA} \right) + \frac{\sqrt{3} Pl}{EA} = 0$$

$$X_2 \left(\frac{l^3}{2EI} + \frac{3l}{2EA} \right) + X_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l^2}{EI} + P \left(\frac{l^3}{4EI} + \frac{l}{4EA} \right) = 0$$

$$X_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l^2}{EI} + \frac{X_3 3l}{EI} + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{Pl^2}{EI} = 0.$$

Din rezolvarea sistemului rezultă :

$$X_1 = -\frac{4\sqrt{3} \frac{I}{Al^2}}{1 + 6 \frac{I}{Al^2}} \cdot P; \quad X_2 = -\frac{1 + 2 \frac{I}{Al^2}}{2 \left(1 + 6 \frac{I}{Al^2}\right)} \cdot P;$$

$$X_3 = -\frac{\frac{I}{Al^2}}{\sqrt{3} \left(1 + 6 \frac{I}{Al^2}\right)} \cdot Pl$$

$$M_1 = \frac{l}{2} X_1 + X_3 = \frac{l}{2} \left(-\frac{4\sqrt{3} \frac{I}{Al^2} P}{1 + \frac{6I}{Al^2}} \right) - \frac{\frac{I}{Al^2} Pl}{\sqrt{3} \left(1 + \frac{6I}{Al^2}\right)} =$$

$$= -\frac{7}{\sqrt{3}} \frac{\frac{I}{Al^2}}{1 + \frac{6I}{Al^2}} Pl,$$

$$M_2 = -\frac{l}{2} X_1 + X_3 = \frac{5}{\sqrt{3}} \frac{\frac{I}{Al^2}}{1 + \frac{6I}{Al^2}} Pl,$$

$$M_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} Pl + \frac{\sqrt{3}}{2} l X_2 + X_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} Pl +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} l \left[-\frac{1 + 2 \frac{I}{Al^2}}{2 \left(1 + \frac{6I}{Al^2}\right)} P \right] - \frac{\frac{I}{Al^2} Pl}{\sqrt{3} \left(1 + \frac{6I}{Al^2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{I}{Al^2}}{\left(1 + \frac{6I}{Al^2}\right)}$$

Diagrama de momente este dată în figura 11.19, g în care s-a notat

$$K = \frac{\frac{I}{Al^2}}{\sqrt{3} \left(1 + \frac{6I}{Al^2}\right)} Pl$$

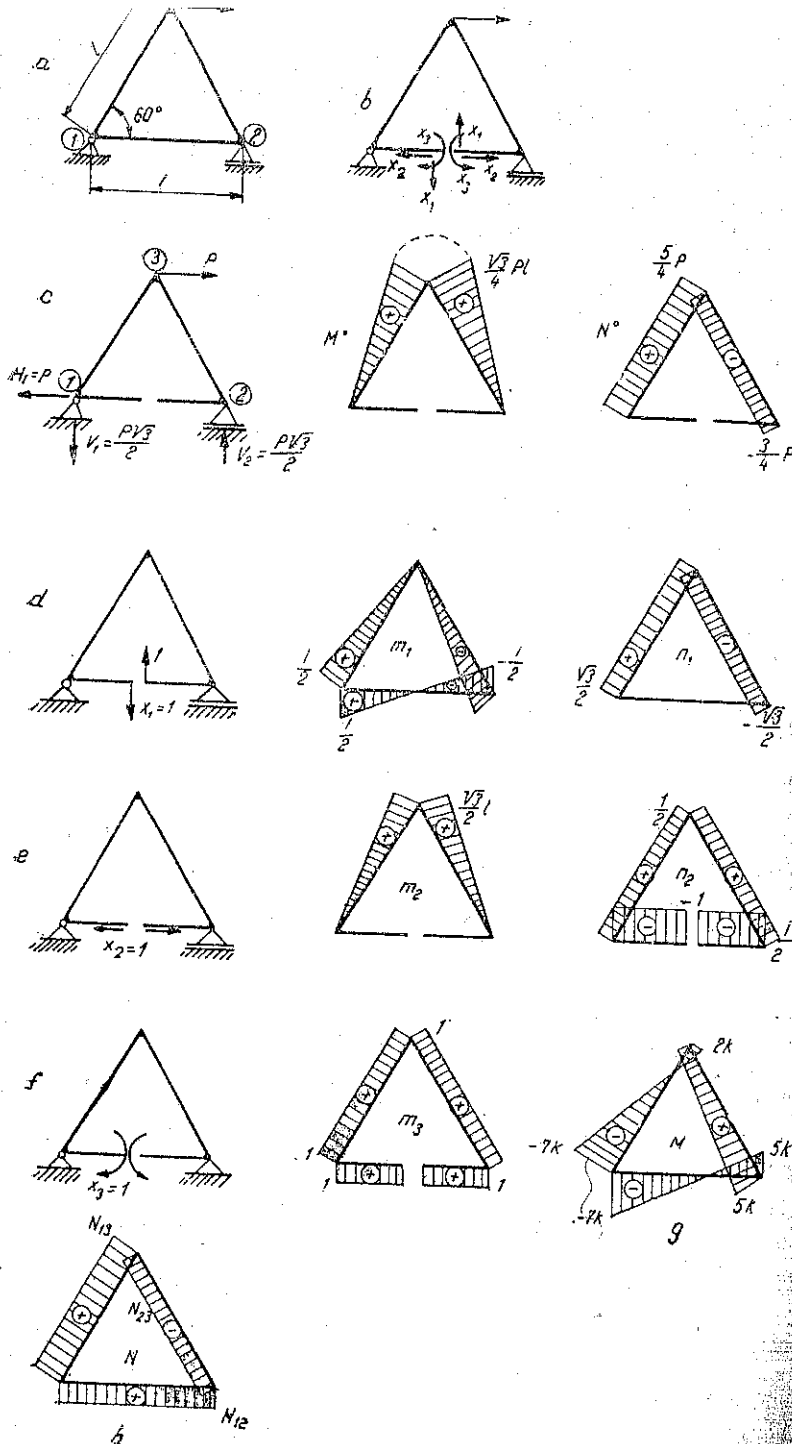


Fig. 11.19

$$\begin{aligned}
 N_{13} &= \frac{5}{4} P + \frac{\sqrt{3}}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2 = \frac{5}{4} P + \\
 &+ \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{4\sqrt{3}}{1 + \frac{6I}{Al^3}} \frac{I}{Al^2} P \right) + \frac{1}{2} \left[-\frac{\left(1 + \frac{2I}{Al^3}\right) P}{2\left(1 + \frac{6I}{Al^3}\right)} \right] = \frac{1 + \frac{I}{Al^2}}{1 + \frac{6I}{Al^2}} \cdot P \\
 N_{12} &= -X_2 = -\frac{1 + 2\frac{I}{Al^3}}{2\left(1 + 6\frac{I}{Al^3}\right)} \cdot P, \\
 N_{23} &= -\frac{3}{4} P - \frac{\sqrt{3}}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2 = \\
 &= -\frac{3}{4} P + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{4\sqrt{3}}{1 + 6\frac{I}{Al^3}} \frac{I}{Al^2} \cdot P - \frac{1}{2} \frac{1 + 2\frac{I}{Al^3}}{2\left(1 + 6\frac{I}{Al^3}\right)} \cdot P = \frac{-1 + \frac{I}{Al^2}}{1 + 6\frac{I}{Al^2}} \cdot P.
 \end{aligned}$$

Diagrama de forțe axiale N este dată în figura 11.19, h .

11.20. Să se traseze diagrama de momente pentru cadrul din figura 11.20, a . Barele cadrului au același moment de inerție I .

Rezolvare. Cadrul este de patru ori static nedeterminat. Datorită simetriei, gradul de nedeterminare se poate reduce cu o unitate.

Necunoscutele static nedeterminate X_1 , X_2 și X_3 sînt puse în evidență în schema din figura 11.20, b . Sistemul de ecuații (11.1) a fost scris la problema 11.17. Calculul coeficienților δ_{ii} se face folosind diagramele date în figurile 11.20, c , d , e și f .

$$EI\delta_{10} = \frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \cdot 2l \cdot 2l = Pl^3,$$

$$EI\delta_{20} = \frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \cdot 2l \cdot l = \frac{Pl^3}{2},$$

$$EI\delta_{30} = \frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \cdot 2l \cdot 1 = \frac{Pl^2}{2},$$

$$EI\delta_{11} = 2 \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l + (2l)^2 \cdot 2l = \frac{40}{3} l^3,$$

$$EI\delta_{22} = 2 \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l + l \cdot 2l \cdot l = \frac{8}{3} l^3,$$

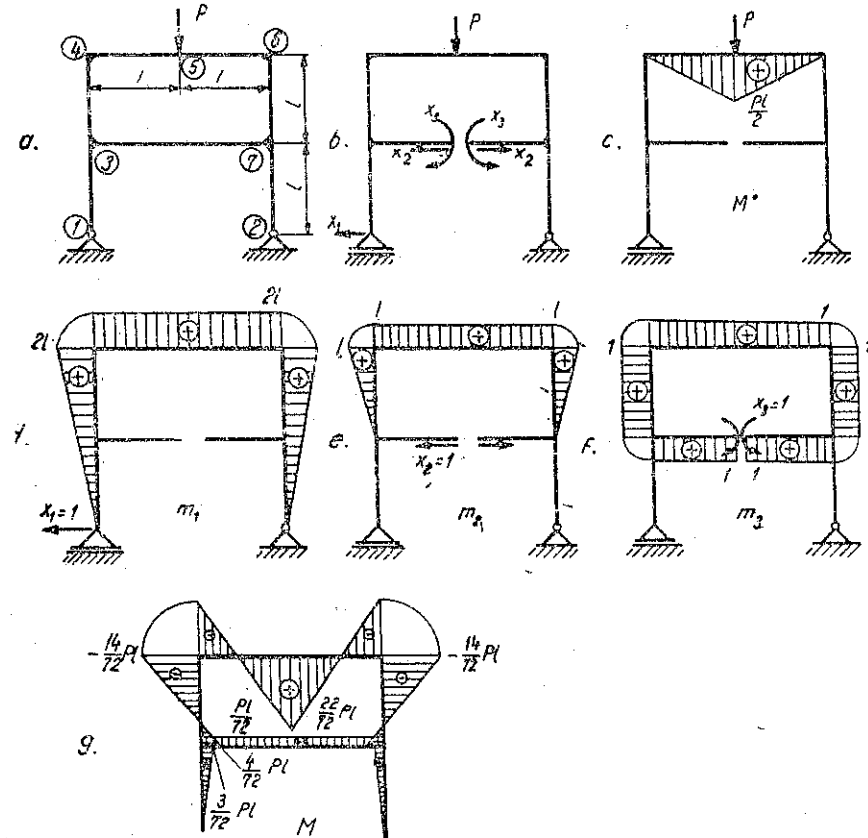


Fig. 11.20

$$EI\delta_{33} = 1 \cdot 2l \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot l \cdot 1 = 6l,$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = 2 \frac{1}{2} l^2 \left(l + \frac{2}{3} l \right) + l \cdot 2l \cdot 2l = \frac{17}{3} l^3,$$

$$EI\delta_{13} = EI\delta_{31} = 1 \cdot 2l \cdot 2l + 2 \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{3l}{2} = 7l^3,$$

$$EI\delta_{23} = EI\delta_{32} = 2 \cdot \frac{1}{2} l^2 \cdot 1 + 2l \cdot l = 3l^2,$$

$$\begin{cases} \frac{40}{3} l^3 X_1 + \frac{17}{3} l^3 X_2 + 7l^2 X_3 + Pl^3 = 0 \\ \frac{17}{3} l^3 X_1 + \frac{8}{3} l^3 X_2 + 3l^2 X_3 + \frac{Pl^3}{2} = 0 \\ 7l^2 X_1 + 3l^2 X_2 + 6l X_3 + \frac{Pl^2}{2} = 0. \end{cases}$$

Soluțiile sistemului sînt :

$$X_1 = \frac{3P}{72}; \quad X_2 = -\frac{21P}{72}; \quad X_3 = \frac{Pl}{72}.$$

Calculul momentelor încovoietoare :

$$\begin{cases} M_1 = 0; \quad M_2^{13} = lX_1 = \frac{3Pl}{72}; \quad M_3^{27} = X_3 = \frac{Pl}{72}; \\ M_3^{24} = lX_1 + X_3 = \frac{4Pl}{72}; \quad M_4 = 2lX_1 + lX_2 + X_3 = -\frac{14}{72} Pl; \\ M_5 = \frac{Pl}{2} + 2lX_1 + lX_2 + X_3 = \frac{22Pl}{72}. \end{cases}$$

Diagrama de momente este dată în figura 11.20, g.

11.21. Pentru bara de secțiune constantă din figura 11.21, a, se cere să se calculeze reacțiunile în reazeme și să se determine deplasarea pe direcția forței P .

Rezolvare. Problema este simplă static nedeterminată.

Se aplică metoda *Mohr-Maxwell*. Se consideră sistemul de bază din figura 11.21, b.

$$X_2 \delta_{22} + \delta_{20} = 0$$

Intervalul :

3-2

$$M_x = -Px; \quad m_x = 0;$$

2-1

$$M_\varphi = -PR(2 - \cos\varphi); \quad m_\varphi = R(1 - \cos\varphi).$$

Se aplică în 2, pe direcția necunoscutei X_2 o forță unitară (Fig. 11.21, c).

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_\varphi m_\varphi \frac{ds}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 (1 - \cos\varphi)^2 \frac{R d\varphi}{EI} = \\ &= \frac{R^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi = \frac{R^3}{EI} \left[\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{(3\pi - 8)R^3}{4EI}; \\ \delta_{20} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi m_\varphi \frac{ds}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-PR(2 - \cos\varphi)] [R(1 - \cos\varphi)] \frac{R d\varphi}{EI} = \\ &= -\frac{PR^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos\varphi)(1 - \cos\varphi) d\varphi = -\frac{PR^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 3\cos\varphi + \\ &+ \cos^2\varphi) d\varphi = -\frac{PR^3}{EI} \left[2\frac{\pi}{2} - 3 + \frac{\pi}{4} \right] = -\frac{(5\pi - 12)PR^3}{4EI}. \\ \frac{3\pi - 8}{4EI} R^3 X_2 - \frac{(5\pi - 12)R^3 P}{4EI} &= 0; \quad X_2 = \frac{(5\pi - 12)P}{3\pi - 8}, \\ H_1 &= 0; \quad V_1 = -1,6P; \quad V_2 = X_2 = 2,6P; \quad M_1 = -0,6PR. \end{aligned}$$

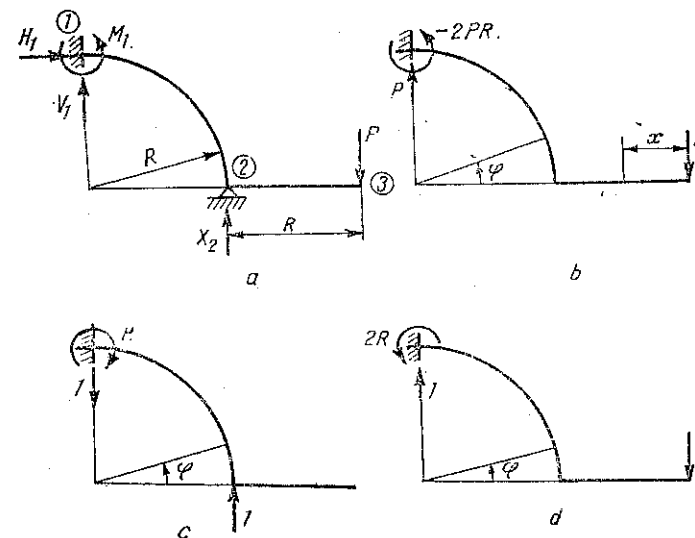


Fig. 11.21

Pentru calculul deplasării pe direcția forței P , se aplică în 3 o forță unitară (Fig. 11.21, d).

$$\begin{aligned}\delta_3 &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^R (-Px)(-x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-P[R + R(1 - \cos \varphi)] + \right. \\ &\quad \left. + 2,6 PR(1 - \cos \varphi)\} \cdot [-R - R(1 - \cos \varphi)] R d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^R Px^2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR^3 (-1,2 + 3,8 \cos \varphi - 1,6 \cos^2 \varphi) d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{PR^3}{3} + PR^3 \left(-1,2 \frac{\pi}{2} + 3,8 - 1,6 \frac{\pi}{4} \right) \right] = 0,97 \frac{PR^3}{EI}\end{aligned}$$

11.22. Să se traseze diagrama de momente pentru barele sistemului din figura 11.22, a.

Rezolvare. Sistemul este simplu static nedeterminat. Se alege ca necunoscută static nedeterminată componenta orizontală din articulația 1. Sistemul de ecuații (11.1) devine:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0. \quad (1)$$

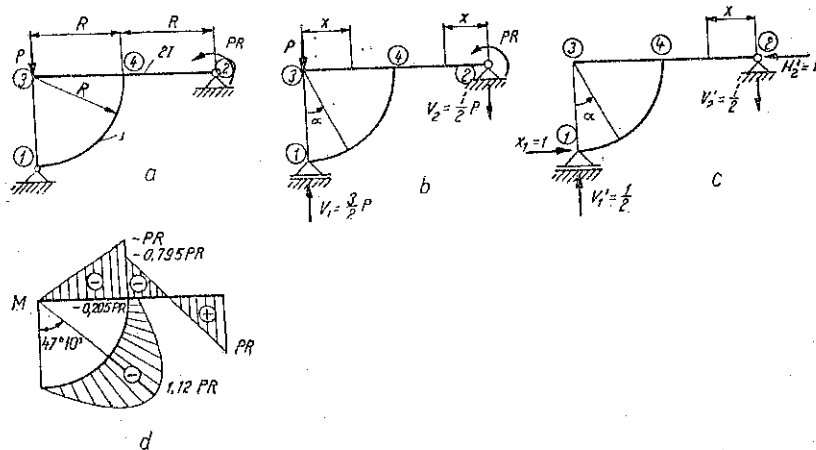


Fig. 11.22

Pentru calculul coeficienților din ecuația (1) se consideră sistemele prezentate în figurile 11.22, b și c.

$$M_{34}^0 = -Px, \quad m_{34} = 0,$$

$$M_{14}^0 = -\frac{3}{2} PR \sin \alpha, \quad m_{14} = R(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} R \sin \alpha,$$

$$M_{24}^0 = PR - \frac{1}{2} Px, \quad m_{24} = -\frac{1}{2} x.$$

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \left(1 - \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{2} \right)^2 R d\alpha + \frac{1}{2EI} \int_0^R \frac{1}{4} x^2 dx = \\ &= \frac{R^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{13}{8} - 2 \cos \alpha - \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{3}{8} \cos 2\alpha \right) d\alpha + \frac{R^3}{24EI} = \\ &= \left(\frac{13}{16} \pi - \frac{59}{24} \right) \frac{R^3}{EI} = 0,094 \frac{R^3}{EI},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{10} &= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{3}{2} PR \sin \alpha \right) \left[R(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} R \sin \alpha \right] R d\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{2EI} \int_0^R P \left(R - \frac{x}{2} \right) \left(-\frac{x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) d\alpha + \frac{P}{2EI} \int_0^R \left(\frac{x^2}{4} - \frac{Rx}{2} \right) dx = \\ &= \left(\frac{3\pi}{16} - \frac{5}{6} \right) \frac{PR^3}{EI} = -0,244 \frac{PR^3}{EI},\end{aligned}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{0,244 \frac{PR^3}{EI}}{0,094 \frac{R^3}{EI}} = 2,59 P.$$

Pentru trasarea diagramei de momente se scriu expresiile momentelor încovoietoare produse de încărcarea dată și de $X_1 = 2,59 P$.

$$M_{34} = -Px,$$

$$M_{14} = -\frac{3}{2} PR \sin \alpha + 2,59 PR(1 - \cos \alpha) - \frac{2,59}{2} PR \sin \alpha =$$

$$= PR [-2,795 \sin \alpha + 2,59(1 - \cos \alpha)].$$

Pe intervalul 1-4 momentul încovoietor are un maxim în secțiunea în care $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,795}{2,59} = 1,079$, adică pentru $\alpha = 47^\circ 10'$.

$$M_{24} = PR - \frac{1}{2} Px - \frac{2,59}{2} Px = P(R - 1,795 x).$$

Diagrama de momente este dată în figura 11.22, d.

11.23. Inelul din figura 11.23, a este solicitat prin cuplul M , ca în desen. Se cere să se determine momentele de încovoire și de torsiune într-o secțiune oarecare și să se calculeze unghiul $\Delta \varphi$ cu care se rotește una față de alta, secțiunile A și B.

Rezolvare. Se taie inelul ca în figura 11.23, b introducând în secțiuni cuplurile $\frac{1}{2} M$. Într-o secțiune oarecare α , cuplul $\frac{1}{2} M$ dă momentele:

$$M_t = \frac{1}{2} M \cos \alpha;$$

$$M_i = \frac{1}{2} M \sin \alpha.$$

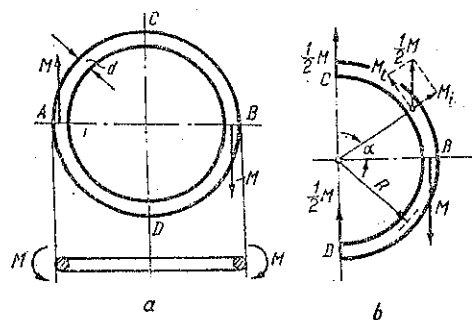


Fig. 11.23

Unghiul căutat este:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial U}{\partial M} = 4 \left[\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} M \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot R d\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{GI_p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} M \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot R d\alpha \right],$$

$$\Delta \varphi = \frac{\pi MR}{4} \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{GI_p} \right) = \frac{\pi MR}{4} \left(\frac{64}{\pi d^4 E} + \frac{32}{\pi d^4 G} \right) = \frac{8 MR}{d^4} \left(\frac{2}{E} + \frac{1}{G} \right).$$

11.24. Pentru bara închisă din figura 11.24, a cu secțiune constantă, se cere să se calculeze deplasarea pe direcția forței P , a punctului 7.

Rezolvare. Problema este simplu static nedeterminată. Se aplică metoda Mohr-Maxwell. Se izolează un sfert din bară ca în figura 11.24, b. Din motive de simetrie în punctul 7 nu există forță tăietoare, iar în 3 nu există forță normală.

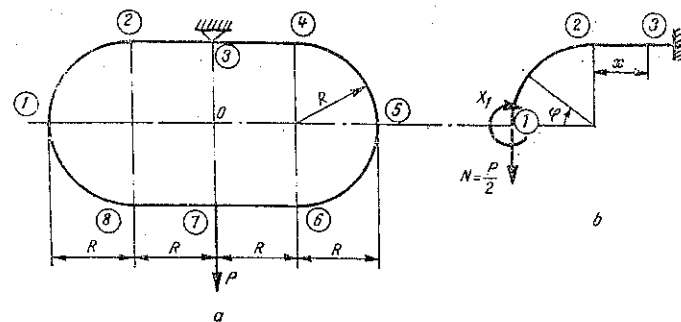


Fig. 11.24

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0;$$

$$\delta_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_\varphi m_\varphi \frac{ds}{EI} + \int_0^R m_x m_x \frac{dx}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \frac{R d\varphi}{EI} + \int_0^R 1 \cdot \frac{dx}{EI} =$$

$$= \frac{\pi R}{2EI} + \frac{R}{EI} = \frac{(\pi + 2)R}{2EI};$$

$$\delta_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi m_\varphi \frac{ds}{EI} + \int_0^R M_x m_x \frac{dx}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{P}{2} R(1 - \cos \varphi) \frac{R d\varphi}{EI} +$$

$$+ \int_0^R -\frac{P}{2} (R + x) \cdot \frac{dx}{EI} = -\frac{PR^2(\pi - 2)}{4EI} - \frac{3PR^3}{4EI} = -\frac{PR^2}{4EI}(\pi + 1);$$

$$\frac{(\pi + 2)R}{2EI} X_1 - \frac{PR^2}{4EI}(\pi + 1) = 0; X_1 = \frac{\pi + 1}{2(\pi + 2)} PR \cong 0,4 PR.$$

$$M_{1-2} = X_1 - \frac{P}{2} R(1 - \cos \varphi) = 0,4 PR - \frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi) =$$

$$= -PR(0,1 - 0,5 \cos \varphi),$$

$$M_{2-3} = X_1 - \frac{P}{2} (R + x) = 0,4 PR - \frac{P}{2} (R + x) = -P(0,1R - 0,5x).$$

Pentru calculul deplasării pe direcția forței P , se aplică în punctul 7 o forță unitară.

$$\begin{aligned}\delta_7 &= \frac{4}{EI} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-PR(0,1 - 0,5 \cos \varphi)] [-R(0,1 - 0,5 \cos \varphi)] R d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^R [-P(0,1R - 0,5x)] [-(0,1R - 0,5x)] dx \right\} = \\ &= \frac{4}{EI} \left[PR^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0,01 - 0,1 \cos \varphi + 0,25 \cos^2 \varphi) d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + P \int_0^R (0,01R^2 - 0,1Rx + 0,25x^2) dx \right] = \\ &= \frac{4}{EI} \left[PR^3 \left(0,01 \frac{\pi}{2} - 0,1 \cdot 1 + 0,25 \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + P \left(0,01R^3 - 0,1 \frac{R^3}{2} + 0,25 \frac{R^3}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{4PR^3}{EI} [0,11 + 0,04] = \frac{0,6PR^3}{EI}.\end{aligned}$$

11.25. Să se determine eforturile N , T , M în barele sistemului din figura 11.25, a.

Rezolvare. Sistemul, reprezentat printr-un contur închis, este de trei ori static nedeterminat. Datorită simetriei, gradul de nedeterminare se poate reduce cu o unitate. Necunoscutele static nedeterminate X_1 și X_2 se pun în evidență prin sectionarea sistemului (Fig. 11.25, b) în punctele 1 și 4. Eforturile introduse în aceste secțiuni, amplasate simetric, sînt egale.

Sistemul de ecuații (11.1) devine:

$$\begin{aligned}\delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= 0 \\ \delta_{20} + X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22} &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Pentru calculul coeficienților se consideră sistemele auxiliare prezentate în figurile 11.25, c, d și e. Sistemul fiind simetric, este suficient să se scrie expresiile momentelor încovoietoare pentru porțiunile 1-2 și 1-3:

$$M_{12}^0(\theta) = \frac{P}{2} R(1 - \cos \theta); \quad M_{13}^0(x) = -\frac{P}{2} x,$$

$$m_{12}^{(1)}(\theta) = -R \sin \theta; \quad m_{13}^{(1)}(x) = 0; \quad m_{12}^{(2)}(\theta) = -1; \quad m_{13}^{(2)}(x) = 1.$$

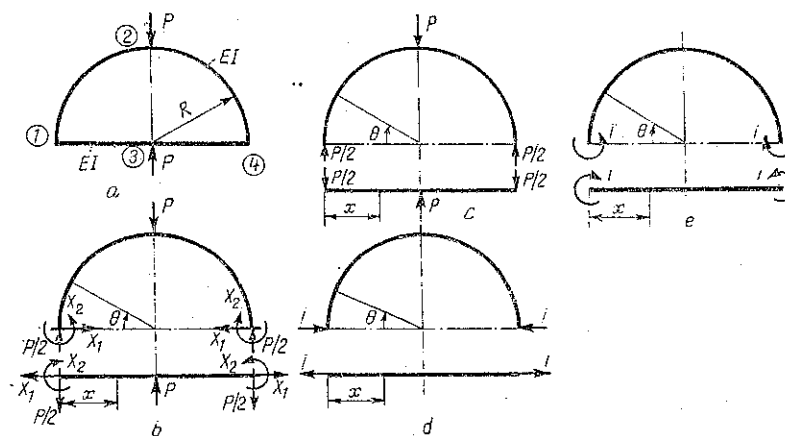


Fig. 11.25, a-e

Deplasările δ_{10} , ..., δ_{22} se obțin prin integrare:

$$\begin{aligned}EI \delta_{10} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{12}^0 m_{12}^{(1)} R d\theta + 2 \int_0^R M_{13}^0 m_{13}^{(1)} dx = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR(1 - \cos \theta) R \sin \theta d\theta = -\frac{PR^3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}EI \delta_{20} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{12}^0 m_{12}^{(2)} R d\theta + 2 \int_0^R M_{13}^0 m_{13}^{(2)} dx = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR(1 - \cos \theta) R d\theta - \int_0^R Px dx = -\frac{PR^2}{2}(\pi - 1)\end{aligned}$$

$$EI \delta_{11} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [m_{12}^{(1)}]^2 R d\theta + 2 \int_0^R [m_{13}^{(1)}]^2 dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi R^3}{2}$$

$$EI \delta_{12} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} R d\theta + 2 \int_0^R m_{13}^{(1)} m_{13}^{(2)} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sin \theta d\theta = 2R^2$$

$$EI \delta_{22} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [m_{12}^{(2)}]^2 R d\theta + 2 \int_0^R [m_{13}^{(2)}]^2 dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R d\theta + 2 \int_0^R dx = R(\pi + 2).$$

Sistemul (1) devine :

$$-\frac{PR^3}{2} + X_1 \frac{\pi R^3}{2} + X_2 \cdot 2R^2 = 0$$

$$-\frac{PR^2}{2} (\pi - 1) + X_1 \cdot 2R^2 + X_2 \cdot R(\pi + 2) = 0.$$

Soluțiile acestui sistem sînt :

$$X_1 = 0,105 P; \quad X_2 = 0,167 PR.$$

Eforturile în barele sistemului static nedeterminat se obțin cu ajutorul sistemului de bază din figura 11.25, b :

$$N_{12}(\theta) = -\frac{P}{2} \cos \theta - 0,105 P \sin \theta; \quad T_{12}(\theta) = \frac{P}{2} \sin \theta - 0,105 P \cos \theta,$$

$$M_{12}(\theta) = \frac{P}{2} R(1 - \cos \theta) - 0,105 PR \sin \theta - 0,167 PR.$$

Pe intervalul 1-2 forța tăietoare se anulează pentru $\tan \theta_0 = 0,21$, $\theta_0 = 11^\circ 48'$. Momentul are în această secțiune valoarea: $M_{\max} = -0,176 PR$.

$$N_{13}(x) = 0,105 P; \quad T_{13}(x) = \frac{P}{2}; \quad M_{13}(x) = \frac{P}{2} x - 0,167 PR.$$

Diagramele corespunzătoare sînt reprezentate în figurile 11.25, f, g, h.

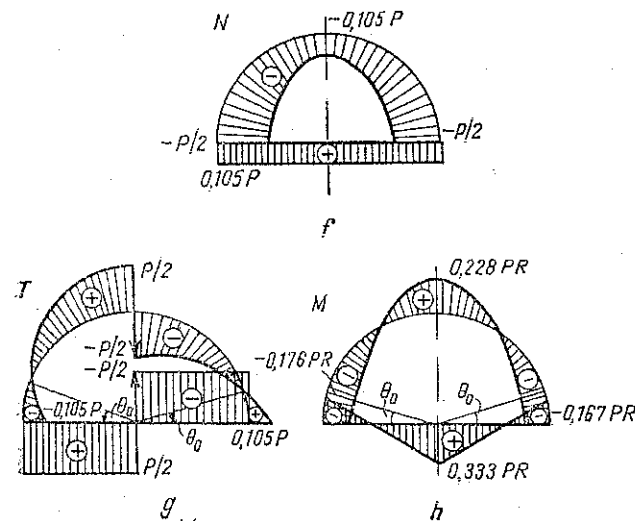


Fig. 11.25, f-h

11.26. La inelul din figura 11.26, a, solicitat prin cele două forțe P , avînd raza R mare în comparație cu grosimea h , se cere să se construiască diagramele N , T , M și să se determine lungirea, respectiv scurtarea celor două diametre perpendiculare care formează axele de simetrie ale figurii deformat.

Rezolvare. Problema este simplu static nedeterminată. Se folosește metoda *Mohr-Maxwell*. Se consideră un sfert de inel ca în figura 11.26, b.

Din motive de simetrie, în 2 nu există forță axială, iar în 1 nu există forță tăietoare. Se notează cu X_1 momentul încovoietor în 1, cu sensul din figură.

Ecuația de condiție este :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0.$$

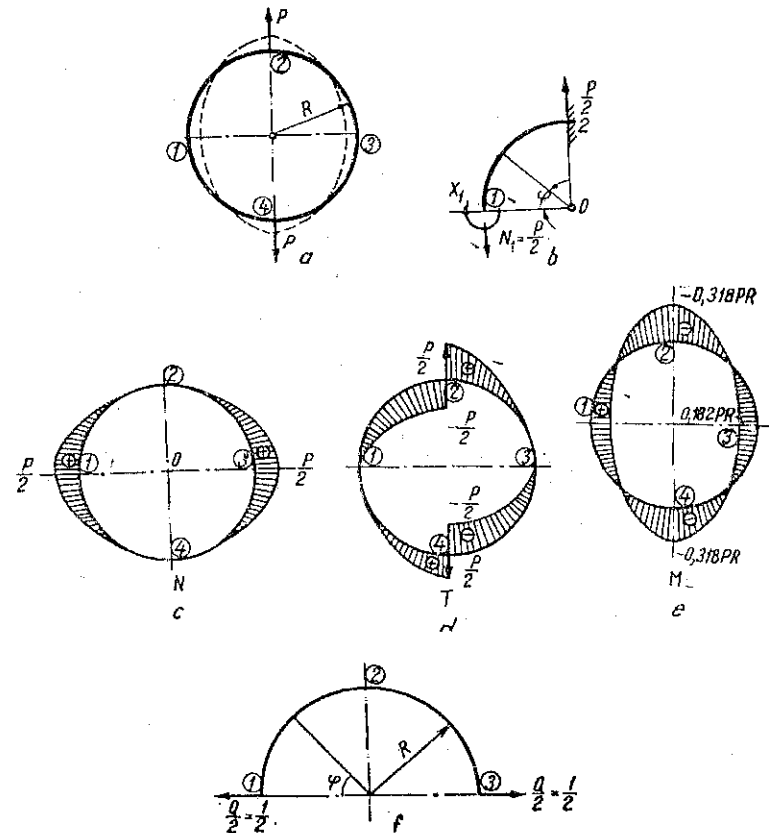


Fig. 11.26

Într-o secțiune oarecare la unghiul φ se obține:

$$M_{\varphi} = -\frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi); \quad m_{\varphi} = 1.$$

Atunci:

$$\delta_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_{\varphi} \cdot m_{\varphi} \frac{ds}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot 1 \frac{Rd\varphi}{EI} = \frac{\pi R}{2EI},$$

$$\delta_{10} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{\varphi} m_{\varphi} \frac{ds}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi) \cdot 1 \cdot \frac{Rd\varphi}{EI} = -\frac{PR^2(\pi - 2)}{4EI}$$

Ecuția de condiție devine:

$$\frac{\pi R}{2EI} X_1 - \frac{PR^2(\pi - 2)}{4EI} = 0,$$

de unde:

$$X_1 = M_1 = \frac{PR}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 0,182 PR. \quad (1)$$

Expresia momentului încovoietor într-o secțiune oarecare devine:

$$M = \frac{PR}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} - 1 + \cos \varphi\right) = \frac{PR}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right). \quad (2)$$

Cu ajutorul acestora se construiește diagrama de momente încovoietoare din figura 11.26, e.

Momentul în secțiunea 2 $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ este:

$$M_2 = \frac{PR}{2} \left(0 - \frac{2}{\pi}\right) = -0,318 PR. \quad (3)$$

Forța axială într-o secțiune oarecare este:

$$N = \frac{P}{2} \cos \varphi; \quad (4)$$

iar forța tăietoare este:

$$T = -\frac{P}{2} \sin \varphi. \quad (5)$$

Cu ajutorul formulelor (4) și (5) se construiesc diagramele N , T din figurile 11.26, c și 11.26, d.

Deformațiile diametrelor perpendiculare (1-3) și (2-4) se calculează prin metoda *Mohr-Maxwell*, folosind în acest scop formula (11.14).

Pentru calculul lungirii diametrului (2-4) se aplică în 2, pe direcția lui, o forță $P = 1$.

Atunci în 4, pe aceeași direcție, apare o forță opusă $P = 1$. Utilizând formula (2) rezultă:

$$M_{\varphi} = \frac{PR}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right); \quad m_{\varphi} = \frac{R}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right).$$

Notind cu v lungirea diametrului (2-4), se obține, prin aplicarea formulei amintite:

$$\begin{aligned} v &= \frac{4}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{\varphi} m_{\varphi} ds = \frac{4}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right) \frac{R}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right) R d\varphi = \\ &= \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right)^2 d\varphi = \frac{PR^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) \frac{PR^3}{EI} = 0,149 \frac{PR^3}{EI}. \end{aligned}$$

Pentru calculul scurtării diametrului (1-3) se aplică în 1 pe direcția lui o forță $Q = 1$. Atunci în 3, pe aceeași direcție, apare o forță opusă $Q = 1$. Pentru jumătatea de inel (1-2-3) revine în 1 forța $\frac{Q}{2} = \frac{1}{2}$ (Fig. 11.26, f). Utilizând tot formula (2), rezultă și în acest caz:

$$M_{\varphi} = \frac{PR}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right).$$

Din figura 11.26, f se obține:

$$m_{\varphi} = \frac{1}{2} R \sin \varphi.$$

Notind cu u lungirea (respectiv scurtarea) diametrului (1-3), se obține prin aplicarea formulei amintite:

$$u = \frac{4}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi m_\varphi ds = \frac{4}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right) \frac{R}{2} \sin \varphi R d\varphi =$$

$$= \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right) d\varphi = \frac{PR^3}{EI} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \right) = -0,137 \frac{PR^3}{EI}$$

Semnul minus arată că deformarea este de sens contrar forței Q .

11.27. Să se traseze diagrama de momente M pentru inelul din figura 11.27, a , solicitat de cuplul uniform distribuit m .

Rezolvare. Problema este triplu static nedeterminată. Datorită simetriei, gradul de nedeterminare se reduce cu o unitate (forța tăietoare este nulă).

Necunoscutele static nedeterminate X_1 și X_2 sunt puse în evidență în figura 11.27, b . Se aplică relația (11.1):

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

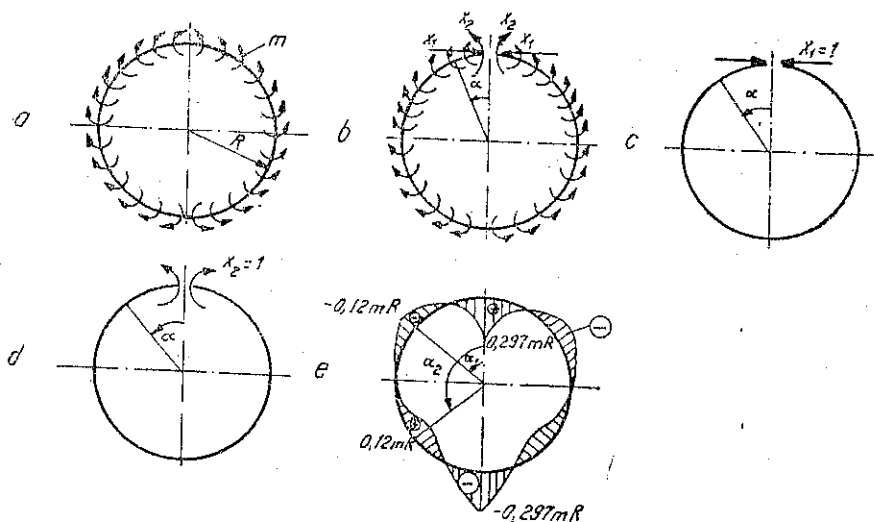


Fig. 11.27

Calculul deplasărilor se face cu metoda *Mohr-Maxwell*.

$$M_\alpha^0 = -mR\alpha; \quad m_1 = -R(1 - \cos \alpha); \quad m_2 = 1,$$

$$EI\delta_{10} = 2 \int_0^\pi mR^2\alpha(1 - \cos \alpha)R d\alpha = 2 \left(\frac{\pi^2}{2} + 2 \right) mR^3,$$

$$EI\delta_{20} = 2 \int_0^\pi -mR\alpha \cdot R d\alpha = -mR^2\pi^2,$$

$$EI\delta_{11} = 2 \int_0^\pi R^2(1 - \cos \alpha)^2 R d\alpha =$$

$$= 2R^3 \int_0^\pi \left(1 - 2\cos \alpha + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) d\alpha = 3\pi R^3,$$

$$EI\delta_{22} = 2 \int_0^\pi 1 \cdot R d\alpha = 2\pi R,$$

$$EI\delta_{12} = 2 \int_0^\pi -R(1 - \cos \alpha) \cdot 1 \cdot R d\alpha = -2\pi R^2,$$

$$\begin{cases} 3\pi R^3X_1 - 2\pi R^2X_2 + (\pi^2 + 4)mR^3 = 0 \\ -2\pi R^2X_1 + 2\pi RX_2 - mR^2\pi^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Rezolvind sistemul de ecuații (2), rezultă:

$$X_1 = -1,273 m; \quad X_2 = 0,297 mR;$$

Expresia momentului în secțiunea α pentru $0 < \alpha < \pi$ este:

$$M_\alpha = -mR\alpha + X_2 - X_1R(1 - \cos \alpha) =$$

$$= -mR\alpha + 0,297 mR + 1,273 mR(1 - \cos \alpha) =$$

$$= mR(1,57 - \alpha - 1,273 \cos \alpha).$$

Momentul are valori extreme în secțiunile date de expresia:

$$\frac{dM_\alpha}{d\alpha} = -1 + 1,273 \sin \alpha = 0,$$

adică

$$\sin \alpha = \frac{1}{1,273} = 0,78554; \alpha_1 = 51^\circ 46'; \alpha_2 = 128^\circ 14'.$$

$$M_{\alpha_1} = -0,12 \text{ mR}; M_{\alpha_2} = 0,12 \text{ mR}.$$

Variația momentului M_α este dată în figura 11.27, e.

11.28. Să se calculeze momentele pe reazeme, reacțiunile și să se construiască diagramele T , M la grinda din figura 11.28.

Rezolvare. S-a construit diagrama de momente M , a grinzilor static determinate, care dă:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{3Fl^2}{16}$$

Ecuatia celor trei momente, cu $M_1 = M_3 = 0$, este:

$$2M_2l + 6A_2 = 0,$$

$$M_2 = -\frac{3A_2}{2l} = -\frac{9Fl}{32}$$

Cunoscind această valoare, se construiește diagrama M , folosind principiul suprapunerii efectelor.

Reacțiunile sînt:

$$V_1 = \frac{F}{2} + \frac{M_2}{l} = \frac{F}{2} - \frac{9F}{32} = \frac{7F}{32},$$

$$V_2 = \frac{F}{2} + F - \frac{M_2}{l} - \frac{M_2}{l} = \frac{F}{2} + F + \frac{9F}{32} + \frac{9F}{32} = \frac{66F}{32},$$

$$V_3 = F + \frac{M_2}{l} = F - \frac{9F}{32} = \frac{23F}{32}.$$

Avînd aceste valori, se construiește diagrama forțelor tăietoare.

11.29. La grinda pe patru reazeme din figura 11.29, a se cere:

a) Să se afle momentele pe reazeme, reacțiunile și să se construiască diagramele T , M .

b) Să se dimensioneze grinda din oțel I, luînd $\sigma_a = 1400 \text{ daN/cm}^2$.

c) Dacă reazemul 2 suferă o denivelare pozitivă $f_2 = 1 \text{ cm}$, să se afle noile reacțiuni și noua distribuție a eforturilor.

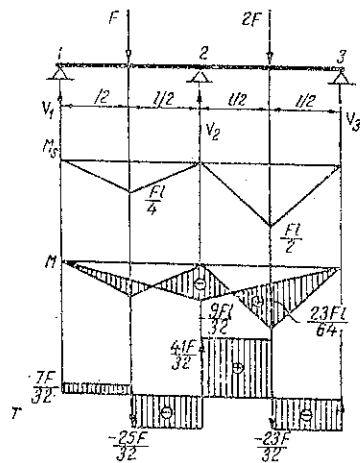


Fig. 11.28

Rezolvare. a) Din motive de simetrie, rezultă:

$$M_2 = M_3, M_1 = M_4 = 0.$$

Este suficient deci a scrie o singură ecuație a celor trei momente

$$M_1l + 2M_2(l + l) + M_3l + 6A_2 = 0.$$

Cu condițiile de mai sus, ecuația devine:

$$5M_2l + 6A_2 = 0.$$

Reacțiunea suprafețelor de momente pe reazemul 2, A_2 este datorită celor două parabole de pe intervalele adiacente, adică reprezintă suprafața unei parabole întregi:

$$A_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot l = \frac{pl^3}{12},$$

$$5M_2l + \frac{6pl^3}{12} = 0,$$

$$M_2 = M_3 = -\frac{pl^2}{10} \quad (1)$$

Reacțiunile sînt

$$V_1 = V_{1s} + \frac{M_2}{l} = \frac{pl}{2} -$$

$$-\frac{pl}{10} = \frac{4pl}{10} = V_4 \quad (2)$$

$$V_2 = V_{2s} - \frac{M_2}{l} = \frac{pl}{2} + \frac{pl}{2} + \frac{pl}{10} = \frac{11pl}{10} = V_3. \quad (3)$$

Cu aceste valori, se construiesc diagramele T , M din figurile 11.29 b și c.

b) Se dimensionează grinda la încovoiere:

$$M_{max} = \frac{pl^2}{10} = \frac{500 \cdot 2^2}{10} = 200 \text{ daNm},$$

$$W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{20000}{1400} = 14,28 \text{ cm}^3.$$

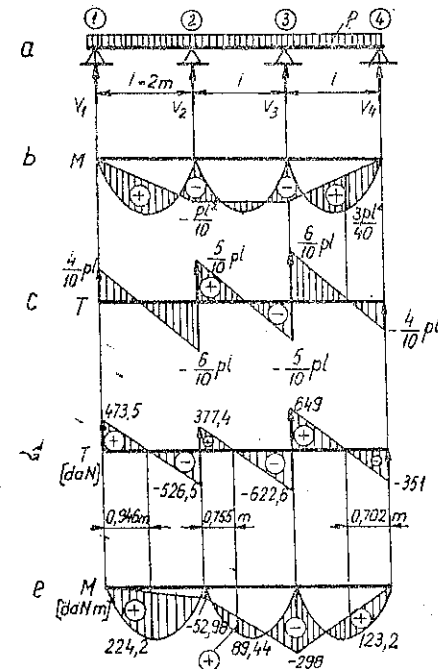


Fig. 11.29

Se alege profilul I8, cu $W_z = 19,5 \text{ cm}^3$ și $I_z = 77,8 \text{ cm}^4$ (anexa 9).
 c) Dacă reazemul 2 are o denivelare cunoscută f_2 , în rezolvarea problemei se aplică ecuația celor 3 momente sub forma (11.3):

$$\begin{cases} 2M_2 \cdot 2l + M_3 \cdot l + 6A_2 + 6EI \left(-\frac{2f_2}{l} \right) = 0, \\ M_2 l + 2M_3 \cdot 2l + 6A_2 + 6EI \left(\frac{f_2}{l} \right) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Înlocuind pe A_2 , sistemul de ecuații (4) devine:

$$\begin{cases} 4M_2 l + M_3 l + \frac{pl^3}{2} - 12EI \frac{f_2}{l} = 0, \\ M_2 l + 4M_3 l + \frac{pl^3}{2} + 6EI \frac{f_2}{l} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Soluțiile sistemului (5) sînt:

$$M_2 = -\frac{1}{10} pl^2 + \frac{18}{5} \frac{EI f_2}{l^2}, \quad M_3 = -\frac{1}{10} pl^2 - \frac{12}{5} \frac{EI f_2}{l^2}.$$

Înlocuind valorile numerice, se obține:

$$M_2 = -\frac{1}{10} 5 \cdot 200^2 + \frac{18}{5} \frac{2,1 \cdot 10^8 \cdot 77,8 \cdot 1}{200^2} = -5296 \text{ daNcm},$$

$$M_3 = -\frac{1}{10} 5 \cdot 200^2 - \frac{12}{5} \frac{2,1 \cdot 10^8 \cdot 77,8 \cdot 1}{200^2} = -29803 \text{ daNcm}.$$

Reacțiunile devin:

$$V_1 = V_{1s} + \frac{M_2}{l} = \frac{pl}{2} + \frac{M_2}{l} = \frac{5 \cdot 200}{2} - \frac{5296}{200} = 473,5 \text{ daN},$$

$$\begin{aligned} V_2 &= V_{2s} + \frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{M_3 - M_2}{l} = \frac{pl}{2} + \frac{pl}{2} - \frac{M_2}{l} + \frac{M_3 - M_2}{l} = \\ &= 5 \cdot 200 + \frac{5296}{200} + \frac{-29803 + 5296}{200} = 904 \text{ daN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= V_{3s} + \frac{M_2 - M_3}{l} + \frac{M_4 - M_3}{l} = pl + \frac{M_2 - M_3}{l} - \frac{M_3}{l} = \\ &= 5 \cdot 200 + \frac{-5296 + 29803}{200} + \frac{29803}{200} = 1271,5 \text{ daN}, \end{aligned}$$

$$V_4 = V_{4s} + \frac{M_3 - M_4}{l} = \frac{pl}{2} + \frac{M_3}{l} = \frac{5 \cdot 200}{2} - \frac{29803}{200} = 351 \text{ daN}.$$

Cu aceste valori se construiesc diagramele T și M din figurile 11.29, d și e.

11.30. Grinda din figura 11.30 este încărcată cu un cuplu exterior M_0 aplicat pe reazemul 3. Se cere să se calculeze reacțiunile, momentele pe reazeme și să se construiască diagramele T , M .

Rezolvare. Descompunind grinda în trei grinzi simplu rezemate la capete, se poate construi diagrama momentelor M_s , din care se calculează A_2 și A_3 :

$$A_2 = \frac{S_3}{l} = -\frac{1}{l} \cdot \frac{M_0 l}{2} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{M_0 l}{6}, \quad A_3 = \frac{S_2}{l} = -\frac{1}{l} \frac{M_0 l}{2} \frac{2l}{3} = -\frac{M_0 l}{3}.$$

Se scriu ecuațiile celor trei momente pentru grupele de reazeme 1-2-3 și 2-3-4:

$$\begin{cases} M_1 l + 4M_2 l + M_3 l + 6A_2 = 0, \\ M_2 l + 4M_3 l + M_4 l + 6A_3 = 0, \end{cases}$$

$$M_1 = M_4 = 0,$$

$$\begin{cases} 4M_2 + M_3 - M_0 = 0, \\ M_2 + 4M_3 - 2M_0 = 0. \end{cases}$$

Observație. Cuplul M_0 se consideră ca o încărcare exterioră aparținând grinzii 2-3 (ca în cazul acestei probleme) sau grinzii 3-4, efectul fiind același.

Rezolvarea sistemului dă momentele:

$$M_2 = \frac{2}{15} M_0, \quad M_3 = \frac{7}{15} M_0.$$

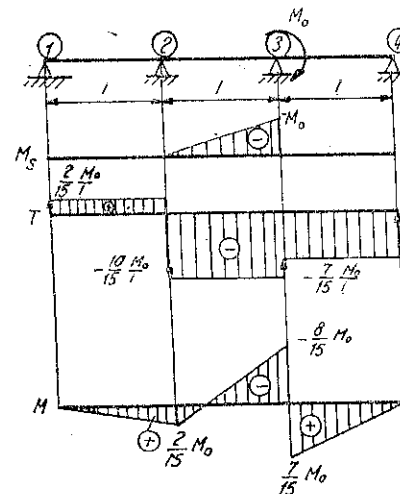


Fig. 11.30

Calculul reacţiunilor :

$$V_{1s} = 0; \quad V_{2s} = -\frac{M_0}{l}; \quad V_{3s} = \frac{M_0}{l}; \quad V_{4s} = 0,$$

$$V_1 = V_{1s} + \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{2}{15} \frac{M_0}{l},$$

$$V_2 = V_{2s} + \frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{M_3 - M_2}{l} = -\frac{M_0}{l} - \frac{2}{15} \frac{M_0}{l} +$$

$$+ \frac{1}{l} \left(\frac{7}{15} M_0 - \frac{2}{15} M_0 \right) = -\frac{12}{15} \frac{M_0}{l},$$

$$V_3 = V_{3s} + \frac{M_2 - M_3}{l} + \frac{M_4 - M_3}{l} = \frac{M_0}{l} +$$

$$+ \frac{1}{l} \left(\frac{2}{15} M_0 - \frac{7}{15} M_0 \right) - \frac{7}{15} \frac{M_0}{l} = \frac{3}{15} \frac{M_0}{l},$$

$$V_4 = V_{4s} + \frac{M_3 - M_4}{l} = \frac{7}{15} \frac{M_0}{l}.$$

Cu valorile calculate se construiesc diagramele T şi M din figura 11.30.

11.31. La grinda din figura 11.31, se cere să se calculeze reacţiunile, momentele pe reazeme şi să se construiască diagramele T , M .

Rezolvare. Se construieşte diagrama momentelor static determinate, care este un triunghi în intervalul 1-2. Se calculează :

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{16}; \quad A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 0.$$

Cunoscând că $M_1 = M_7 = 0$ şi ţinând seama de valorile de mai sus, se scriu ecuaţiile celor trei momente, pentru grupe de câte trei reazeme :

$$4M_2l + M_3l + 6\frac{Pl^2}{16} = 0; \quad M_2l + 4M_3l + M_4l = 0; \quad M_3l + 4M_4l + M_5l = 0;$$

$$M_4l + 4M_5l + M_6l = 0; \quad M_5l + 4M_6l = 0.$$

Făcând simplificările, sistemul de ecuaţii devine :

$$\begin{cases} 4M_2 + M_3 + \frac{3}{8} Pl = 0, \\ M_2 + 4M_3 + M_4 = 0, \\ M_3 + 4M_4 + M_5 = 0, \\ M_4 + 4M_5 + M_6 = 0, \\ M_5 + 4M_6 = 0. \end{cases}$$

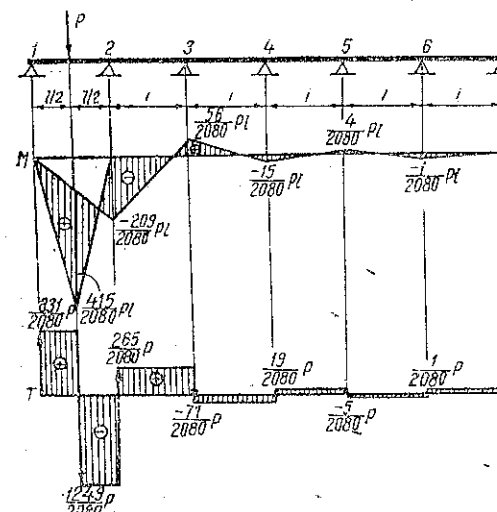


Fig. 11.31

Rezolvarea sistemului dă momentele :

$$M_2 = -\frac{209}{2080} Pl; \quad M_3 = -\frac{56}{2080} Pl; \quad M_4 = -\frac{15}{56} M_3 = -\frac{15}{2080} Pl,$$

$$M_5 = -\frac{4}{15} M_4 = -\frac{4}{2080} Pl; \quad M_6 = -\frac{1}{4} M_5 = -\frac{1}{2080} Pl.$$

Pentru calculul reacţiunilor, se scrie :

$$V_{1s} = V_{2s} = \frac{P}{2}; \quad V_{3s} = V_{4s} = V_{5s} = V_{6s} = V_{7s} = 0,$$

$$\frac{M_2 - M_1}{l} = -\frac{209}{2080} P; \quad \frac{M_3 - M_2}{l} = \frac{265}{2080} P,$$

$$\frac{M_4 - M_3}{l} = -\frac{71}{2080} P; \quad \frac{M_5 - M_4}{l} = \frac{19}{2080} P,$$

$$\frac{M_6 - M_5}{l} = -\frac{5}{2080} P; \quad \frac{M_7 - M_6}{l} = \frac{1}{2080} P,$$

$$V_1 = V_{1s} + \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{P}{2} - \frac{209}{2080} P = \frac{831}{2080} P,$$

$$V_2 = V_{2s} - \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{M_3 - M_2}{l} = \frac{P}{2} + \frac{209}{2080} P + \frac{265}{2080} P = \frac{1514}{2080} P,$$

$$V_3 = -\frac{M_3 - M_2}{l} + \frac{M_4 - M_3}{l} = -\frac{265}{2080} P - \frac{71}{2080} P = -\frac{336}{2080} P,$$

$$V_4 = -\frac{M_4 - M_3}{l} + \frac{M_5 - M_4}{l} = \frac{71}{2080} P + \frac{19}{2080} P = \frac{90}{2080} P,$$

$$V_5 = -\frac{M_5 - M_4}{l} + \frac{M_6 - M_5}{l} = -\frac{19}{2080} P - \frac{5}{2080} P = -\frac{24}{2080} P,$$

$$V_6 = -\frac{M_6 - M_5}{l} + \frac{M_7 - M_6}{l} = \frac{5}{2080} P + \frac{1}{2080} P = \frac{6}{2080} P,$$

$$V_7 = -\frac{M_7 - M_6}{l} = -\frac{1}{2080} P.$$

Cu valorile calculate, se construiesc diagramele T , M din figura 11.31. Se observă scăderea treptată și rapidă a efectului forței P , cu depărtarea de la punctul ei de aplicare.

Cea mai mare valoare a momentului încovoietor este în dreptul sarcinii P :

$$M_{max} = \frac{Pl}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{209}{2080} Pl \approx \frac{415}{2080} Pl.$$

11.32. Să se calculeze momentul din încastrare, reacțiunile și să se construiască diagramele T , M pentru grinda din figura 11.32.

Rezolvare: Pentru determinarea momentului din încastrare, se folosește formula (11.6). Pentru efectul forței F , care dă un moment în încastrare M'_1 , această formulă devine:

$$M'_1 = -F \frac{b(l^2 - b^2)}{2l^3}.$$

Pentru sarcina uniform distribuită, dacă se notează cu c lungimea pe care ea este aplicată și cu a și b coordonatele mijlocului ei, se găsește relația:

$$M''_1 = -\frac{pbc \left(l^2 - b^2 - \frac{c^2}{4} \right)}{2l^3}.$$

Momentul din încastrare este suma valorilor M'_1 și M''_1 .

În formula lui M'_1 , se înlocuiesc valorile:

$$F = 2 \text{ kN}; \quad b = 4 \text{ m}; \quad l = 5 \text{ m}.$$

În formula lui M''_1 se înlocuiesc:

$$p = 2 \text{ kN/m}; \quad b = 2 \text{ m}; \quad c = 2 \text{ m}; \quad l = 5 \text{ m}.$$

Se găsește momentul din încastrare:

$$M_1 = M'_1 + M''_1 = -2 \frac{4(5^2 - 4^2)}{2 \cdot 5^3} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \left(5^2 - 2^2 - \frac{2^2}{4} \right)}{2 \cdot 5^3} = -4,64 \text{ kNm}.$$

Pentru construirea diagramelor, se calculează reacțiunile static determinate, ca și cînd grinda ar fi simplă rezemată la capete:

$$V_{1s} = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2}{5} = 3,2 \text{ kN},$$

$$V_{2s} = 2 + 2 \cdot 2 - 3,2 = 2,8 \text{ kN}.$$

Momentele încovoietoare ale grinzii considerată static determinată, în secțiunile 1, 3, 4, 5, 2 sînt:

$$M_{1s} = 0; \quad M_{3s} = 3,2 \cdot 1 = 3,2 \text{ kNm}; \quad M_{4s} = 3,2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4,4 \text{ kNm};$$

$$M_{5s} = 2,8 \cdot 1 = 2,8 \text{ kNm}.$$

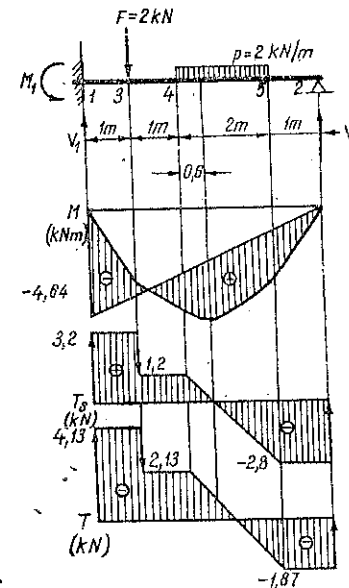


Fig. 11.32

Forțele tăietoare pentru aceeași grindă, considerată static determinată, sint :

$$T_{1s} = V_{1s} = 3,2 \text{ kN}; T'_{3s} = 3,2 \text{ kN}; T''_{3s} = 3,2 - 2 = 1,2 \text{ kN}; T_{4s} = 1,2 \text{ kN};$$

$$T_{6s} = 1,2 - 2 \cdot 2 = -2,8 \text{ kN}; T'_{2s} = -2,8 \text{ kN}; T''_{2s} = -2,8 + 2,8 = 0.$$

Se observă că forța tăietoare T_s se anulează undeva între secțiunile 4 și 5, unde diagrama M_s va avea un maxim. Se poate scrie ecuația forței tăietoare într-o secțiune oarecare x , unde x se măsoară începînd din secțiunea 4 :

$$T_{4ss} = 1,2 - px = 1,2 - 2x.$$

Anulînd această valoare, se află secțiunea cu moment maxim

$$x = 0,6 \text{ m}.$$

Momentul maxim, în această secțiune este :

$$M_{maxs} = 3,2(2 + 0,6) - 2(1 + 0,6) - \frac{2 \cdot 0,6^2}{2} = 4,76 \text{ kNm}.$$

Cu aceste valori, se trasează diagrama momentelor static determinate din figura 11.32, formată din linii drepte și o parabolă. S-a desenat, de asemenea, diagrama forțelor tăietoare T_s pentru grinda static determinată.

Suprapunînd triunghiul cu valoarea M_1 peste diagrama M_s , rezultă diagrama reală a momentelor încovoietoare, hașurată.

Reacțiunile în reazeme sint :

$$V_1 = V_{1s} - \frac{M_1}{l} = 3,2 + \frac{4,64}{5} = 4,13 \text{ kN};$$

$$V_2 = V_{2s} + \frac{M_1}{l} = 2,8 - \frac{4,64}{5} = 1,87 \text{ kN}.$$

Cunoscînd aceste valori, se construiește diagrama reală a forțelor tăietoare.

Aplicație. Să se determine secțiunea (cuprinsă între 3 și 4) în care momentul încovoietor se anulează. Să se determine secțiunea în care forța tăietoare T se anulează, calculîndu-se apoi valoarea momentului încovoietor maxim pozitiv.

11.33. Să se calculeze momentele pe reazeme, reacțiunile și să se construiască diagramele T , M la grinda din figura 11.33.

Rezolvare. Se înlocuiește încastrarea prin reazemele simple 0, 1.

Se desenează diagrama M_s din care rezultă :

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Fl}{2} \cdot \frac{2l}{2} = \frac{Fl^2}{4}.$$

Ecuațiile celor trei momente, pentru grupele de reazeme 0-1-2, 1-2-3, cu $M_0 = M_3 = 0$ și $A_1 = 0$ sint

$$2M_1l + M_2l = 0,$$

$$M_1l + 2M_2(l + 2l) + 6A_2 = 0,$$

$$2M_1 + M_2 = 0,$$

$$M_1 + 6M_2 + 6 \frac{Fl}{4} = 0.$$

Soluțiile sistemului de ecuații sint :

$$M_2 = -\frac{3Fl}{11}; \quad M_1 = \frac{3Fl}{22}. \quad (1)$$

Cu aceste valori, folosînd principiul suprapunerii efectelor, se construiește diagrama M .

Reacțiunile sint :

$$V_1 = 0 + \frac{M_2 - M_1}{l} = -\frac{9F}{22},$$

$$V_2 = \frac{F}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{M_3 - M_2}{2l} = \frac{F}{2} + \frac{3F}{11} + \frac{3F}{22} + \frac{3F}{22} = \frac{23F}{22},$$

$$V_3 = \frac{F}{2} - \frac{M_3 - M_2}{2l} = \frac{F}{2} - \frac{3F}{22} = \frac{8F}{22}.$$

11.34. Să se calculeze momentele din reazeme, reacțiunile și să se construiască diagramele T , M la grinda dublu încastrată din figura 11.34.

Rezolvare. Se aplică formulele (11.7) și (11.8) :

$$M_1 = -\frac{2}{l^2} \left[2 \frac{Fab(b+l)}{6} - \frac{Fab(a+l)}{6} \right]; \quad M_1 = -\frac{Fab^2}{l^2}. \quad (1)$$

Prin permutări rezultă :

$$M_2 = -\frac{Fa^2b}{l^2}. \quad (2)$$

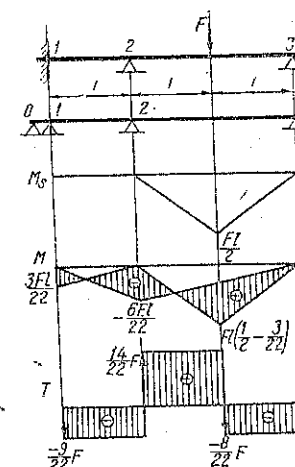


Fig. 11.33

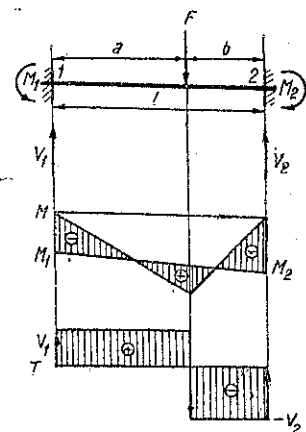


Fig. 11.34

Momentul static determinat în dreptul forței F are valoarea :

$$M_{max} = \frac{Fab}{l}$$

Reacțiunile sînt :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{1s} + \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{Fb}{l} + \frac{Fab}{l^3} (b - a) \\ V_2 &= V_{2s} - \frac{M_2 - M_1}{l} = \frac{Fa}{l} - \frac{Fab}{l^3} (b - a). \end{aligned} \quad (3)$$

Cu aceste valori, se construiesc diagramele din figura 11.34.

Aplicație. Să se refacă problema pentru cazul cînd forța F este aplicată în mijlocul grinzii.

Să se generalizeze problema pentru un număr oarecare de forțe.

11.35. O grindă încadrată, de lungime l , încărcată în capătul liber cu o forță P , reazemă pe jumătate din lungimea sa pe altă grindă încadrată, ca în figura 11.35. Ambele grinzi au aceeași rigiditate EI .

Se cere să se afle forța cu care cele două grinzi apasă una pe alta în capătul grinzii scurte și apoi să se construiască, separat, diagramele de momente încovoietoare ale celor două grinzi.

Rezolvare. Se admite că în poziția deformată grinzile rămîn în contact numai în încadrare și în capătul grinzii scurte, ca în figura 11.35, b. Se pot separa, prin introducerea forței X în punctul de contact (Fig. 11.35, c, și 11.35, d).

Valoarea forței X se află scriind că în punctul de aplicare al ei cele două grinzi, considerate cu același moment de inerție și din același material, au săgețile egale.

Pentru grinda lungă, săgeata în secțiunea 2 produsă numai de forța P este :

$$f_2 = \frac{P}{2EI} \left[l \left(\frac{l}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2} \right)^3 \right] = \frac{5Pl^3}{48EI}$$

La aceeași grindă, forța X mai dă, în secțiunea 2, o săgeată :

$$f_2'' = -\frac{X \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3EI} = -\frac{Xl^3}{24EI}$$

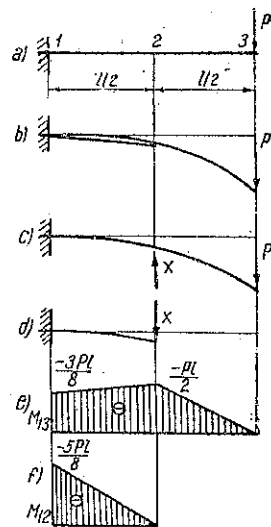


Fig. 11.35

La grinda de dedesubt, săgeata este :

$$f_2 = \frac{Xl^3}{24EI}$$

Se egalează săgețile celor două grinzi în secțiunea 2 :

$$\begin{aligned} f_2' - f_2'' &= f_2 \\ \frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{Xl^3}{24EI} &= \frac{Xl^3}{24EI} \end{aligned}$$

și rezultă :

$$X = \frac{5}{4} P.$$

Cunoscînd această valoare, se pot construi diagramele de momente ca în figurile 11.35, e și 11.35, f.

11.36. Să se calculeze reacțiunile, momentele în reazeme și să se construiască diagramele T , M la grinda dublu încadrată din figura 11.36.

Rezolvare. Se aplică ecuația celor trei momente, înlocuind încadrările prin cîte două reazeme și scriind relațiile :

$$\begin{aligned} M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 + 6A_1 &= 0; \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 + 6A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Se cunosc :

$$l_1 = l_3 = 0; \quad l_2 = l;$$

$$M_0 = M_3 = 0,$$

cu care sistemul de ecuații se reduce la :

$$\begin{aligned} 2M_1 l + M_2 l + 6A_1 &= 0; \\ M_1 l + 2M_2 l + 6A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Se scriu expresiile lui A_1 și A_2 , folosind diagrama de momente a grinzii static determinate din figura 11.36, c :

$$A_1 = \frac{S_2}{l} = \frac{-M_0 \frac{a}{l} \cdot \frac{a}{2} \left(b + \frac{a}{3} \right) + M_0 \frac{b}{l} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2b}{3}}{l} = \frac{M_0}{6l^2} (2b^3 - 3a^2b - a^3);$$

$$A_2 = \frac{S_1}{l} = \frac{-M_0 \frac{a}{l} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} + M_0 \frac{b}{l} \cdot \frac{b}{2} \left(a + \frac{b}{3} \right)}{l} = \frac{M_0}{6l^2} (-2a^3 + 3ab^2 + b^3).$$

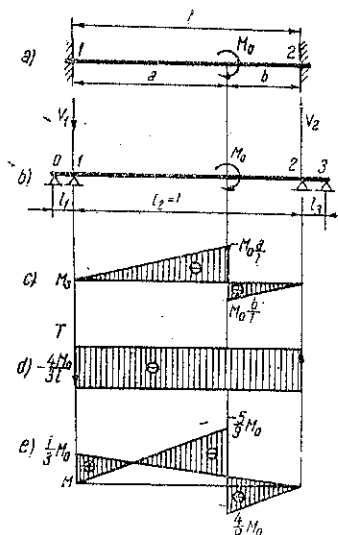


Fig. 11.36

Sistemul de ecuații (1) se transformă în:

$$\left. \begin{aligned} 2M_1 + M_2 + \frac{M_0}{l^3}(2b^3 - 3a^2b - a^3) &= 0; \\ M_1 + 2M_2 + \frac{M_0}{l^3}(-2a^3 + 3ab^2 + b^3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Rezolvînd sistemul se obțin:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{M_0}{l^3}(b^3 - 2a^2b - ab^2); \\ M_2 &= \frac{M_0}{l^3}(a^3 - 2ab^2 - a^2b). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Reacțiunile sînt:

$$V_1 = V_{1s} + \frac{M_2 - M_1}{l} = -\frac{M_0}{l} + \frac{M_0}{l^4}(a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + b^3). \quad (4)$$

Reacțiunea V_2 este egală și de sens contrar cu V_1 .

Aplicație. Să se construiască diagramele T , M în cazul particular

$$a = \frac{2}{3}l, \quad b = \frac{1}{3}l.$$

Înlocuind în ecuațiile (3) rezultă:

$$M_1 = -\frac{M_0}{l^3} \left[\left(\frac{l}{3} \right)^3 - 2 \left(\frac{2l}{3} \right)^2 \frac{l}{3} - \frac{2l}{3} \left(\frac{l}{3} \right)^2 \right] = -\frac{1}{3} M_0;$$

$$M_2 = \frac{M_0}{l^3} \left[\left(\frac{2l}{3} \right)^3 - 2 \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right)^2 - \left(\frac{2l}{3} \right)^2 \frac{l}{3} \right] = 0.$$

Reacțiunile sînt:

$$V_1 = -\frac{M_0}{l} + \frac{M_2 - M_1}{l} = -\frac{4M_0}{3l}; \quad V_2 = -V_1 = \frac{4M_0}{3l}.$$

Diagramele din figurile 11.36, d și 11.36, e sînt construite în acest caz particular.

În încăstrarea din stînga, momentul încovoietor are valoarea $M_1 = \frac{1}{3} M_0$.

În secțiunea a , există un moment încovoietor maxim negativ

$$M'_{max} = -\frac{2}{3} M_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} M_0 = -\frac{5}{9} M_0,$$

precum și un moment încovoietor maxim pozitiv:

$$M''_{max} = \frac{1}{3} M_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} M_0 = \frac{4}{9} M_0.$$

11.37. Să se calculeze reacțiunile, momentul în încăstrare și să se traseze diagramele T , M la grinda din figura 11.37.

Rezolvare. Sistemul este simplu static nedeterminat. Se utilizează metoda *Mohr-Maxwell* și se alege ca necunoscută static nedeterminată reacțiunea X_1 din reazemul 1. Sistemul de bază obținut prin înlăturarea reazemului 1 este reprezentat în figura 11.37, a . Ecuația care dă necunoscuta static nedeterminată este

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0, \quad (1)$$

de unde:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}. \quad (2)$$

Deoarece grinda are rigidități diferite pe porțiunile 1-2 și 2-3, calculul săgeților δ_{10} și δ_{11} se face analitic

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} M_{12}^0 m_{12} dx + \\ &+ \frac{1}{2EI} \int_{\frac{l}{2}}^l M_{23}^0 m_{23} dx, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} m_{12}^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_{\frac{l}{2}}^l m_{23}^2 dx. \quad (4)$$

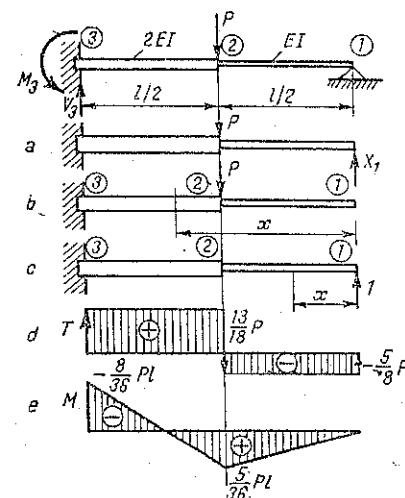


Fig. 11.37

Expresiile momentelor $M^0(x)$ și $m(x)$ se obțin pentru încărcările reprezentate în figurile 11.37, b, respectiv 11.37, c:

$$M_{12}^0(x) = 0; \quad M_{23}^0(x) = -P \left(x - \frac{l}{2} \right),$$

$$m_{12}(x) = x; \quad m_{23}(x) = x.$$

Introducând aceste expresii în relațiile (3) și (4) și efectuând integrarea se obține:

$$\delta_{10} = -\frac{5Pl^3}{96EI}, \quad (5)$$

$$\delta_{11} = \frac{9l^3}{48EI}. \quad (6)$$

Reacțiunea în reazemul 1 are valoarea:

$$V_1 = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{5P}{18}.$$

Momentul și reacțiunea din încastrare se obțin din ecuațiile de echilibru:

$$V_3 - P + V_1 = 0, \quad M_3 - P \frac{l}{2} + V_1 l = 0,$$

de unde rezultă

$$V_3 = \frac{13}{18}P, \quad M_3 = \frac{2}{9}Pl.$$

Diagramele de forțe tăietoare și momente încovoietoare sunt prezentate în figurile 11.37, d și 11.37, e.

11.38. Pentru grinda din figura 11.38, a, se cere să se calculeze reacțiunile, să se construiască diagramele T , M și să se scrie ecuația fibrei medii deformate. Grinda este neîncărcată, dar reazemul încastrat 1 suferă o rotire pozitivă de valoare α , iar reazemul 2 se deplasează pe verticală cu f_2 (Fig. 11.38, b).

Rezolvare. Din ecuațiile de echilibru rezultă:

$$V_1 = V_2 = \frac{M_1}{l}. \quad (1)$$

Se aplică metoda parametrilor inițiali:

$$EIv = EI v_1 + EI \varphi_1 x - M_1 \frac{x^2}{2} + V_1 \frac{x^3}{6}. \quad (2)$$

Înlocuind valoarea (1) în (2), rezultă:

$$EIv = EI v_1 + EI \varphi_1 x - \frac{M_1}{6} \left(3x^2 - \frac{x^3}{l} \right).$$

Condițiile pentru determinarea constantelor sunt:

$$x = 0; \quad v_1 = 0; \quad \varphi_1 = \alpha;$$

$$x = l; \quad v_2 = f_2,$$

$$EIF_2 = EI l \alpha - M_1 \frac{l^2}{3},$$

de unde,

$$M_1 = \frac{3EI(l\alpha - f_2)}{l^2}.$$

Ecuația (2) devine:

$$v = \alpha x - \frac{(l\alpha - f_2)}{2l^2} \left(3x^2 - \frac{x^3}{l} \right). \quad (3)$$

Observație: Dacă $\alpha = 0$, relația (3) devine:

$$v = \frac{f_2}{2l^2} \left(3x^2 - \frac{x^3}{l} \right) = \frac{3f_2 x^2}{2l^2} \left(1 - \frac{x}{3l} \right),$$

iar pentru $f_2 = 0$ și $\alpha \neq 0$, se obține:

$$v = \alpha x - \frac{\alpha}{2l} \left(3x^2 - \frac{x^3}{l} \right) = \frac{3\alpha}{l} \left(\frac{lx}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6l} \right).$$

Cunoscând expresia momentului M_1 , reacțiunile sunt:

$$V_1 = V_2 = \frac{3EI(l\alpha - f_2)}{l^3}.$$

Diagramele M și T sunt date în figura 11.38, c.

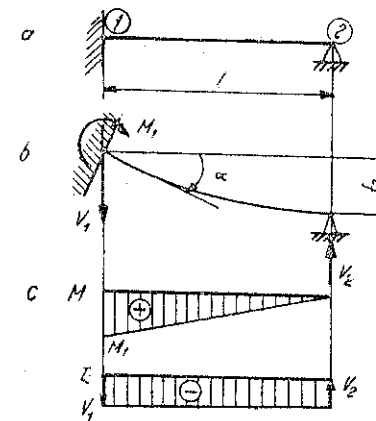


Fig. 11.38

11.39. La grinda BC , pe care se sprijină grinda continuă $1-2-3$, solicitată ca în figura 11.39, a , se cere să se traseze diagramele T și M .

Rezolvare. Reazemele grinzii continue $1-2-3$ se vor deplasa pe verticală, datorită deformației grinzii BC . Deci grinda $1-2-3$ este o grindă continuă pe reazeme elastice (Fig. 11.39, b) și aplicând relația (11.4) se obține:

$$4M_2l + 6A_2 + 6EI \left(\frac{f_1 - f_2}{l} + \frac{f_3 - f_2}{l} \right) = 0. \quad (1)$$

Din figura 11.39, d se obține:

$$A_2 = 2 \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{8}.$$

Din cauza simetriei, deplasarea f_1 a reazemului 1 este egală cu cea a reazemului 3 și relația (1) devine:

$$4M_2l + 6 \frac{Pl^2}{8} + 6EI \cdot 2 \cdot \frac{f_1 - f_2}{l} = 0. \quad (2)$$

Pentru rezolvarea ecuației (2), trebuie calculate deplasările f_1 și f_2 , ale reazemelor 1 și 2 , deci deformațiile grinzii $B-C$ în aceste puncte.

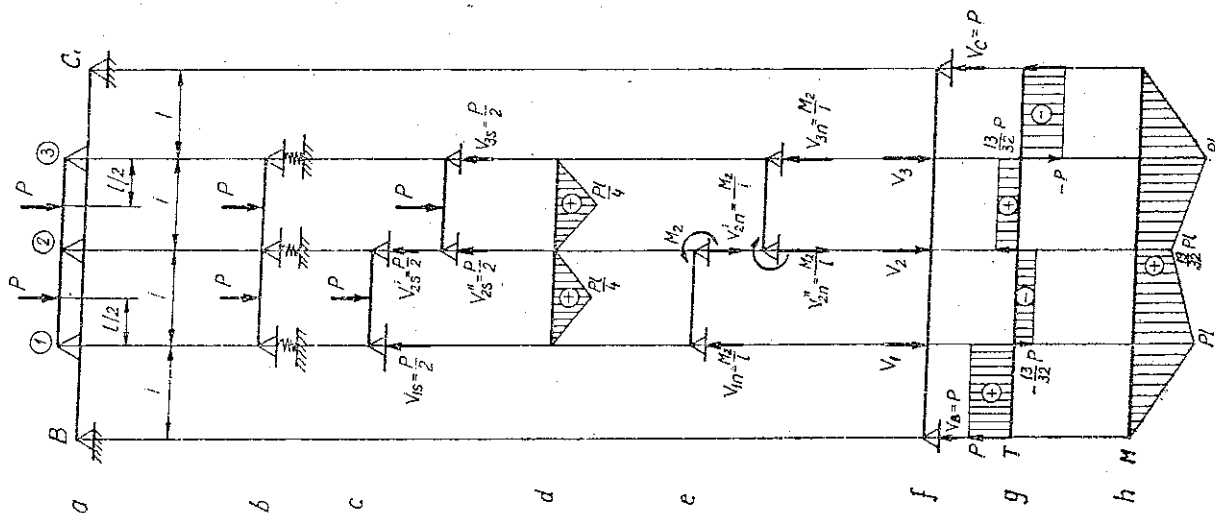


Fig. 11.39

Încărcarea grinzii $B-C$ este formată din reacțiunile V_1 , V_2 și V_3 ale grinzii continue $1-2-3$ (Fig. 11.39, f). Deformațiile grinzii $B-C$ în punctele 1 , 2 , 3 se calculează folosind relația (v. problema 10.9):

$$v_i = \frac{Pa_i b_i}{6EI l} (l^2 - a_i^2 - b_i^2)$$

și aplicând principiul suprapunerii efectelor:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{V_1 l \cdot 3l}{6EI \cdot 4l} (16l^2 - l^2 - 9l^2) + \frac{V_2}{6EI \cdot 4l} l \cdot 2l (16l^2 - l^2 - 4l^2) + \\ &+ \frac{V_3 l \cdot l}{6EI \cdot 4l} (16l^2 - l^2 - l^2) = \frac{l^3}{12EI} (16V_1 + 11V_2) = f_3, \\ f_2 &= \frac{V_1 \cdot l \cdot 2l}{6EI \cdot 4l} (16l^2 - l^2 - 4l^2) + \frac{V_2 \cdot 2l \cdot 2l}{6EI \cdot 4l} (16l^2 - 4l^2 - 4l^2) + \\ &+ \frac{V_3 \cdot 2l \cdot l}{6EI \cdot 4l} (16l^2 - 4l^2 - l^2) = \frac{l^3}{12EI} (22V_1 + 16V_2). \end{aligned}$$

Reacțiunile V_1 și V_2 se calculează în funcție de încărcarea exterioră și momentul M_2 prin însumarea reacțiunilor din figurile 11.39, c și e .

$$V_1 = V_{1s} + V_{1n} = \frac{P}{2} + \frac{M_2}{l}; \quad V_2 = V_{2s} + V_{2n}' + V_{2n}'' = P - 2 \frac{M_2}{l}.$$

$$\text{Rezultă: } f_1 = \frac{l^3}{12EI} \left(19P - 6 \frac{M_2}{l} \right); \quad f_2 = \frac{l^3}{12EI} \left(27P - 10 \frac{M_2}{l} \right). \quad (3)$$

Înlocuind relația (3) în (2), se obține:

$$4M_2l + \frac{6Pl^2}{8} + 6EI \cdot \frac{2l^3}{12EI} \left(4 \frac{M_2}{l} - 8P \right) \frac{1}{l} = 0, \quad M_2 = \frac{29}{32} Pl.$$

Cu expresia lui M_2 , reacțiunile devin:

$$V_1 = V_3 = \frac{45}{32} P; \quad V_2 = -\frac{26}{32} P.$$

Cunoscând încărcarea grinzii $B-C$ se trasează diagramele T și M , reprezentate în figurile 11.39, g și h .

C. PROBLEME NEREZOLVATE

11.40. Sistemul de trei bare articulate este solicitat cu forța P ca în figura 11.40. Se cere să se determine deplasarea pe verticală a punctului de aplicare al forței.

Răspuns:
$$v = \frac{P \cdot h}{2EA(1 + \cos^2 \alpha)}$$

11.41. Să se calculeze efortul în bara 1 a sistemului din figura 11.41. Barele sînt din același material, cu modulul de elasticitate E , au lungimea l , iar ariile secțiunilor transversale sînt: $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = 3A$.

Răspuns:
$$N_1 = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{2(1 + 3 \sin^2 \alpha)}$$

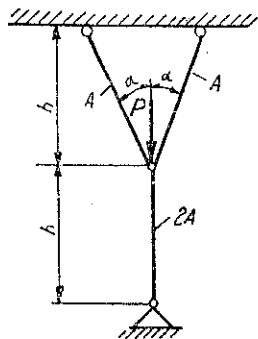


Fig. 11.40

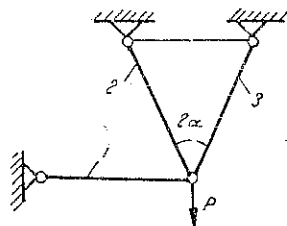


Fig. 11.41

11.42. Să se calculeze eforturile care se produc în tiranții 2-4 și 2-5 (Fig. 11.42) ce susțin grinda 1-2-3, încărcată cu o sarcină uniform repartizată p .

Răspuns:
$$N_{24} = N_{25} = \frac{5\sqrt{3} pl}{12 \left(1 + \frac{4I}{Al^2} \right)}$$

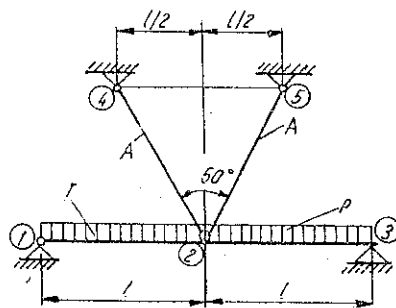


Fig. 11.42

11.43. Să se construiască diagrama de momente încovoietoare pentru cadrul din figura 11.43, a, dacă raportul dintre momentul de inerție al riglei și momentul de inerție al stîlpului este 3, iar deschiderea l a grinzii este de două ori cit înălțimea stîlpului.

Răspuns:
$$M_3 = M_0, \quad M_2 = -\frac{M_0}{5}, \quad M_1 = 0.$$

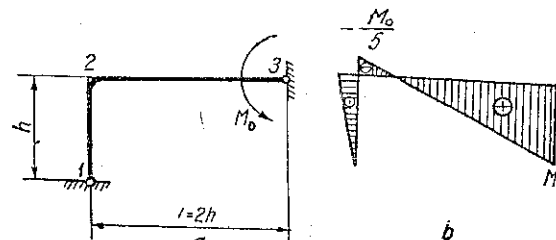


Fig. 11.43

Diagrama de momente încovoietoare este dată în figura 11.43, b. 11.44. La cadrul din figura 11.44 se cere să se calculeze reacțiunile.

Răspuns:
$$H_1 = H_2 = \frac{9}{38} P;$$

$$V_1 = \frac{29}{76} P; \quad V_2 = \frac{47}{76} P.$$

11.45. Să se calculeze reacțiunile la cadrul din figura 11.45.

Răspuns:
$$V_1 = V_2 = \frac{7}{16} \frac{M_0}{l}, \quad H_1 = H_2 = \frac{1}{16} \frac{M_0}{l}.$$

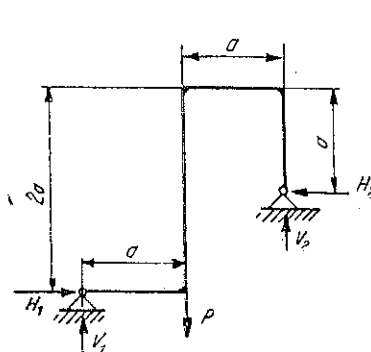


Fig. 11.44

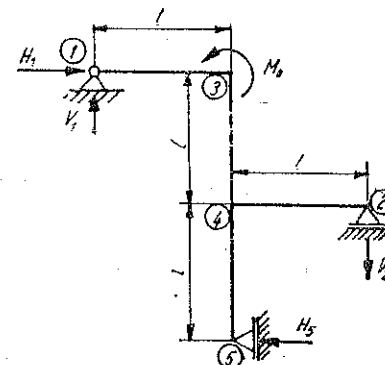


Fig. 11.45

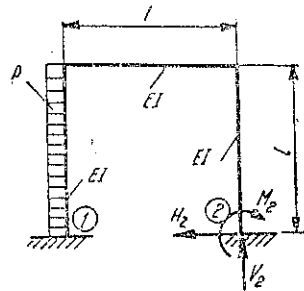


Fig. 11.46

11.46. La cadrul din figura 11.46 se cere să se calculeze reacțiunile din încastrarea 2.

$$\text{Răspuns: } H_2 = \frac{35}{42.44} pl;$$

$$V_2 = \frac{1}{7} \cdot pl; \quad M_2 = \frac{3}{7.132} pl^2.$$

11.47. Să se construiască diagrama de momente încovoietoare din barele cadrului din figura 11.47, a, atunci când articulația 2 se tacează cu 0,8 cm pe verticală, dacă

se cunosc: secțiunea stâlpilor: $30 \times 40 \text{ cm}^2$; secțiunea riglelor: $30 \times 80 \text{ cm}^2$; $E = 240\,000 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns: $M_s = 294 \text{ kNm}$.

Diagrama de momente încovoietoare este desenată în figura 11.47, b.

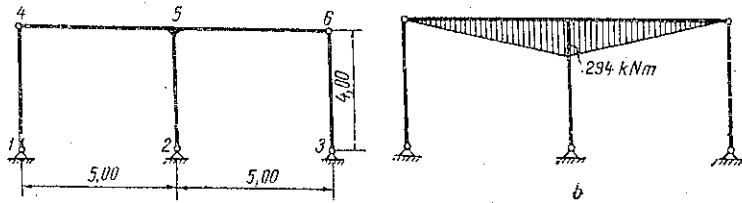


Fig. 11.47

11.48. Un cadru cu două articulații suportă sarcini triunghiulare în lungul stâlpilor datorită presiunii apei din două rezervoare (Fig. 11.48, a).

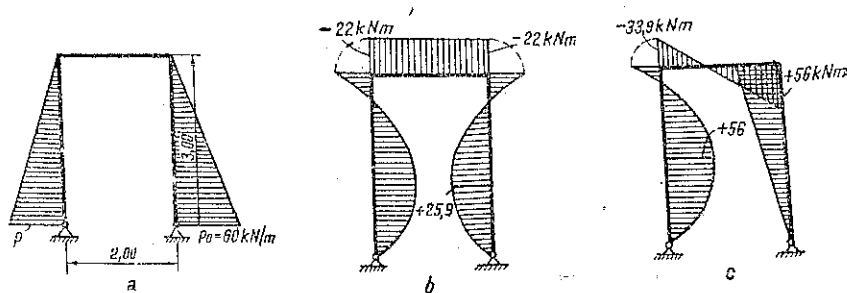


Fig. 11.48

Să se construiască diagrama de momente încovoietoare:

1) când ambele rezervoare sînt pline;

2) când unul din rezervoare este plin și celălalt este gol.

Se dau: $p_0 = 60 \text{ kN/m}$; secțiunea stâlpilor: $30 \times 60 \text{ cm}^2$; secțiunea riglei: $30 \times 80 \text{ cm}^2$.

Răspuns: Pentru cazul 1) a se vedea figura 11.48, b, pentru cazul 2) — figura 11.48, c.

11.49. Să se construiască diagrama de momente pentru cadrul închis din figura 11.49, a.

Răspuns: Diagrama de momente este dată în figura 11.49, b.

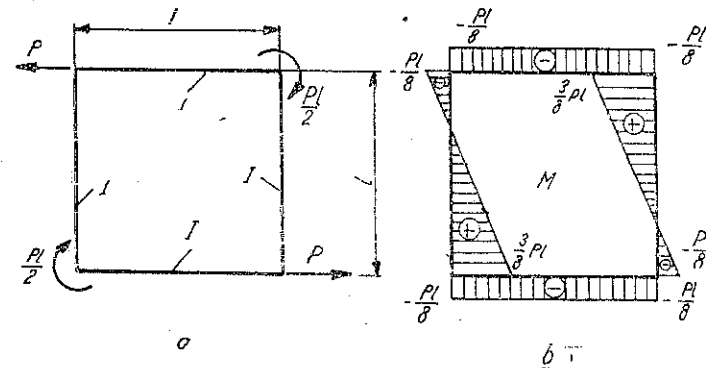


Fig. 11.49

11.50. La sistemul de bare din figura 11.50, format dintr-o bară dreaptă și o bară curbă, se cere să se calculeze reacțiunea pe verticală a reazemului I.

$$\text{Răspuns: } V_1 = \frac{3(29 + 42\pi)}{2(52 + 81\pi)} pR.$$

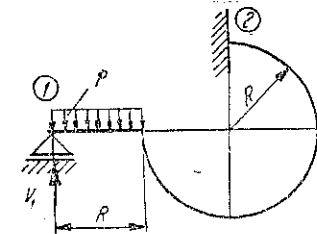


Fig. 11.50

11.51. La bara din figura 11.51, cu valorile numerice: $P = 1\,200 \text{ daN}$; $R = 10 \text{ cm}$; $a = 30 \text{ cm}$; $d = 4 \text{ cm}$, se cere să se calculeze momentul încovoietor maxim și efortul unitar maxim în secțiunea cea mai solicitată.

Răspuns: Momentul maxim este în secțiunea unde se aplică forțele P:

$$M_{\max} = -4\,890 \text{ daN cm}.$$

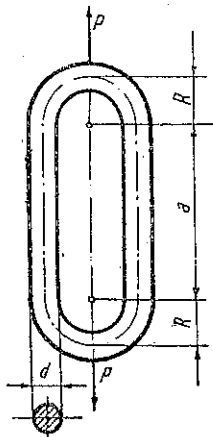


Fig. 11.51

În această secțiune se produc eforturile unitare: — în interior $\sigma = -926 \text{ daN/cm}^2$; — în exterior $\sigma = 682 \text{ daN/cm}^2$. În porțiunea rectilinie a barei, momentul încovoietor este constant, de valoare $M = 1100 \text{ daNm}$, iar eforturile unitare ce se produc sînt inferioare celor din partea curbă.

11.52. Să se construiască diagrama de momente încovoietoare pentru inelul din figura 11.52 asupra căruia se aplică cuplurile M_0 .

$$\text{Răspuns: } N_1 = -N_3 = 0,637 \frac{M_0}{R},$$

$$M_1 = -M_3 = 0,137 M_0,$$

$$M_2 = M_4 = \pm 0,5 M_0.$$

11.53. Să se calculeze eforturile în secțiunea I, pentru inelul solicitat cu cupluri uniforme distribuite ca în figura 11.53.

Răspuns: Încărcarea fiind antisimetrică, secționînd inelul prin punctul I, apare în acest punct numai o forță tăietoare $T = 2 m$.

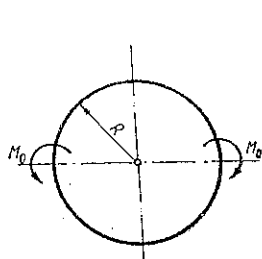


Fig. 11.52

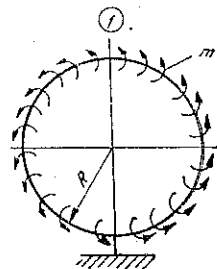


Fig. 11.53

11.54. Grinda continuă din figura 11.54, a este încărcată cu un cuplu exterior M_0 aplicat pe reazemul 3. Se cere să se traseze diagramele T și M .

Răspuns: Diagramele T și M sînt date în figurile 11.54, b și c.

11.55. La grinda continuă din figura 11.55, se cere să se calculeze momentele pe reazeme.

$$\text{Răspuns: } M_1 = 0; M_2 = -\frac{5}{91} M_0;$$

$$M_3 = \frac{3}{182} M_0, M_4 = 0.$$

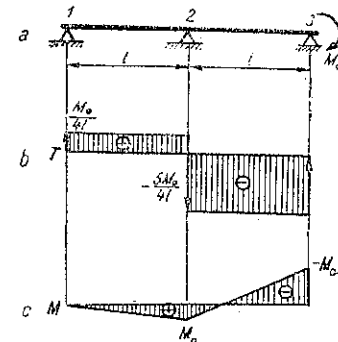


Fig. 11.54

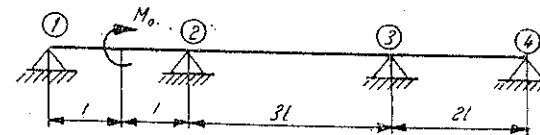


Fig. 11.55

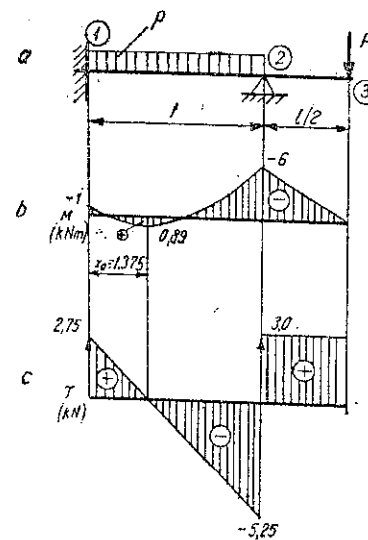


Fig. 11.56

11.56. Să se calculeze momentele pe reazeme, reacțiunile și să se construiască diagramele T , M la grinda din figura 11.56, a, în cazul aplicării numerice $p = 2 \text{ kN/m}$, $F = 3 \text{ kN}$ și $l = 4 \text{ m}$.

Răspuns: Diagramele M , T sînt date în figurile 11.56, b, c.

11.57. Pentru grinda din figura 11.57, se cere să se determine: a) unghiul φ_2 al fibrei medii deformată pe reazemul 2; b) secțiunea x_1 unde se produce o săgeată $\frac{1}{2} f_2$, dacă reazemul 2 se deplasează pe verticală cu cantitatea f_2 .

$$\text{Răspuns: } \text{tg } \varphi_2 = \frac{3f_2}{2l}, x_1 = 0,65l.$$

Indicație. Se folosesc rezultatele de la problema 11.38.

11.58. Să se determine momentele pe reazeme, reacțiunile și să se construiască diagramele T , M , pentru grinda din figura 11.58.

$$\text{Răspuns: } M_1 = \frac{pa^2}{52}; \quad M_2 = -\frac{pa^2}{26}; \quad M_3 = \frac{7pa^2}{52}; \quad M_4 = -\frac{pa^2}{2};$$

$$V_1 = -\frac{3pa^2}{52l}; \quad V_2 = \frac{12pa^2}{13l}; \quad V_3 = -\frac{42pa^2}{26l}; \quad V_4 = pa + \frac{33pa^2}{52l}.$$

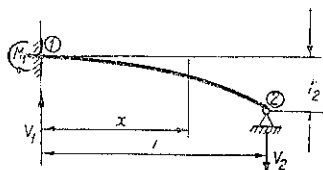


Fig. 11.57

11.59. Să se calculeze reacțiunile, momentul din încastrare și să se construiască diagramele T , M la grinda din figura 11.59, dacă reazemul 2 este așezat pe un teren elastic și se denivelează proporțional cu sarcina, adică $f_2 = \frac{1}{k} V_2$. Aplicație numerică pentru: $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm²,

$$I = 5000 \text{ cm}^4, \quad l = 6 \text{ m}, \quad p = 10 \text{ kN/m}, \quad k = \frac{24 EI}{l^3}.$$

$$\text{Răspuns: } V_1 = 4000 \text{ daN}, \quad V_2 = 2000 \text{ daN}, \quad M_1 = -6000 \text{ daNm}.$$

11.60. Să se calculeze momentele M_1 , M_2 , reacțiunile V_1 , V_2 și să se construiască diagramele T , M pentru grinda din figura 11.60.

Răspuns: Se găsesc:

$$M_1 = -\frac{qc}{l^2} \left[ab^2 - \frac{c^2}{12} (2b - a) \right];$$

$$M_2 = -\frac{qc}{l^2} \left[a^2b - \frac{c^2}{12} (2a - b) \right];$$

$$V_1 = \frac{qcb}{l} + \frac{M_2 - M_1}{l}; \quad V_2 = \frac{qca}{l} - \frac{M_2 - M_1}{l}.$$

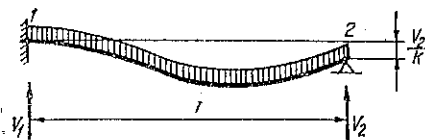


Fig. 11.59

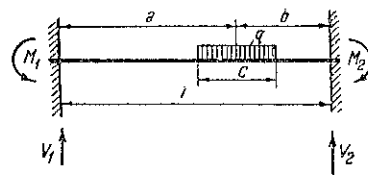


Fig. 11.60

11.61. Să se afle momentele din reazeme, reacțiunile și să se construiască diagramele T , M la grinda din figura 11.61.

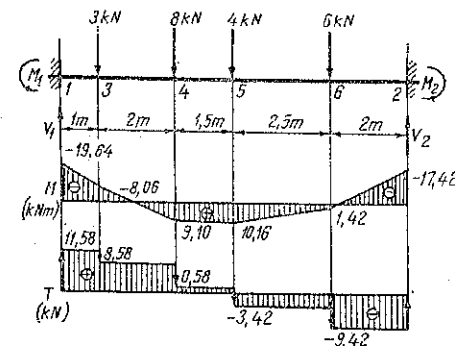


Fig. 11.61

Indicație. Momentele din reazeme se determină prin generalizarea formulelor (1) și (2) de la problema 11.34, notînd cu a_i și b_i distanțele diferitele forțe la reazemele 1 și 2.

Răspuns: Diagramele T și M sînt date în figura 11.61.

STABILITATEA ECHILIBRULUI ELASTIC AL BARELOR DREPT

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Coeficientul de zvelteță, λ , se calculează cu relația

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} \quad (12.1)$$

unde

l_f este lungimea de flambaj;
 $i_{\min}$ — raza minimă de inerție a secțiunii

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \quad (12.2)$$

în care

$I_{\min}$ este momentul de inerție minim al secțiunii;
 A — aria secțiunii transversale.

2. Efortul unitar critic de flambaj, σ_f , variază în funcție de coeficientul de zvelteță, λ , ca în figura 12. a.

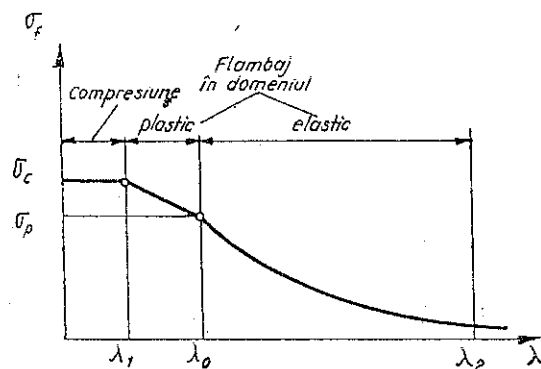


Fig. 12. a

3. Pentru valori ale lui λ superioare celei din tabelul 12.1, efortul unitar critic de flambaj se calculează cu formula lui Euler:

$$\sigma_f = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (12.3)$$

Nu se admit bare cu $\lambda > \lambda_2$ (pentru OL 37, $\lambda_2 = 150$).

4. Pentru valori cuprinse între λ_1 și λ_0 (tab. 12.1) efortul unitar critic de flambaj, σ_f , se calculează cu formulele *Tetmajer-Iasinski*, date în tabelul 12.1.

Tabelul 12.1

Materialul	λ_1	λ_0	Formula <i>Tetmajer-Iasinski</i> (daN/cm ²)
OL 37	60	105	$\sigma_f = 3\,040 - 11,2 \lambda$
OL 50	60	89	$\sigma_f = 3\,285 - 6,1 \lambda$
Otel cu 5% Ni	—	86	$\sigma_f = 4\,610 - 22,5 \lambda$
Lemn.	—	100	$\sigma_f = 287 - 1,9 \lambda$
Fontă	—	80	$\sigma_f = 7\,610 - 118 \lambda + 0,52 \lambda^2$

Valoarea lui σ_f dată de formulele *Tetmajer-Iasinski*, se limitează la valoarea limitei de curgere σ_c , dacă formula dă valori superioare acestora.

5. Pentru valori $\lambda < \lambda_1$, se consideră că bara nu flambează, calculul făcându-se la compresiune simplă:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (12.4)$$

6. Sarcina critică de flambaj a unei bare drepte solicitată la compresiune, dacă $\lambda > \lambda_0$, se calculează cu formula lui Euler și are expresia:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_f^2} \quad (12.5)$$

Lungimea de flambaj l_f este:

- $l_f = 2l$ la bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt;
- $l_f = l$ la bara articulată la ambele capete;
- $l_f \approx 0,7l$ la bara încastrată la un capăt și articulată la celălalt;
- $l_f = 0,5l$ la bara încastrată la ambele capete.

7. Dacă $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$, sarcina critică de flambaj este dată de relația:

$$P_f = \sigma_f \cdot A, \quad (12.6)$$

unde

σ_f se calculează în funcție de material, cu relațiile din tabelul 12.1.

8. Coeficientul de siguranță la flambaj este:

$$c = \frac{\sigma_f}{\sigma} = \frac{P_f}{P} \quad (12.7)$$

unde

σ_f și P_f se calculează, în funcție de valorile lui λ , cu relațiile arătate mai sus;

σ este efortul unitar de compresiune

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (12.8)$$

P este forța care solicită bara.

Valori ale coeficientului de siguranță c pentru piese de mașini și elemente de construcții sint date în tabelul 12.2.

Tabelul 12.2

Piesa		c
Tija pistonului	Mașini cu un cilindru	8...12
	Mașini cu un cilindru și contratiță; mașini cu doi cilindri	4... 8
Biela	Mașini termice mari	14...28
	Motoare de automobil	4... 5,5
Elemente de construcții din:	oțel	1,8... 3
	fontă	5... 5,5
	lemn	2,8... 3,2

9. Forța reală cu care se încarcă o bară, ce ar putea fi în pericol de flambaj, are expresia:

$$P = \frac{P_f}{c}, \quad (12.9)$$

în care, P_f se calculează cu relația (12.5) sau (12.6).

10. Pentru construcții metalice se dau o serie de prescripții speciale de calcul în STAS 763-66.

Efortul capabil al unei bare simple comprimate este dat de relația:

$$P = \varphi \sigma_a A, \quad (12.10)$$

în care coeficientul φ , funcție de λ , este dat în anexa 10 la sfârșitul volumului.

Dimensionarea la flambaj este dată de aceeași formulă, pusă sub forma

$$A_{nec} = \frac{P}{\varphi \sigma_a}, \quad (12.11)$$

Aceeași formulă servește la verificare:

$$\sigma_\varphi = \frac{P}{\varphi A_{ef}}, \quad (12.12)$$

unde σ_φ este efortul unitar de flambaj, care trebuie să fie egal sau inferior rezistenței admisibile.

11. Momentul încovoietor critic de flambaj lateral în domeniul elastic pentru o bară în consolă are expresia:

$$M_c = \frac{\pi}{2l} \sqrt{EI_y \cdot GI_t}. \quad (12.13)$$

B. PROBLEME REZOLVATE

12.1. O bară de oțel are secțiunea circulară cu $d = 5$ cm, materialul avind limita de proporționalitate $\sigma_p = 2100$ daN/cm². Să se calculeze ce lungime poate avea bara, ca ea să se afle la limita de aplicabilitate a formulei lui Euler. Bara se consideră articulată la ambele capete.

Rezolvare. În formula (12.3), luind $\sigma_f = \sigma_p$, și $\lambda = \lambda_0$ se află

$$\lambda_0^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_p} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{2100} = 9860; \quad \lambda_0 = 99,3 \approx 100 = \frac{l_f}{i_{min}}$$

La secțiunea circulară:

$$i_{min} = i = \frac{d}{4} = \frac{5}{4} \text{ cm}; \quad l_f = \lambda_0 i_{min} = 100 \cdot \frac{5}{4} = 125 \text{ cm} = l.$$

12.2. Să se calculeze sarcina critică de flambaj pentru un stîlp de fontă de secțiune melară, avind diametrul exterior $D = 90$ mm și diametrul interior $d = 60$ mm. Stîlpul se poate construi în două variante: a) încastrat la un capăt și liber la celălalt; b) articulată la ambele capete. Se dă înălțimea stîlpului $l = 2$ m, modulul de elasticitate $E = 1,2 \cdot 10^6$ daN/cm².

$$\text{Rezolvare.} \quad A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (9^2 - 6^2) = 35,34 \text{ cm}^2,$$

$$I = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi (9^4 - 6^4)}{64} = 258,44 \text{ cm}^4,$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{258,44}{35,34}} = 2,7 \text{ cm}.$$

Varianta a)

$$l_f = 2l = 400 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{400}{2,7} = 148.$$

Se folosește relația (12.5), întrucît, conform tabelului 12.1 (unde $\lambda_0 = 80$) este aplicabilă formula lui Euler:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_f^2} = \frac{3,14^2 \cdot 1,2 \cdot 10^6 \cdot 258,44}{400^2} = 19130 \text{ daN}.$$

Varianta b)

$$l_f = l = 200 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{200}{2,7} = 74.$$

Se aplică formula *Tetmajer-Iasinski*, λ fiind mai mic decât λ_0 .

$$\sigma_r = 7610 - 118 \lambda + 0,52 \lambda^2 = 7610 - 118 \cdot 74 + 0,52 \cdot 74^2 = 1725 \text{ daN/cm}^2.$$

$$P_f = \sigma_r \cdot A = 1725 \cdot 35,34 = 60\,961 \text{ daN}.$$

12.3. Un stîlp de lemn, avînd secțiunea pătrată cu latura $a = 12 \text{ cm}$ și lungimea liberă $l = 4 \text{ m}$, este sprijinit lateral prin 4 contrafișe și încastrat în pămînt la partea inferioară, ca în figura 12.3. Să se determine sarcina critică de flambaj, considerînd că întreaga forță este preluată de stîlp.

Rezolvare. Stîlpul se consideră articulat la un capăt și încastrat la celălalt.

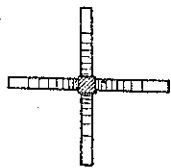
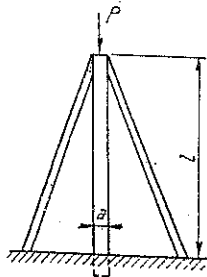


Fig. 12.3

$$l_f \approx 0,7 l = 2,8 \text{ m};$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{12}{12}}{a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{12}{\sqrt{12}} = 3,47 \text{ cm};$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{280}{3,47} = 80,6 < 100.$$

Se aplică formula *Tetmajer-Iasinski* din tabelul 12.1:

$$\sigma_r = 287 - 1,9 \lambda = 287 - 1,9 \cdot 80,6 = 134 \text{ daN/cm}^2;$$

$$P_f = A \sigma_r = 12^2 \cdot 134 = 19\,300 \text{ daN}.$$

12.4. Să se calculeze forța de compresune P , capabilă de a fi preluată de un stîlp din oțel, cu secțiunea din figura 12.4 și lungimea $l = 100 \text{ cm}$, articulat la ambele capete, fără a exista pericol de flambaj.

Se dă: $a = 2 \text{ cm}$, $c = 4$, $\lambda_0 = 105$,
 $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$, $\sigma_r = 3\,040 - 11,2 \lambda$.

Rezolvare. $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}}$; $l_f = l$; $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$,

$$I_{min} = I_y = \frac{4a \cdot a^3}{12} + 2 \frac{a(3a)^3}{12} = 4,83 a^4; A = 10a^2;$$

$$i_{min} = a \sqrt{\frac{4,83}{10}} = 1,39 \text{ cm},$$

$$\lambda = \frac{100}{1,39} = 72 < \lambda_0.$$

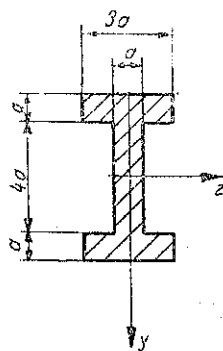


Fig. 12.4

Rezultă:

$$\sigma_r = 3\,040 - 11,2 \cdot 72 = 2\,234 \text{ daN/cm}^2;$$

$$P_{cap} = \frac{\sigma_r \cdot A}{c} = \frac{2\,234 \cdot 10 \cdot 4}{4} = 22\,340 \text{ daN}.$$

12.5. Să se calculeze coeficientul de siguranță pentru bara 3 a sistemului din figura 12.5, a. Secțiunea barei 3 este formată din două corniere $L 50 \times 50 \times 5$ ce pot fi așezate ca în figurile 12.5, b și c. Materialul barei este OL 37, avînd $\lambda_0 = 105$. Se dă $P = 13\,000 \text{ daN}$, $\alpha = 30^\circ$.

Rezolvare. Forța care solicită bara 3 a fost calculată la problema 11.40:

$$N_3 = \frac{P}{\cos^3 \alpha + 1} = \frac{13\,000}{\cos^3 30^\circ + 1} = 7\,878 \text{ daN}.$$

Din anexa 6, pentru o cormieră $L 50 \times 50 \times 5$ (Fig. 12.5, d) se găsește $I_z = I_y = 11 \text{ cm}^4$; $I_x = 17,4 \text{ cm}^4$; $A = 4,8 \text{ cm}^2$; $e = 1,4 \text{ cm}$.

Pentru secțiunea din figura 12.5, b:

$$I_{min} = I_z = 2 \cdot 11 = 22 \text{ cm}^4; i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{22}{2 \cdot 4,8}} = 1,51 \text{ cm}.$$

Bara 3 este articulată la ambele capete, $l_f = l = 160 \text{ cm}$.

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{160}{1,51} = 105,9 > \lambda_0.$$

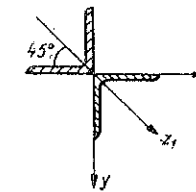
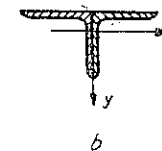
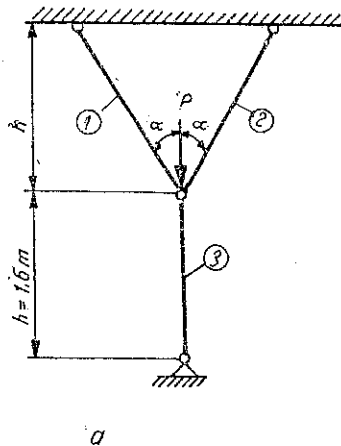
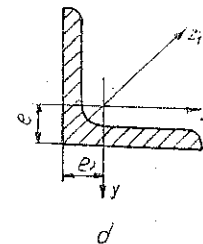


Fig. 12.5



Se calculează sarcina critică de flambaj cu relația (12.5):

$$P_r = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_f^2} = \frac{\pi^2 2,1 \cdot 10^6 \cdot 22}{160^2} = 17\,811 \text{ daN.}$$

Pentru calculul coeficientului de siguranță se aplică relația (12.7):

$$c = \frac{P_r}{N_s} = \frac{17\,811}{7\,878} = 2,26.$$

Pentru secțiunea din figura 12.5, c:

$$I_{min} = I_{x_1} = 2 \cdot 17,4 = 34,8 \text{ cm}^4,$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{34,8}{2 \cdot 4,8}} = 1,9 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{l}{i_{min}} = \frac{160}{1,9} = 84,2 < \lambda_0.$$

Se aplică formula *Tetmajer-Iasinski* din tabelul 12.1:

$$\sigma_r = 3\,040 - 11,2 \lambda = 3\,040 - 11,2 \cdot 84,2 = 2\,097 \text{ daN/cm}^2,$$

$$P_r = \sigma_r \cdot A = 2\,097 \cdot 9,6 = 20\,131 \text{ daN,}$$

$$c = \frac{20\,131}{7\,878} = 2,55.$$

12.6. Să se dimensioneze un stîlp din oțel, încastrat la un capăt și liber la celălalt, avînd secțiunea ca în figura 12.6.

Se dă: $P = 2 \cdot 10^4 \text{ daN}$, $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$, $\lambda_0 = 105$, $l = 2 \text{ m}$, $\sigma_r = 3\,040 - 11,2 \lambda$, coeficientul de siguranță la flambaj, $c = 4$.

Rezolvare. $l_f = 2l$.

Se presupune $\lambda > \lambda_0$ și din relația (12.5) se obține:

$$I_{min} = \frac{P \cdot c l_f^2}{\pi^2 E} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot (2 \cdot 200)^2}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 617 \text{ cm}^4,$$

$$I_{min} = I_y = \frac{8a(4a)^3}{12} - \frac{6a(2a)^3}{12} = \frac{116}{3} a^4.$$

$$\text{Rezultă: } 617 = \frac{116}{3} a^4; \quad a = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 617}{116}} = 2 \text{ cm.}$$

Se verifică dacă λ este mai mare ca λ_0 :

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}}; \quad i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{116}{3} a^4}{20 a^2}} = a \sqrt{\frac{116}{3 \cdot 20}} = 2 \cdot 1,39 = 2,78 \text{ cm,}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 200}{2,78} = 144 > \lambda_0, \text{ deci ipoteza folosită a fost bună.}$$

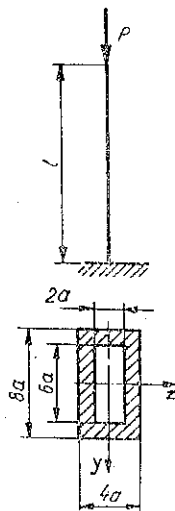


Fig. 12.6

12.7. O bară din oțel OL 37, de secțiune circulară, încastrată la un capăt și articulată la celălalt, este solicitată la compresiune de o forță $P = 760 \text{ daN}$. Să se dimensioneze bara, știind că lungimea ei este $l = 60 \text{ cm}$, iar coeficientul de siguranță $c = 9$.

Rezolvare. $l_f = 0,707l = 42,42 \text{ cm}$.

Se consideră că problema se încadrează în domeniul formulei lui Euler și se aplică relația (12.5):

$$I_{min} = \frac{P c l_f^2}{\pi^2 E} = \frac{760 \cdot 9 \cdot 42,42^2}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 0,594 \text{ cm}^4,$$

$$\frac{\pi d^4}{64} = 0,594; \quad d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 0,594}{\pi}} = 1,86 \text{ cm.}$$

Se verifică aplicabilitatea formulei lui Euler:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = \frac{1,86}{4} = 0,465 \text{ cm};$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{42,42}{0,465} = 91,2 < \lambda_0 = 105.$$

Formula lui Euler nu a fost bine aplicată. Se corectează dimensiunea obținută. Se folosește formula *Tetmajer-Iasinski* (tab. 12.1), căutînd să se obțină aceeași valoare a coeficientului de siguranță.

$$\sigma_r = 3\,040 - 11,2 \lambda = 3\,040 - 11,2 \cdot 91,2 = 2\,018 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{760}{\pi \cdot \frac{1,86^2}{4}} = 280 \text{ daN/cm}^2,$$

$$c = \frac{\sigma_r}{\sigma} = \frac{2\,018}{280} = 7,2.$$

Întrucît a rezultat o valoare mai mică decît cea impusă, se refăce calculul alegînd $d = 2 \text{ cm}$.

$$i = \frac{d}{4} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{42,42}{0,5} = 84,84,$$

$$\sigma_r = 3\,040 - 11,2 \cdot 84,84 = 2\,090 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma = \frac{760}{\pi \cdot 2^2 / 4} = 242 \text{ daN/cm}^2$$

$$c = \frac{\sigma_r}{\sigma} = \frac{2\,090}{242} = 8,65.$$



Fig. 12.7

Pentru $d = 2,1$ cm :

$$i = \frac{d}{4} = \frac{2,1}{4} = 0,525 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{42,42}{0,525} = 80,8,$$

$$\sigma_f = 3040 - 11,2 \cdot 80,8 = 2135 \text{ daN/cm}^2; \quad \sigma = \frac{760}{\pi \cdot 2,1^2} = 219 \text{ daN/cm}^2,$$

$$c = \frac{2135}{219} = 9,7.$$

Se reține valoarea $d = 2$ cm.

12.8. Să se calculeze forța P care soliciță sistemul de bare din figura 12.8, a astfel încât stîlpul 1-2 să nu-și piardă stabilitatea. Stîlpul este din oțel cu secțiunea din figura 12.8, b și lungimea $l = 1,8$ m. Se ia coeficientul de siguranță $c = 5$ și $\lambda_0 = 105$.

Rezolvare. Stîlpul este articulat la ambele capete, $l_f = l = 180$ cm. Din anexa 6, pentru o cornieră L 50 $\times$ 50 $\times$ 5 (Fig. 12.8, c) se găsește $I_x = I_y = 11 \text{ cm}^4$; $I_{x_1} = 17,4 \text{ cm}^4$, $I_{y_1} = 4,54 \text{ cm}^4$; $A = 4,8 \text{ cm}^2$, $e = 1,4$ cm. Se calculează momentul de inerție minim. Față de sistemul de axe central $z'Oy'$ se cunosc :

$$I_{x'} = 2(11 + 4,8 \cdot 1,4^2) = 40,816 \text{ cm}^4,$$

$$I_{y'} = 2(11 + 4,8 \cdot 1,1^2) = 33,616 \text{ cm}^4.$$

Momentul de inerție centrifugal pentru o cornieră, față de sistemul de axe $z'Oy'$ este :

$$I_{x'y'} = \frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2} \sin 2\alpha = \frac{17,4 - 4,54}{2} \sin 90^\circ = 6,43 \text{ cm}^4.$$

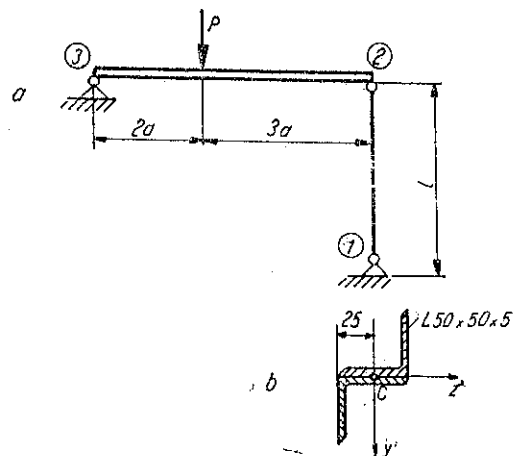


Fig. 12.8

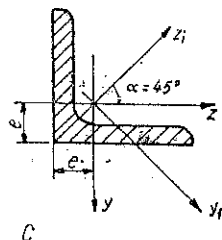


Fig. 12.9

Pentru întreaga secțiune, momentul de inerție centrifugal este :

$$I_{x'y'} = 2(-6,43) + 4,8(-1,1)1,4 + 4,8 \cdot 1,1(-1,4) = -27,64 \text{ cm}^4.$$

Observație. Poziția cornierelor din figura 12.8, b conduce la schimbarea sensului uneia din axe față de cel dat în figura 12.8, c și deci la schimbarea semnelor momentului de inerție centrifugal $I_{x'y'} = 6,43 \text{ cm}^4$ calculat față de axele centrale.

$$I_{1,2} = \frac{I_{x'} + I_{y'}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x'} - I_{y'})^2 + 4I_{x'y'}^2} =$$

$$= \frac{40,816 + 33,616}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(40,816 - 33,616)^2 + 4 \cdot 27,64^2} =$$

$$= 37,216 \pm 27,873,$$

$$I_{\min} = I_2 = 9,34 \text{ cm}^4; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{9,34}{2 \cdot 4,8}} = 0,986 \text{ cm}.$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{180}{0,986} = 182 > \lambda_0.$$

Se aplică formula lui Euler pentru calculul forței P_1 ce poate fi preluată de stîlp,

$$P_1 = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{c l_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 9,34}{5 \cdot 180^2} = 1195 \text{ daN},$$

dar

$$P_1 = \frac{2}{5} P,$$

deci forța P cu care poate fi încărcat sistemul este :

$$P = \frac{5P_1}{2} = \frac{5}{2} 1195 = 2988 \text{ daN}.$$

12.9. Bara de secțiune circulară din figura 12.9 este încastrată la un capăt și liberă la celălalt. Se cere să se calculeze temperatura la care trebuie încălzită bara ca să aibă loc pierderea stabilității. La temperatura de 20°C, între capătul liber și perete (Fig. 12.9) există un joc $\Delta = 0,4$ cm. Se dau :

$l = 5$ m, $d = 10$ cm, $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm²,
 $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$, $\lambda_0 = 105$.

Rezolvare. În urma încălzirii, bara se dilată liber pînă la anularea jocului, după

care dilatarea este împiedicată. Pierderea stabilității se va produce atunci când efortul unitar, σ_T , ce se produce în bară datorită dilatării împiedicate, este egal cu efortul unitar critic de flambaj, σ_f :

$$\sigma_T = \sigma_f, \quad (1)$$

$$\sigma_T = E\alpha\Delta t - \frac{E\Delta}{l}. \quad (2)$$

Pentru calcularea lui σ_f se determină λ . După anularea jocului Δ , bara se consideră încastrată la un capăt și articulată la celălalt,

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} l}{\frac{d}{4}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 500}{10} = 141 > \lambda_0.$$

σ_f se calculează cu relația (12.3):

$$\sigma_f = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}. \quad (3)$$

Înlocuind expresiile (2) și (3) în (1), se obține:

$$E\left(\alpha\Delta t - \frac{\Delta}{l}\right) = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

$$\Delta t = \frac{\frac{\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\Delta}{l}}{\alpha} = \frac{\frac{\pi^2}{141^2} + \frac{0,4}{10}}{12,5 \cdot 10^{-6}} = 103,7^\circ\text{C}.$$

12.10. Bara din figura 12.10, *a* este încastrată la un capăt iar la celălalt este articulată față de axa Oz și liberă față de axa Oy (articulație cilindrică). Se cere să se calculeze raportul dintre înălțimea h și lățimea b a secțiunii transversale, astfel încât pierderea stabilității față de axele Oz și Oy să se producă pentru aceeași valoare a forței critice de flambaj.

Rezolvare. Rezemarea barei în capătul de sus fiind diferită față de cele două axe, rezultă că lungimea de flambaj este funcție de axa față de care se produce flambajul.

În consecință, forța critică de flambaj P'_f , în cazul pierderii stabilității față de axa Oy (Fig. 12.10, *b*), este:

$$P'_f = \frac{\pi^2 \cdot EI_y}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2},$$

iar forța critică P''_f , în cazul pierderii stabilității față de axa Oz (Fig. 12.10, *c*), va fi:

$$P''_f = \frac{\pi^2 \cdot EI_z}{(2l)^2}.$$

Din condiția $P'_f = P''_f$, rezultă

$$\frac{I_y}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2} = \frac{I_z}{(2l)^2};$$

$$\frac{h}{b} = 2,83.$$

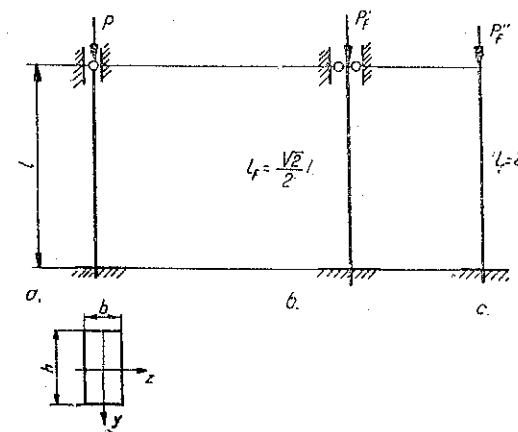


Fig. 12.10

12.11. La bara din figura 12.11, *a*, articulată la ambele capete, este împiedicată deplasarea orizontală, paralelă cu axa Oz , a mijlocului barei. Se cere să se calculeze raportul dintre înălțimea h și lățimea b a secțiunii transversale, astfel încât pierderea stabilității față de ambele axe să se producă la aceeași forță.

Rezolvare. Din cauza rolorelor, care împiedică deplasarea mijlocului barei, pe direcția axei Oz , bara se va deforma, după pierderea stabilității, ca în figura 12.11, *b*, deci lungimea de flambaj este $l_f = l$. Rezultă:

$$P'_f = \frac{\pi^2 \cdot EI_y}{l^2}.$$

Pe direcția axei Oy bara se deformează ca în figura 12.11, *c*, deci $l_f = 2l$.

Rezultă:

$$P''_f = \frac{\pi^2 EI_z}{(2l)^2}.$$

Din condiția impusă ca $P'_f = P''_f$, se obține:

$$\frac{I_y}{l^2} = \frac{I_z}{(2l)^2}, \quad \frac{h}{b} = 2.$$

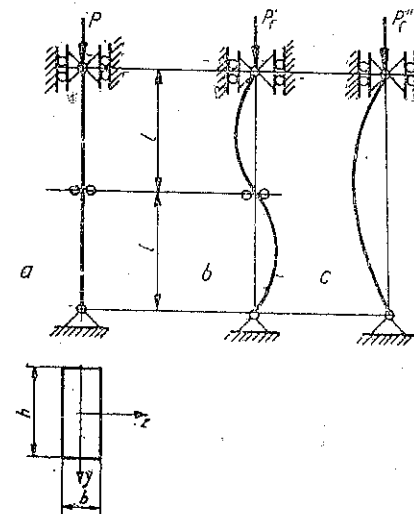


Fig. 12.11

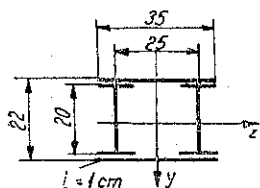


Fig. 12.12

12.12. Un stîlp metalic, articulat la ambele capete, de 6 m lungime, are secțiunea din figura 12.12. Se cere să se determine efortul capabil al stîlpului, știind că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Rezolvare. Întrucît ambele axe tale secțiunea, flambajul se va produce față de axa cu moment de inerție minim. Pentru un singur profil I 20, se găsește în *anexa 9*:

$$I_z = 2\,140 \text{ cm}^4; \quad I_y = 117 \text{ cm}^4;$$

$$A_1 = 33,5 \text{ cm}^2; \quad A = 2(33,5 + 35 \cdot 1) = 137 \text{ cm}^2;$$

$$I_z = 2 \left(2\,140 + \frac{35 \cdot 1^3}{12} + 35 \cdot 10,5^2 \right) = 12\,000 \text{ cm}^4;$$

$$I_y = 2 \left(117 + 33,5 \cdot 12,5^2 + \frac{1 \cdot 35^3}{12} \right) = 17\,860 \text{ cm}^4.$$

Întrucît $I_z < I_y$, calculul se face față de axa z :

$$i_z = \sqrt{\frac{12\,000}{137}} = 9,4 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{600}{9,4} = 64.$$

În *anexa 10* se găsește $\varphi = 0,798$:

$$P = \varphi \sigma_a A = 0,798 \cdot 1\,400 \cdot 137 = 153\,000 \text{ daN}.$$

12.13. Să se dimensioneze un stîlp metalic dintr-un profil I, știind că este solicitat de o forță de compresiune $P = 100$ kN. Stîlpul este articulat la ambele capete, avînd lungimea $l = 3$ m. Se dă $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Rezolvare. Dimensionarea se face cu ajutorul formulei (12.11). Întrucît formula are două necunoscute, A și φ , se alege pentru φ în mod arbitrar valoarea corespunzătoare lui $\lambda = 100$, adică $\varphi = 0,610$:

$$A_{nec} = \frac{10\,000}{0,610 \cdot 1\,400} = 11,7 \text{ cm}^2.$$

În *anexa 9* se găsește profilul I 12, care are:

$$A = 14,2 \text{ cm}^2; \quad i_y = 1,23 \text{ cm}.$$

Rezultă:

$$\lambda = \frac{300}{1,23} = 244.$$

Această cifră depășește cu mult limita admisă de prescripțiuni, și anume $\lambda = 150$.

Impunînd valoarea $\lambda = 150$, rezultă raza de inerție:

$$i_{min} = \frac{l}{\lambda} = \frac{300}{150} = 2 \text{ cm}.$$

Acestei valori îi corespunde, după *anexa 9*, profilul I 22, cu următoarele caracteristici:

$$A = 39,6 \text{ cm}^2; \quad i_y = 2,02 \text{ cm}.$$

Se verifică secțiunea cu formula (12.12), luînd din *anexa 10* coeficientul $\varphi = 0,274$, pentru $\lambda = 150$:

$$\sigma_\varphi = \frac{10\,000}{0,274 \cdot 39,6} = 922 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

12.14. O bară din oțel laminat, de lungime $l = 3$ m, este articulată la ambele capete și are secțiunea compusă (Fig. 12.14). Să se determine efortul capabil al barei, știind că $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm². Să se arate la cît se reduce efortul capabil dacă se scot cormerele.

Rezolvare. Pentru un profil U 16, se găsește în *anexa 8*:

$$A = 24 \text{ cm}^2; \quad e = 1,84 \text{ cm};$$

$$I_{zu} = 925 \text{ cm}^4; \quad I_{yu} = 85,3 \text{ cm}^4; \quad i_{yu} = 1,89 \text{ cm}.$$

Pentru o cormieră I 50 $\times$ 50 $\times$ 5, se găsește în *anexa 6*:

$$A = 4,80 \text{ cm}^2; \quad e = 1,40 \text{ cm};$$

$$I_{zc} = I_{yc} = 11 \text{ cm}^4.$$

Se determină poziția centrului de greutate față de sistemul de axe zOy_1 :

$$z_c = OC = \frac{24 \cdot 1,84 + 2 \cdot 4,8(-1,4)}{24 + 2 \cdot 4,8} = 0,914 \text{ cm}.$$

Distanțele centrelor de greutate ale profilelor față de centrul O al ansamblului sînt:

— pentru U 16:

$$z_u = OC_u - OC = 1,84 - 0,914 = 0,926 \text{ cm}$$

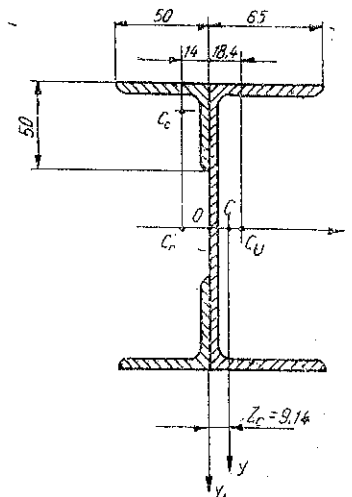


Fig. 12.14

— pentru ansamblul celor două corniere :

$$z_c = C'O + OC = 1,4 + 0,914 = 2,314 \text{ cm.}$$

Momentul de inerție al întregii secțiuni față de axa Cy este :

$$I_{mta} = I_y = 85,3 + 24 \cdot 0,926^2 + 2(11 + 4,8 \cdot 2,314^2) = 179,28 \text{ cm}^4,$$

$$A = 24 + 2 \cdot 4,8 = 33,6 \text{ cm}^2; \quad i_{mta} = \sqrt{\frac{179,28}{33,6}} = 2,31 \text{ cm,}$$

$$\lambda = \frac{300}{2,31} = 130.$$

În anexa 10 corespunde coeficientul $\varphi = 0,365$. Forța capabilă se calculează cu formula (12.10) :

$$P = \varphi \sigma_a A = 0,365 \cdot 1400 \cdot 33,6 = 17\,170 \text{ daN.}$$

În cazul cînd se scot cornierele, rămîne numai profilul U16 :

$$\lambda = \frac{300}{1,89} = 158; \quad \varphi = 0,247; \quad P = 0,247 \cdot 1\,400 \cdot 24 = 8\,300 \text{ daN.}$$

Efortul capabil, după cum era de așteptat, este mai mic în acest caz. Nu se recomandă însă a se face bare metalice cu coeficientul de subțirime $\lambda > 150$, deci cornierele sînt necesare din motive constructive.

12.15. Se consideră bara RS , de secțiune constantă, articulată în R , simplu rezemată în O și acționată de o forță de compresiune P în extremitatea S (Fig. 12.15). Se cere să se determine valoarea sarcinii critice de flambaj. Cazuri particulare : $a = l$, $a = 0$, $l = 0$.

Rezolvare. Se consideră originea sistemului de coordonate în reazemul simplu O , axele Ox_1 și Ox_2 în lungul barei și axele Oy_1 și Oy_2 normale pe bară. Dacă δ este săgeata extremității S , atunci reacțiunile orizontale din reazemul simplu O și din articulația R sînt egale cu $P\delta/l$, iar reacțiunea verticală din R este P .

Ecuatiile diferențiale ale fibrei medii deformată sînt :

a) Pe porțiunea OS :

$$EI v_1'' = P(\delta - v_1).$$

b) Pe porțiunea OR :

$$EI v_2'' = -Pv_2 - P \frac{\delta}{l} (l - x_2).$$

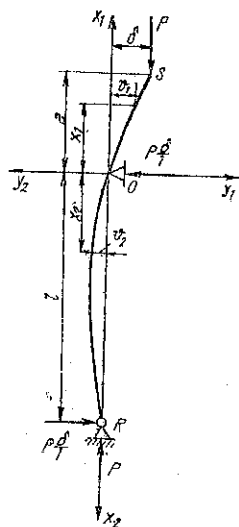


Fig. 12.15

Divizînd cu EI și notînd $\frac{P}{EI} = \alpha^2$, cele două ecuații diferențiale se scriu :

$$v_1'' + \alpha^2 v_1 = \alpha^2 \delta; \quad v_2'' + \alpha^2 v_2 = \alpha^2 \frac{\delta}{l} x_2 - \alpha^2 \delta.$$

Soluțiile lor sînt, respectiv :

$$v_1 = A \cos \alpha x_1 + B \sin \alpha x_1 + \delta; \quad v_2 = C \cos \alpha x_2 + D \sin \alpha x_2 + \frac{\delta}{l} x_2 - \delta.$$

Condițiile la limită se scriu :

$$v_1(0) = 0; \quad v_1(a) = \delta; \quad v_2(0) = 0; \quad v_2(l) = 0 \quad \text{și} \quad v_1'(0) = v_2'(0).$$

Ținînd seama de expresiile găsite pentru v_1 și v_2 , aceste condiții la limită devin :

$$A + \delta = 0; \quad A \cos \alpha a + B \sin \alpha a + \delta = \delta;$$

$$C - \delta = 0; \quad C \cos \alpha l + D \sin \alpha l = 0; \quad \alpha B = \alpha D + \frac{\delta}{l}.$$

Din primele patru ecuații, deducem $A = -\delta$; $B = \delta \operatorname{ctg} \alpha a$; $C = \delta$ și $D = -\delta \operatorname{ctg} \alpha l$.

Înlocuind valorile B și D , astfel determinate, în ultima relație și simplificînd cu δ , se obține ecuația transcendentă :

$$\operatorname{ctg} \alpha a = \frac{l}{\alpha l} - \operatorname{ctg} \alpha l$$

care, rezolvată, dă valorile lui α și, deci, ale sarcinii P (căci $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$).

De exemplu, în cazul $a = l$, ecuația transcendentă devine :

$$2\alpha l \cdot \operatorname{ctg} \alpha l = 1$$

cu soluția minimă pozitivă $\alpha l = 1,165$. Rezultă :

$$P_c = \frac{1,357 EI}{l^2}.$$

Pentru $a = 0$, $\operatorname{ctg} \alpha a = \infty$. Pentru ca și membrul al doilea al ecuației transcendente să fie ∞ este necesar să avem $\operatorname{ctg} \alpha l = \infty$, adică $\alpha l = n\pi$. Pentru $n = 1$, se obține :

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

adică sarcina corespunzătoare unei bare dublu articulate, ceea ce era de așteptat, deoarece cînd $a = 0$, punctele O și S coincid.

Pentru $l = 0$, membrul al doilea al ecuației transcendente este de forma $\infty - \infty$. Ridicînd nedeterminarea, se obține valoarea 0. Ecuația transcendentă devine $\operatorname{ctg} \alpha a = 0$ și este satisfăcută pentru $\alpha a = n \frac{\pi}{2}$.

Pentru $n = 1$ se obține :

$$P_f = \frac{\pi^2 EI}{4a^2}$$

adică sarcina corespunzătoare unei bare încastate la o extremitate și liberă la cealaltă, ceea ce era de așteptat, deoarece o încastare poate fi considerată întotdeauna ca fiind formată dintr-o articulație și un reazem simplu, infinit apropiate.

12.16. Bara 1-2 (Fig. 12.16) este sprijinită în punctele 1, 2 și 3 ca în desen, fiind solicitată la compresiune de forța P . Să se determine valoarea forței critice de flambaj.

Rezolvare. Fie V_1 și V_2 reacțiunile în reazemele 1 și 2. Alegînd axele de coordonate ca în figura 12.16, ecuațiile diferențiale ale fibrei medii deformată pe cele două intervale 1-3 și 2-3 sînt :

Intervalul 1-3 :

$$\frac{d^2 v_1}{dx_1^2} = -\frac{Pv_1}{EI} - \frac{V_1 x_1}{EI} \quad (1)$$

Intervalul 2-3 :

$$\frac{d^2 v_2}{dx_2^2} = -\frac{Pv_2}{EI} - \frac{V_2 x_2}{EI} \quad (2)$$

Notînd $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$, cele două ecuații devin :

$$\frac{d^2 v_1}{dx_1^2} + \alpha^2 v_1 = -\frac{V_1 x_1}{EI} \quad (1')$$

$$\frac{d^2 v_2}{dx_2^2} + \alpha^2 v_2 = -\frac{V_2 x_2}{EI} \quad (2')$$

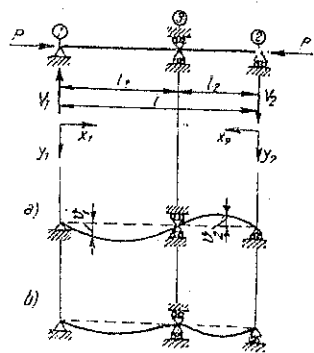


Fig. 12.16

Soluțiile celor două ecuații diferențiale sînt :

$$v_1 = -\frac{V_1 x_1}{P} + A_1 \cos \alpha x_1 + B_1 \sin \alpha x_1, \quad (3)$$

$$v_2 = -\frac{V_2 x_2}{P} + A_2 \cos \alpha x_2 + B_2 \sin \alpha x_2 \quad (4)$$

unde A_1, B_1, A_2, B_2 sînt constante care se determină în funcție de condițiile pe reazeme.

Aplicînd condițiile la limită, se obține :

$$v_1(0) = 0, \text{ în reazemul 1} \quad (a)$$

$$v_2(0) = 0, \text{ în reazemul 2} \quad (b)$$

$$v_1(l_1) = 0, \text{ în reazemul 3} \quad (c)$$

$$v_2(l_2) = 0, \text{ în reazemul 3.} \quad (d)$$

Pe reazemul 3, tangentele la curba deformată pe cele două intervale sînt egale :

$$v'_1(l_1) = v'_2(l_2) \quad (e)$$

De asemenea, momentele forțelor din stînga punctului 3 și din dreapta sa sînt egale :

$$V_1 l_1 = -V_2 l_2 \quad (f)$$

$$V_1 l_1 + V_2 l_2 = 0. \quad (f')$$

Expresia momentului se poate înlocui cu derivata a doua a săgeții, deci relația (f') devine :

$$v''_1(l_1) + v''_2(l_2) = 0. \quad (f'')$$

Punînd condițiile la limită (a) și (b) în ecuațiile (3), respectiv (4) se obține :

$$A_1 = 0 = A_2.$$

Punînd condițiile la limită (c) și (d) în aceleași ecuații, se obține :

$$0 = -\frac{V_1 l_1}{P} + B_1 \sin \alpha l_1; \quad B_1 = \frac{V_1 l_1}{P \sin \alpha l_1};$$

$$0 = -\frac{V_2 l_2}{P} + B_2 \sin \alpha l_2; \quad B_2 = \frac{V_2 l_2}{P \sin \alpha l_2}.$$

Ecuațiile (3) și (4) devin, prin înlocuirea constantelor :

$$v_1 = -\frac{V_1 x_1}{P} + \frac{V_1 l_1}{P \sin \alpha l_1} \sin \alpha x_1. \quad (3')$$

$$v_2 = -\frac{V_2 x_2}{P} + \frac{V_2 l_2}{P \sin \alpha l_2} \sin \alpha x_2. \quad (4')$$

Aplicând acestor ecuații condiția (e), rezultă:

$$-\frac{V_1}{P} + \frac{\alpha V_1 l_1}{P \sin \alpha l_1} \cos \alpha l_1 = -\frac{V_2}{P} + \frac{\alpha V_2 l_2}{P \sin \alpha l_2} \cos \alpha l_2,$$

care se transformă în:

$$l_1 V_1 \left(\alpha \operatorname{ctg} \alpha l_1 - \frac{1}{l_1} \right) = l_2 V_2 \left(\alpha \operatorname{ctg} \alpha l_2 - \frac{1}{l_2} \right). \quad (5)$$

Relația (f) dă $V_1 l_1 = -V_2 l_2$, care se poate înlocui în (5):

$$\alpha \operatorname{ctg} \alpha l_1 - \frac{1}{l_1} = -\alpha \operatorname{ctg} \alpha l_2 + \frac{1}{l_2};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha l_1 + \operatorname{ctg} \alpha l_2 = \frac{1}{\alpha l_1} + \frac{1}{\alpha l_2}. \quad (6)$$

Această expresie se mai poate scrie (înlocuind $\operatorname{ctg} \alpha l_1 = \frac{\cos \alpha l_1}{\sin \alpha l_1}$):

$$l_2 \sin \alpha l_2 (\alpha l_1 \cos \alpha l_1 - \sin \alpha l_1) + l_1 \sin \alpha l_1 (\alpha l_2 \cos \alpha l_2 - \sin \alpha l_2) = 0. \quad (7)$$

Sarcina critică de flambaj are loc pentru valoarea minimă a lui α . Se deosebesc următoarele cazuri:

a) $l_1 \neq l_2$. Ecuația (7) este satisfăcută când:

1) Suma termenilor este nulă; fibra medie deformată este reprezentată în figura 12.16, a.

2) Se anulează termenii din paranteze. Fibra medie deformată este reprezentată în figura 12.16, b (corespunde unei încastrări perfecte pentru cele două deschideri în punctul 3). Se obțin pentru α două valori (din prima și din a doua paranteză), iar cea mai mică dintre acestea dă sarcina critică de flambaj.

b) $l_1 = l_2$. În acest caz, ecuația (7) devine:

$$\sin \alpha l_1 (\alpha l_1 \cos \alpha l_1 - \sin \alpha l_1) = 0. \quad (8)$$

Această ecuație este satisfăcută în următoarele două cazuri:

1) $\sin \alpha l_1 = 0; \quad \alpha = \frac{\pi}{l_1}$

Rezultă sarcina critică:

$$P = \alpha^2 EI = \frac{\pi^2}{l_1^2} EI = \frac{\pi^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} EI = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

Acest rezultat era cunoscut de la cazul II al formulei lui Euler, reprezentând a doua soluție a problemei.

2) $\alpha l_1 \cos \alpha l_1 - \sin \alpha l_1 = 0; \quad \alpha l_1 = \operatorname{tg} \alpha l_1.$

Cea mai mică rădăcină a acestei ecuații este $\alpha l_1 = 4,49$, care dă sarcina critică:

$$P = \alpha^2 EI = \frac{4,49^2 EI}{l_1^2} = \frac{4,49^2 EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{80,5 EI}{l^2}$$

Acest rezultat este cunoscut de la cazul III al formulei lui Euler, reprezentând, pentru una din deschideri, soluția corespunzătoare barei cu articulație la o extremitate și încastrare la cealaltă.

12.17. O bară articulată la ambele capete este alcătuită din două porțiuni de secțiuni diferite (Fig. 12.17). Să se determine valoarea sarcinii critice de flambaj, știind că bara este solicitată la compresiune prin forța P .

Rezolvare. Se aleg două origini ale axei x pentru cele două porțiuni de secțiune diferită, ca în figura 12.17. Notînd $\alpha^2 = \frac{P}{EI_1}$ și $K^2 = \frac{I_1}{I_2}$, ecuațiile diferențiale ale fibrei medii deformată pentru cele două porțiuni sînt:

$$\frac{d^2 v_1}{dx_1^2} + \alpha^2 v_1 = 0; \quad (1) \quad \frac{d^2 v_2}{dx_2^2} + K^2 \alpha^2 v_2 = 0. \quad (2)$$

Condițiile la limită sînt:

$$v_1(0) = 0; \quad (a)$$

$$v_1(l_1) = v_2(0); \quad (b)$$

$$v_1'(l_1) = v_2'(0); \quad (c)$$

$$v_2(l_2) = 0. \quad (d)$$

Soluțiile ecuațiilor (1) și (2) sînt:

$$v_1 = A_1 \cos \alpha x_1 + B_1 \sin \alpha x_1; \quad (1')$$

$$v_2 = A_2 \cos K \alpha x_2 + B_2 \sin K \alpha x_2. \quad (2')$$

Aplicînd pe rînd condițiile la limită, se obține:

$$A_1 = 0; \quad v_1(l_1) = B_1 \sin \alpha l_1;$$

$$v_2(0) = A_2 = B_1 \sin \alpha l_1;$$

$$B_1 \alpha \cos \alpha l_1 = K \alpha B_2;$$

$$v_2(l_2) = A_2 \cos K \alpha l_2 + B_2 \sin K \alpha l_2 = 0.$$

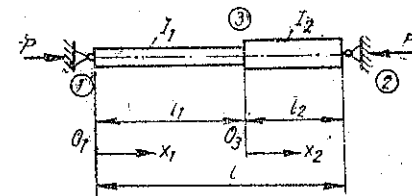


Fig. 12.17

Înlocuind pe A_2 și B_2 în ultima ecuație, rezultă :

$$B_1 \sin \alpha l_1 \cos K \alpha l_2 + \frac{B_1 \alpha \cos \alpha l_1}{K \alpha} \sin K \alpha l_2 = 0$$

care se mai poate scrie :

$$K \operatorname{tg} \alpha l_1 + \operatorname{tg} K \alpha l_2 = 0. \quad (3)$$

Cea mai mică rădăcină a acestei ecuații dă sarcina critică de flambaj.

Pentru cazul particular $I_1 = I_2$, $K = 1$, se scrie

$$\operatorname{tg} \alpha l_1 + \operatorname{tg} \alpha l_2 = 0.$$

Înlocuind tangenta și eliminând numitorii, se obține ecuația :

$$\sin \alpha(l_1 + l_2) = \sin \alpha l = 0$$

ceea ce dă cazul II de flambaj al lui Euler (bara articulată la ambele capete cu secțiune constantă).

12.18. O grindă verticală, încastrată la partea inferioară, este solicitată la flambaj de forța verticală P și în același timp de o forță orizontală H (Fig. 12.18).

Se cere :

- ecuația fibrei medii deformată;
- săgeata maximă;
- momentul în încastrare.

Rezolvare. Ecuația fibrei medii deformată este :

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = P(f - v) + H(l - x)$$

care se mai poate scrie sub forma :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P}{EI} v = \frac{P}{EI} f + \frac{H}{EI} (l - x).$$

Dacă se notează : $\frac{P}{EI} = \alpha^2$, integrala generală a ecuației fără membrul al doilea este :

$$v = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

unde A și B sînt constantele de integrare care urmează să fie determinate prin condițiile la limită.

Fie :

$$v = ax + b$$

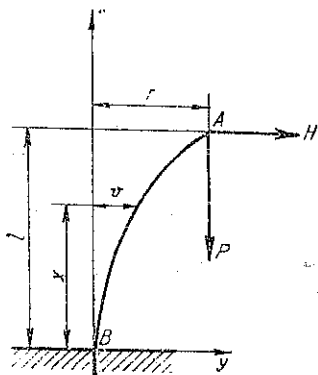


Fig. 12.18

integrala particulară a ecuației cu membrul al doilea.

Derivind se obține :

$$\frac{dv}{dx} = a; \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = 0.$$

Introducând aceste valori în ecuația diferențială generală, se obține :

$$\frac{P}{EI} (ax + b) = \frac{P}{EI} f + \frac{H}{EI} (l - x);$$

$$\frac{Pa}{EI} x + \frac{Pb}{EI} = -\frac{H}{EI} x + \frac{Pf + Hl}{EI}$$

Prin identificarea coeficienților, se găsește :

$$\frac{Pa}{EI} = -\frac{H}{EI}; \quad \frac{Pb}{EI} = \frac{Pf + Hl}{EI}$$

de unde :

$$a = -\frac{H}{P}; \quad b = f + \frac{H}{P} l.$$

Integrala generală este :

$$v = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x - \frac{H}{P} x + \frac{H}{P} l + f.$$

Condițiile la limită sînt următoarele : în încastrare, pentru $x = 0$, trebuie ca $v = 0$ și $dv/dx = 0$.

Derivata lui v este :

$$\frac{dv}{dx} = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha B \cos \alpha x - \frac{H}{P}$$

a) Pentru $x = 0$, $v = 0$:

$$0 = A + \frac{H}{P} l + f; \quad A = -\left(\frac{H}{P} l + f\right).$$

b) Pentru $x = 0$, $dv/dx = 0$:

$$0 = \alpha B - \frac{H}{P}; \quad B = \frac{H}{\alpha P}$$

Atunci :

$$v = \left(\frac{H}{P} l + f \right) (1 - \cos \alpha x) + \frac{H}{\alpha P} \sin \alpha x - \frac{H}{P} x.$$

Pentru determinarea valorii lui f , se scrie condiția : pentru $x = l$, $v = f$:

$$f = \left(\frac{H}{P} l + f \right) (1 - \cos \alpha l) + \frac{H}{\alpha P} \sin \alpha l - \frac{H}{P} l.$$

De aici se obține :

$$f \cos \alpha l = \frac{H}{P} \left(\frac{\sin \alpha l}{\alpha} - l \cos \alpha l \right)$$

de unde :

$$f = \frac{H}{P} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha l}{\alpha} - l \right). \quad (1)$$

Rezultă atunci :

$$\frac{H}{P} l + f = \frac{H}{P} l + \frac{H}{P} \frac{\operatorname{tg} \alpha l}{\alpha} - \frac{H}{P} l = \frac{H}{P} \frac{\operatorname{tg} \alpha l}{\alpha}.$$

Ecuția fibrei medii deformate este :

$$v = \frac{H}{\alpha P} \operatorname{tg} \alpha l (1 - \cos \alpha x) + \frac{H}{\alpha P} \sin \alpha x - \frac{H}{P} x$$

care se mai poate scrie și sub forma :

$$v = \frac{H}{P} \left[\frac{\sin \alpha l - \sin \alpha(l-x)}{\alpha \cos \alpha l} - x \right]. \quad (2)$$

Momentul în încastrare este :

$$M_s = -Hl - Pf = -Hl - P \frac{H}{P} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha l}{\alpha} - l \right) = -H \frac{\operatorname{tg} \alpha l}{\alpha}. \quad (3)$$

12.19. Se consideră o grindă de oțel, profil I 20, încadrată la un capăt, la capătul liber fiind aplicat un moment încovoietor M_0 . Să se calculeze lungimea barei, astfel încît momentul M_0 capabil să fie suportat de bară

fără a se depăși $\sigma_a = 1\,200 \text{ daN/cm}^2$ și să fie egal cu momentul critic de flambaj lateral.

Rezolvare.

Momentul capabil va fi :

$$M_{cap} = \sigma_a W_z.$$

Pentru ca acest moment să fie în același timp și moment critic de flambaj lateral, se va utiliza relația (12.13) și se va scrie :

$$M_{cap} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{EI_y GI_t}.$$

Momentul de inerție I_y se obține din anexa 9 și este $I_y = 117 \text{ cm}^4$, iar $W_z = 214 \text{ cm}^3$. Momentul de inerție polar echivalent se va calcula în modul arătat la problema 6.23 și va fi :

$$I_t = \frac{1}{3} (2 \cdot 9 \cdot 1,13^3 + 17,74 \cdot 0,75^3) = 10,987 \text{ cm}^4.$$

Introducînd aceste valori în relația de mai sus, se obține

$$l = \frac{\pi}{2 \sigma_a W_z} \sqrt{EI_y GI_t} =$$

$$= \frac{\pi}{2 \cdot 1\,200 \cdot 214} \sqrt{2,1 \cdot 10^6 \cdot 117 \cdot 0,81 \cdot 10^6 \cdot 10,987} = 286 \text{ cm}.$$

Rezultă deci că o astfel de grindă, dacă are o lungime mai mare de 2,86 m, va flamba înainte de a atinge solicitarea corespunzătoare momentului capabil.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

12.20. Să se calculeze efortul unitar critic de flambaj care se dezvoltă într-o bară de oțel de secțiune $25 \times 50 \text{ mm}^2$, solicitată la compresiune de o forță $P = 10 \text{ kN}$, dacă ea este articulată la ambele capete și are lungimea $l = 1,00 \text{ m}$.

Răspuns : $\sigma_c = 1070 \text{ daN/cm}^2$.

12.21. Să se determine sarcina critică de flambaj pentru o bară de lemn, de secțiune dreptunghiulară $8 \times 12 \text{ cm}^2$ și lungime $l = 2 \text{ m}$, știind că este articulată la un capăt și încastrată la celălalt.

Răspuns: $P_c = 25\,200 \text{ daN}$.

12.22. O bară din OL 37, avînd secțiunea circulară cu $\varnothing = 20 \text{ mm}$, articulată la ambele capete, este solicitată de o forță de compresie $P = 10 \text{ kN}$. Care este lungimea maximă pe care o poate avea bara, fără a exista pericol de flambaj, dacă coeficientul de siguranță este $c = 4$?

Răspuns: $l_c = l = 64 \text{ cm}$.

12.23. Un stîlp de oțel, avînd secțiunea melară $D = 140 \text{ mm}$ și $d = 100 \text{ mm}$, este solicitat la compresie de o forță $P = 500 \text{ kN}$. Stîlpul are 4 m înălțime și este încastrat la ambele capete. Să se determine coeficientul de siguranță la flambaj.

Răspuns: $\sigma_c = \sigma_e = 2\,200 \text{ daN/cm}^2$; $c = 3,35$.

12.24. Să se calculeze coeficientul de siguranță la flambaj pentru un stîlp de oțel de secțiune melară, cu $D = 120 \text{ mm}$ și $d = 100 \text{ mm}$, încastrat la un capăt și liber la celălalt, avînd lungimea $l = 2,2 \text{ m}$. Stîlpul este comprimat de forța $P = 9\,400 \text{ daN}$. Se dă: $\lambda_0 = 105$.

Răspuns: $c = 6$.

12.25. Să se calculeze forța de compresie P , capabilă de a fi preluată de un stîlp din oțel, de secțiune circulară cu diametrul $d = 8 \text{ cm}$ și lungimea $l = 200 \text{ cm}$, încastrat la un capăt și articulată la celălalt, fără a exista pericol de flambaj, luînd coeficientul de siguranță $c = 4$. Se dă: $\lambda_0 = 105$.

Răspuns: $P = 28\,250 \text{ daN}$.

12.26. Să se dimensioneze tija pistonului unei mașini, făcute din OL 50, știind că forța maximă de compresie este $P = 80 \text{ kN}$, iar lungimea tijei $l = 1,50 \text{ m}$. Se ia coeficientul $c = 10$.

Răspuns: $d = 64 \text{ mm}$.

12.27. Un stîlp de lemn, avînd secțiunea pătrată, articulată la ambele capete, este solicitat la compresie de o forță $P = 15 \text{ kN}$. Să se dimensioneze stîlpul, știind că lungimea sa este $l = 3 \text{ m}$, modulul de elasticitate $E = 100\,000 \text{ daN/cm}^2$, iar coeficientul de siguranță $c = 5$.

Răspuns: $a = 9,5 \text{ cm}$.

12.28. Diagonala unei grinzi cu zăbrele este alcătuită dintr-o cornieră $L 100 \times 100 \times 10$ și are lungimea $l = 2 \text{ m}$. Se întreabă ce forță de compresie poate suporta bara, știind că este articulată la ambele capete și că $\sigma_e = 1400 \text{ daN/cm}^2$. Materialul este OL 37.

Indicație:

Fiind vorba de o construcție metalică, efortul capabil se calculează cu formula (12.10).

Răspuns: $P \approx 16\,000 \text{ daN}$.

12.29. Se cere să se calculeze săgeata maximă, pe care o ia o bară verticală, încastrată la extremitatea de jos, solicitată de o forță verticală, lucrînd excentric, știind că excentricitatea este situată în planul de flambaj al barei (Fig. 12.29).

Răspuns: $f = \frac{e(1 - \cos al)}{\cos al}$

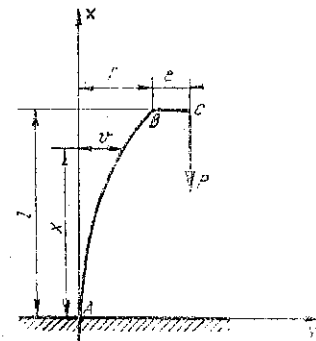


Fig. 12.29

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Solicitățile dinamice tratate în acest capitol pot fi grupate în :

a) Solicitări prin forțe de inerție, întâlnite la piese care au accelerații mari, fără discontinuitate de viteză.

b) Solicitări prin șoc, produse în piese care suferă variații bruște de viteze și accelerații.

2. Problemele de solicitări prin forțe de inerție se tratează în general prin aceleași metode ca și solicitările statice, introducând forțele de inerție.

3. Într-un volant, considerat fără spițe și cu grosimea obezii mică în comparație cu raza, efortul unitar de întindere este dat de formula aproximativă

$$\sigma = \frac{\gamma v^2}{g}, \quad (13.1)$$

în care γ este greutatea specifică a materialului;

g — accelerația gravitației;

v — viteza centrului de greutate al secțiunii obezii;

$$v = R\omega. \quad (13.2)$$

4. Într-un disc de grosime constantă care se rotește cu viteza unghiulară ω și care este supus pe contur unor presiuni radiale p_r și p_e ca în figura 13. a,

apar eforturile unitare :

σ_r : efort unitar radial, dirijat după raza discului;

σ_t : efort unitar circumferențial dirijat după tangenta la un cerc de rază r .

Variația acestor eforturi unitare este dată de relațiile :

$$\sigma_r = \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3 + \nu) \frac{(R_2^2 - r^2)(r^2 - R_1^2)}{r^2} + p_e \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) + p_i \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad (13.3)$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma \omega^2}{8g} \left[(3 + \nu) \left(R_2^2 + R_1^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \right) - (1 + 3\nu) r^2 \right] + p_e \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right) + p_i \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad (13.4)$$

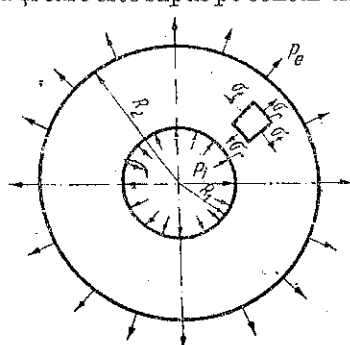


Fig. 13. a

în care R_1 este raza interioară a discului;

R_2 — raza exterioară a discului;

r — raza corespunzătoare unui punct oarecare.

Deplasarea radială u a unui punct oarecare al discului este dată de :

$$u = \frac{r}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r). \quad (13.5)$$

5. La discul de grosime constantă, fără gaură centrală, solicitat și de o presiune exterioară p_e , eforturile unitare se calculează cu relațiile :

$$\sigma_r = \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3 + \nu) (R_2^2 - r^2) + p_e, \quad (13.6)$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma \omega^2}{8g} [(3 + \nu) R_2^2 - (1 + 3\nu) r^2] + p_e. \quad (13.7)$$

6. În piesele solicitate de sarcini aplicate brusc sau prin șoc, apar eforturi mult mai mari decât în piesele solicitate static. Elementul care caracterizează capacitatea unei piese de a rezista la șoc este lucrul mecanic de deformare pe care îl poate acumula piesa ; de aceea, calculele de solicitări prin șoc se fac pe baza ipotezei egalității energiei de deformare a corpului solicitat cu energia corpului care produce șocul.

Metoda de rezolvare a oricărei probleme de șoc este următoarea :

a) Se calculează energia cinetică a corpului care lovește în momentul inițial al șocului, energie care, în cazul translației, se poate pune sub forma :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1-P}{2g} v^2, \quad (13.8)$$

în care : $m = \frac{P}{g}$ este masa corpului ; v — viteza în momentul șocului, sau :

$$E_c = Ph, \quad (13.9)$$

în care : P este greutatea corpului ; h — înălțimea de cădere.

b) Se calculează energia de deformare a corpului care suferă șocul E_d . Energia de deformare se poate exprima în funcție de : efortul unitar (σ , τ) ; deformația (δ).

c) Scriind egalitatea între cele două energii :

$$E_c = E_d \quad (13.10)$$

se obține o ecuație din care se determină efortul unitar sau deformația produsă prin șoc, după felul necunoscutei alese.

7. La solicitările de întindere, compresiune sau încovoiere prin șoc, efortul unitar dinamic σ_d are expresia:

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} \quad (13.11)$$

în care: σ_{st} este efortul unitar de întindere, compresiune sau încovoiere care ar apărea dacă sarcina P ar fi aplicată static;

ψ — un multiplicator de impact sau coeficient dinamic, care are expresia:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_c}{E_d}}, \quad (13.12)$$

în care: E_c este energia cinetică a corpului care produce șocul vertical;
 E_d — energia de deformare a barei solicitată de sarcina P aplicată static.

Înlocuind în relația (13.12)

$$E_c = Ph; E_d = \frac{1}{2} P \cdot \delta_{st}$$

unde δ_{st} este deformația barei sub acțiunea sarcinii P aplicate static, se obține:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{Ph}{\frac{1}{2} P \delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} \quad (13.13)$$

Pentru cazul cînd se cunoaște viteza corpului, se înlocuiește energia cinetică din relația (13.8) și se obține:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{2} P v^2}{\frac{1}{2} P \delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \delta_{st}}} \quad (13.14)$$

Deformația datorită solicitării dinamice se obține din relația:

$$\delta_d = \psi \delta_{st} \quad (13.15)$$

8. În cazul în care raportul:

$$\frac{2h}{\delta_{st}} \geq 10$$

relația (13.13) se poate simplifica:

$$\psi = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}, \quad (13.16)$$

eroarea față de formula exactă fiind sub 5%.

Dacă h este foarte mare, atunci expresia (13.13) se mai poate scrie

$$\psi = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} \quad (13.17)$$

Această expresie se poate utiliza numai dacă:

$$\frac{2h}{\delta_{st}} \geq 110,$$

pentru ca erorile să nu depășească 10%.

9. La solicitările de întindere, compresiune sau încovoiere prin șoc orizontal, relația (13.14) devine:

$$\psi = \frac{v}{\sqrt{g \delta_{st}}} \quad (13.18)$$

10. În cele stabilite anterior s-a presupus că masa barei care suportă șocul este neglijabilă. Dacă se ține seamă și de masa barei, formula (13.13) devine:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}(1+k)}}, \quad (13.19)$$

unde k are, pentru cîteva cazuri mai importante, valorile de mai jos:

a) Pentru bara supusă la întindere (compresiune):

$$k = \frac{G}{3P}, \quad (13.20)$$

unde:

G este greutatea barei; P — greutatea sarcinii care cade pe bară.

b) Pentru o bară încastrată la un capăt și liberă la celălalt, solicitată la încovoiere prin șoc de o sarcină concentrată care cade pe capătul liber:

$$k = \frac{33}{140} \frac{P}{G} \quad (13.21)$$

c) Pentru grinda simplu rezemată la capete, lovită la mijloc:

$$k = \frac{17G}{35P} \quad (13.22)$$

La șocul orizontal relația (13.19) devine:

$$\psi = \frac{v}{\sqrt{g \delta_{st}(1+k)}} \quad (13.23)$$

11. Energia de deformare a unei bare de secțiune circulară, solicitată la răsucire, în funcție de efortul unitar maxim care apare în bară, este dată de relația.

$$E_d = \frac{1}{2} \frac{\tau_{\max}^2}{2G} V, \quad (13.24)$$

în care V este volumul barei torsionate.

B. PROBLEME REZOLVATE

13.1. Bara cotită OAB din figura 13.1, a (unde AB este arc de cerc) se rotește cu viteza unghiulară ω în planul ei, în jurul punctului O . Se cere să se construiască diagramele N , T , M datorite forțelor de inerție.

Rezolvare. Dacă pe porțiunea AB se consideră un element de masă dm ca în figura 13.1, a , forța sa de inerție este:

$$dF = a \cdot dm = R\omega^2 \frac{\gamma A R d\varphi}{g} = \frac{\gamma A R^3 \omega^2 d\varphi}{g} (1 + \sqrt{2}) \frac{k}{2}$$

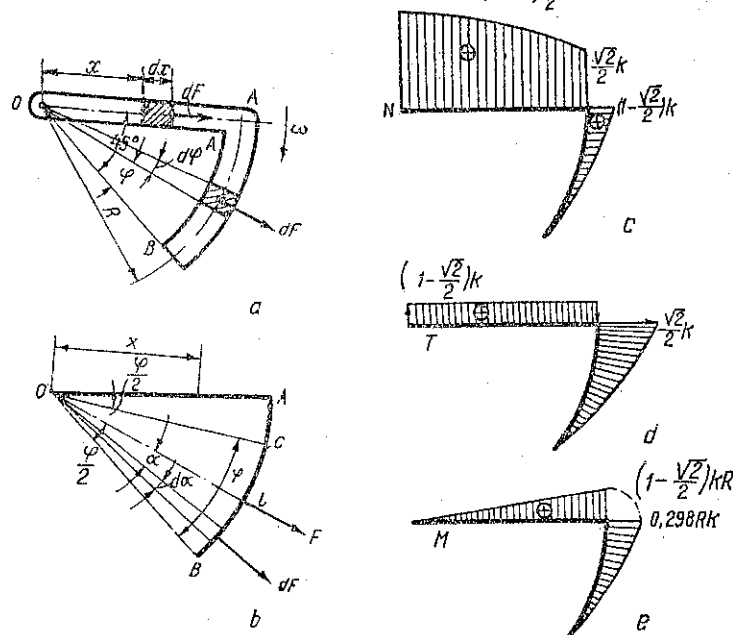


Fig. 13.1

Pentru a calcula mărimile N , T , M în secțiunea φ (Fig. 13.1, a), se determină valoarea forței F care este rezultanta forțelor de inerție de pe unghiul φ și este aplicată pe bisectoarea OD din figura 13.1, b . În acest scop, se introduce o nouă variabilă, α , și se proiectează forțele dF pe direcția OD .

$$F = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{+\frac{\varphi}{2}} dF \cos \alpha = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{+\frac{\varphi}{2}} \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{g} \cos \alpha d\alpha = \frac{2\gamma A R^3 \omega^2}{g} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Se pot calcula mărimile N , T , M , în secțiunea C (Fig. 13.1, b):

$$T_{AB} = F \cdot \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{g} 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{g} \sin \varphi,$$

$$N_{AB} = F \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{g} 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{g} (1 - \cos \varphi),$$

$$M_{AB} = \frac{2\gamma A R^3 \omega^2}{g} \sin \frac{\varphi}{2} R \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{g} (1 - \cos \varphi).$$

Dacă, pentru simplificare, se notează.

$$\frac{\gamma A R^3 \omega^2}{g} = k,$$

cele trei ecuații devin:

$$T_{AB} = k \sin \varphi;$$

$$N_{AB} = k(1 - \cos \varphi);$$

$$M_{AB} = kR(1 - \cos \varphi).$$

Cu ajutorul acestor ecuații, se construiesc diagramele N , T , M (Fig. 13.1, c , d , e) pentru partea curbă a barei. Valorile maxime au loc în colțul A , pentru $\varphi = 45^\circ$:

$$N_A = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)k; \quad T_A = \frac{\sqrt{2}}{2}k; \quad M_A = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)kR.$$

Pe porțiunea rectilime OA , într-o secțiune oarecare x pentru un element de masă dm (Fig. 13.1, a) forța de inerție este:

$$dF = a \cdot dm = x\omega^2 \cdot \frac{\gamma A dx}{g} \quad (1)$$

Rezolvare. Elementele geometrice ale secțiunii, conform figurii 13.3, b sînt :

$$A = 0,8 \cdot 2,1 + 2 \left(1,8 \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 0,2 \right) = 3,48 \text{ cm}^2;$$

$$I_x = \frac{0,8 \cdot 2,1^3}{12} + 2 \left[\frac{1,8 \cdot 0,4^3}{12} + 1,8 \cdot 0,4 \cdot 1,25^2 + \frac{1,8 \cdot 0,2^3}{36} + 1,8 \cdot \frac{0,2}{2} \cdot 1,52^2 \right] = 3,845 \text{ cm}^4;$$

$$W = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{3,845}{1,65} = 2,33 \text{ cm}^3.$$

Forța pe piston la punctul mort este :

$$P_{max} = \frac{\pi d^2}{4} p_{max} = \frac{\pi \cdot 10,5^2}{4} \cdot 25 = 2160 \text{ daN}.$$

Efortul unitar de compresiune la punctul mort este :

$$\sigma = \frac{P_{max}}{A} = \frac{2160}{3,48} = 621 \text{ daN/cm}^2. \quad (1)$$

Viteza unghiulară este :

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 125,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Efortul unitar de încovoiere produs de încărcarea bielei ca în figura 13.3, a este :

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{M_{imax}}{W_z} = \frac{f_i l^2}{9\sqrt{3} \cdot W_z} = 0,064 \cdot \frac{f_i l^2}{W_z} = 0,064 \cdot \frac{\gamma A l^2 r \omega^2}{g \cdot W_z} = \\ &= 0,064 \cdot \frac{7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 3,48 \cdot 31^2 \cdot 6,5 \cdot 125,7^2}{981 \cdot 2,33} = 76 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned}$$

Efortul unitar de compresiune, datorit unei forțe $\frac{1}{2} P_{max}$ este :

$$\sigma_c = \frac{1}{2} 621 = 310,5 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar rezultat este :

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_i = 386,5 \text{ daN/cm}^2. \quad (2)$$

Se vede că în a doua alternativă de calcul, efortul unitar este mai mic decît în prima. Dacă se mărește turația, de exemplu, de trei ori, efortul unitar de încovoiere crește de $3^2=9$ ori și se ajunge la o valoare rezultantă $\sigma = 994 \text{ daN/cm}^2$. Rezultă de aici că la turații mari trebuie să se țină seamă neapărat de solicitarea la încovoiere produsă de forțele de inerție.

13.4. Sistemul de bare articulate $ABCD$ din figura 13.4 se rotește cu o viteză unghiulară mare ω în jurul axei verticale AD . Barele orizontale au greutatea $g \text{ daN/cm}$, iar cea verticală $p \text{ daN/cm}$. Se cer eforturile maxime (forțe axiale și momente încovoietoare) care se produc în bare.

Rezolvare. Din cauza turației mari, greutatea sînt neglijabile față de forțele de inerție, ceea ce face ca poziția de echilibru relativ a sistemului să fie cea din figura 13.4.

Pe bara verticală, forța de inerție pentru un element de lungime dx este :

$$dF = a \, dm = r \omega^2 \frac{p \, dx}{g},$$

iar pe unitate de lungime este :

$$f_1 = \frac{dF}{dx} = \frac{pr\omega^2}{g} \quad (1)$$

Aceasta este o sarcină uniform distribuită, care dă un moment maxim în mijlocul barei :

$$M_{max} = \frac{f_1 l^2}{8} = \frac{prl^2\omega^2}{8g} \quad (2)$$

Forțele de inerție ale barei BC dau în B și C câte o forță de întindere a barelor orizontale :

$$F_B = F_C = \frac{F_{iBC}}{2} = \frac{prl\omega^2}{2g} \quad (3)$$

Forțele de inerție proprii ale barelor orizontale dau în A și D forțe de întindere care se calculează cu relația (1) de la problema 13.1, în care se înlocuiește $\gamma A = g$:

$$F_A = F_D = \frac{g \cdot \omega^2}{g} \int_0^r x \, dx = \frac{gr^2\omega^2}{2g} \quad (4)$$

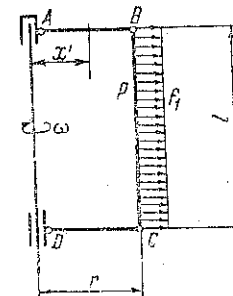
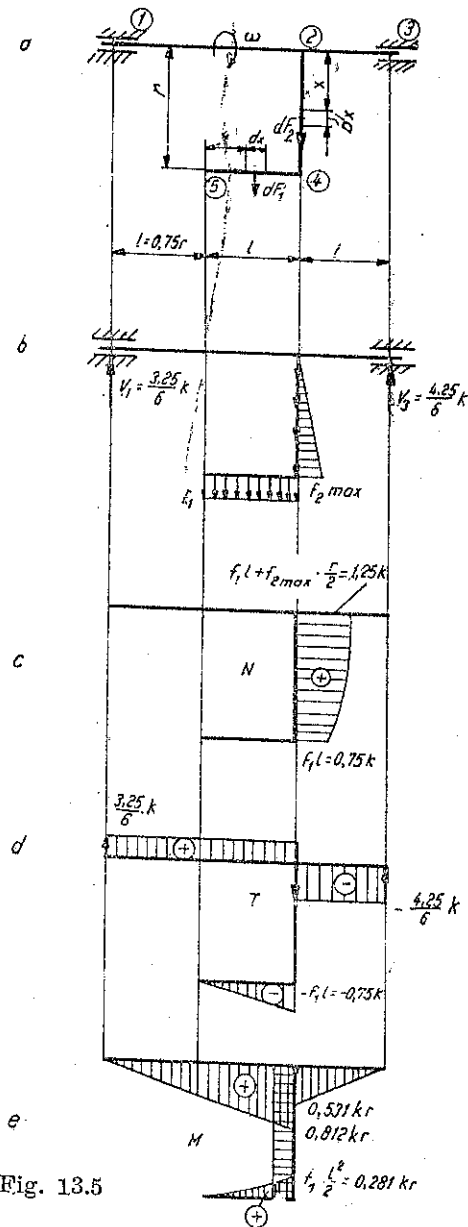


Fig. 13.4



Forța axială totală în A și D este suma valorilor (3) și (4)

$$N_A = N_D = \frac{r\omega^2}{2g} (pl + qr). \quad (5)$$

13.5. Sistemul de bare din figura 13.5, a se rotește cu o viteză unghiulară constantă ω în jurul axei orizontale 1-2-3. Toate barele au aceeași greutate q pe unitatea de lungime. Se cere să se traseze diagramele N , T și M , ținând seama numai de efectul forțelor de inerție.

Rezolvare. Se scrie expresia forței de inerție pe fiecare interval:

— intervalul 5-4:

$$dF_1 = \frac{q}{g} dx r \omega^2$$

sau

$$f_1 = \frac{dF_1}{dx} = \frac{q}{g} r \omega^2 = \frac{k}{r}$$

unde s-a notat

$$k = \frac{qr^2\omega^2}{g}$$

Deci, forța de inerție acționează perpendicular pe bară ca o sarcină uniform distribuită (Fig. 13.5, b).

— intervalul 4-2:

$$dF_2 = \frac{q}{g} dx \cdot x\omega^2$$

sau

$$f_2 = \frac{dF_2}{dx} = \frac{q \cdot \omega^2}{g} x.$$

Forța de inerție, f_2 , acționează în lungul axei barei ca o sarcină ce variază linear (Fig. 13.5, b), fiind maximă în punctul 4 și având valoarea

$$f_{2max} = \frac{q\omega^2 r}{g} = \frac{k}{r}.$$

În figura 13.5, b s-a reprezentat variația liniară a forței de inerție f_2 pe bară 2-4.

Cu încărcările din figura 13.5, b se trasează diagramele de eforturi din figurile 13.5, c, d, e .

13.6. Un semicerc de rază R se rotește în jurul unui ax vertical, cu viteza unghiulară ω . Se cere să se construiască diagrama momentelor încovoietoare (luând în considerare numai forțele de inerție) dacă masa semicercului este:

a) concentrată în punctul A (Fig. 13.6, a);

b) uniform repartizată pe toată lungimea (Fig. 13.6, b).

Rezolvare. a) Forța de inerție care se produce datorită masei m în mișcare de rotație este:

$$F = mR\omega^2.$$

Momentul încovoietor în secțiunea φ (Fig. 13.6, a) are expresia:

$$M_\varphi = -\frac{F}{2} R (1 - \cos \varphi) = -\frac{1}{2} m R^2 \omega^2 (1 - \cos \varphi).$$

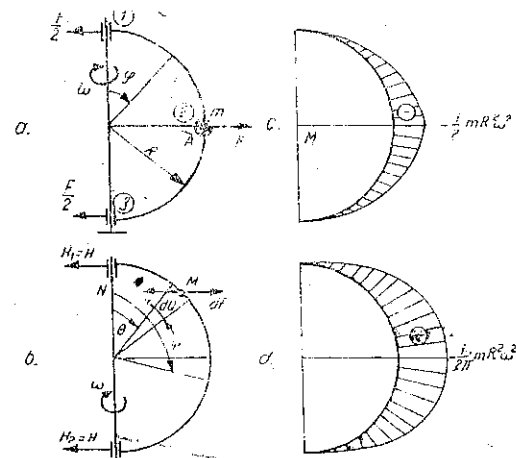
Diagrama de momente este dată în figura 13.6, c .

b) Într-o secțiune oarecare a semicercului făcând unghiul θ cu axa verticală (Fig. 13.6, b) se produce o accelerație a , dirijată pe raza MN a cercului descris de punctul M .

$$a = \omega^2 \cdot MN = \omega^2 R \sin \theta.$$

Într-un element de masă dm din jurul punctului M , această accelerație produce o forță de inerție:

$$df = a \cdot dm = \omega^2 R \sin \theta \cdot \frac{\gamma A}{g} R d\theta.$$



Ecuția de proiecții pe orizontală conduce la calculul reacțiunilor H_1 și H_2 :

$$H_1 + H_2 = \int_0^\pi df = \int_0^\pi \gamma \frac{A}{g} R^2 \omega^2 \sin \theta d\theta = \frac{2\gamma A}{g} R^2 \omega^2.$$

Datorită simetriei, $H_1 = H_2 = H = \frac{\gamma A}{g} R^2 \omega^2$.

În secțiunea φ , (Fig. 13.6, b), momentul încovoietor are expresia:

$$\begin{aligned} M_\varphi &= -H(R - R \cos \varphi) + \int_0^\varphi \frac{\gamma A}{g} \omega^2 R^2 \sin \theta \cdot R[(1 - \cos \varphi) - (1 - \cos \theta)] d\theta = \\ &= -\frac{\gamma A}{g} R^3 \omega^2 (1 - \cos \varphi) + \frac{\gamma A}{g} R^3 \omega^2 \int_0^\varphi (\sin \theta \cos \theta - \sin \theta) \cos \varphi d\theta = \\ &= \frac{\gamma A}{g} R^3 \omega^2 \cdot \frac{\cos 2\varphi - 1}{4}. \end{aligned}$$

Diagrama de momente este dată în figura 13.6, d. Știind că masa totală este

$$m = \frac{\gamma V}{g} = \frac{\gamma A \pi R}{g},$$

expresia momentului M_φ devine

$$M_\varphi = \frac{m}{\pi} R^2 \omega^2 \cdot \frac{\cos 2\varphi - 1}{4}.$$

Comparând rezultatele din cele două cazuri, se constată că la schema din figura 13.6, a momentul încovoietor este mai mare decât la schema 13.6, b.

13.7. Inelul subțire, de diametru mediu $2R$ și secțiune A , reprezentat în figura 13.7, a se rotește cu o viteză unghiulară constantă ω în jurul axei verticale. Dacă se neglijează greutatea proprie, se cere să se construiască diagrama momentelor încovoietoare datorite forțelor de inerție.

Rezolvare. Inelul se deformează ca în figura 13.7, b.

Într-o secțiune oarecare a inelului, făcând un unghi θ cu diametrul orizontal — figura 13.7, a — se produce o accelerație a , dirijată pe raza MC a cercului descris de punctul M :

$$a = MC \cdot \omega^2 = R \omega^2 \cos \theta.$$

Într-un element de masă dm din jurul punctului M , această accelerație produce o forță de inerție:

$$df = a \cdot dm = R \omega^2 \cos \theta \frac{\gamma A ds}{g}.$$

Pe unitatea de lungime a arcului de cerc, forța de inerție este:

$$f = \frac{df}{ds} = \frac{\gamma A R \omega^2 \cos \theta}{g}. \quad (1)$$

Forța f se poate descompune pe tangentă și normală, în f_2 și f_1 și se poate proceda la calcularea mărimilor N , T , M . Astfel, pentru calcularea

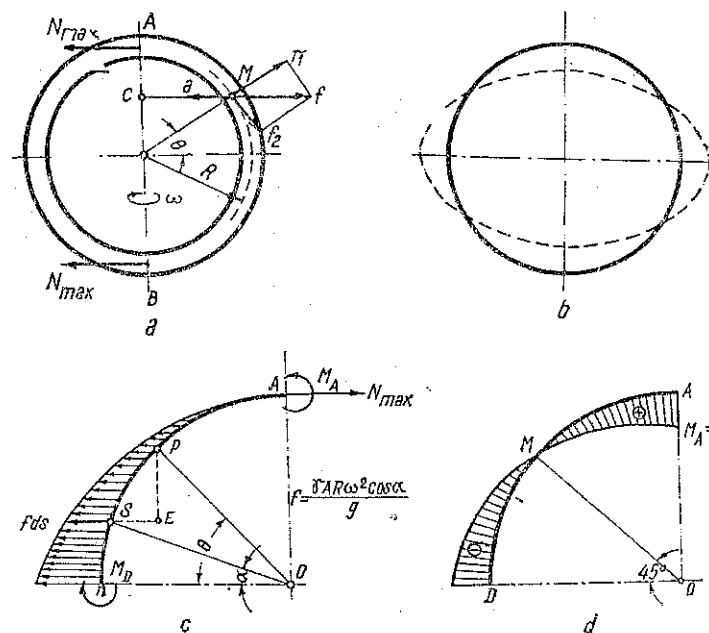


Fig. 13.7

forței axiale maxime din A și B , se consideră inelul tăiat prin planul AB și se scrie o ecuație de proiecții pe orizontală:

$$\begin{aligned} 2N_{max} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f R d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\gamma A R^2 \omega^2 \cos \theta d\theta}{g} = \frac{2\gamma A R^2 \omega^2}{g}; \\ N_{max} &= \frac{\gamma A R^2 \omega^2}{g}. \quad (2) \end{aligned}$$

Calculul momentelor încovoietoare este o problemă static nedeterminată. Se consideră un sfert de inel, ca în figura 13.7, c, încărcat cu forțele de inerție f și având în punctele de secționare A , D , eforturile N , T , M . Întrucât forța N_{max} echilibrează forțele de inerție de pe sfertul de cerc, rezultă că în D nu există forță tăietoare (orizontală). De asemenea, din motive de simetrie, în D nu există forță axială, ceea ce face ca în A să nu existe forță tăietoare. În A și D s-au aplicat momentele M_D și M_A , alese cu sensurile din desen.

Trebuie exprimat momentul încovoietor într-o secțiune oarecare P , care face un unghi θ cu orizontala. Pentru aceasta se ia alt unghi α variabil față de θ și se scrie:

$$M = M_P = M_D + \int_0^\theta f ds \overline{PE} = M_D + \int_0^\theta \frac{\gamma A R \omega^2 \cos \alpha}{g} R d\alpha \cdot R (\sin \theta - \sin \alpha),$$

$$M = M_D + \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{g} \int_0^\theta (\cos \alpha \sin \theta - \cos \alpha \sin \alpha) d\alpha,$$

$$M = M_D + \frac{\gamma A R^3 \omega^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (3)$$

Valoarea momentului static nedeterminat M_D se determină prin teorema lui Castigliano:

$$\frac{\partial L}{\partial M_D} = \frac{4}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M \frac{\partial M}{\partial M_D} R d\theta = 0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_D} = 1$$

$$\frac{4}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(M_D + \frac{\gamma A R^3 \omega^2 \sin^2 \theta}{2g} \right) R d\theta = 0,$$

$$\left| M_D \theta + \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{2g} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$M_D = - \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{4g} \quad (4)$$

Înlocuind această valoare în formula (3), rezultă:

$$M = - \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{4g} + \frac{\gamma A R^3 \omega^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{2g} \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right). \quad (5)$$

Cu ajutorul acestei relații, se construiește diagrama momentelor încovoietoare. Se vede că momentul se anulează la $\theta = 45^\circ$. În punctul A , pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, momentul are valoarea

$$M_A = \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{4g} \quad (6)$$

adică este egal și de sens contrar celor din D . Diagrama de momente este reprezentată în figura 13.7, d .

13.8. Dacă inelul subțire studiat la problema 13.7 are axa de rotație AB tangentă la contur (Fig. 13.8), să se construiască diagrama momentelor încovoietoare datorite forțelor de inerție, cînd inelul de rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul acestei axe.

Rezolvare. Se stabilește, ca și în cazul din problema 13.7, forța de inerție pe unitatea de lungime a arcului de cerc, într-o secțiune care face unghiul θ cu diametrul perpendicular pe axa de rotație:

$$f = \frac{\gamma A}{g} r \omega^2 = \frac{\gamma A}{g} R \omega^2 (1 - \cos \theta). \quad (1)$$

În punctul O apare forța F de legătură dintre axă și inel, care este egală cu rezultanta forțelor de inerție

$$\overline{F} = \int_0^{2\pi} f(\theta) ds = 2 \int_0^{\pi} \frac{\gamma A}{g} R \omega^2 (1 - \cos \theta) R d\theta = \frac{2\pi \gamma A R^2 \omega^2}{g} \quad (2)$$

Sistemul din figura 13.8, a este un contur închis, de trei oari static nedeterminat, cu o axă de simetrie (diametrul OC) ceea ce permite reducerea gradului de nedeterminare cu o unitate.

Necunoscutele static nedeterminate se pun în evidență prin secționarea inelului cu un plan care conține axa de simetrie (Fig. 13.8, b). În secțiunea C forța tăietoare este nulă, iar expresiile eforturilor M_c și N_c în funcție de necunoscutele X_1 și X_2 se determină din ecuații de echilibru:

$$N_c - X_1 = 0$$

$$M_c - \int_0^\pi f(\theta) ds R \sin \theta - X_2 + X_1 \cdot 2R = 0.$$

Rezultă:

$$N_c = X_1 \quad (3)$$

$$M_c = X_2 - X_1 \cdot 2R + \frac{2\gamma A R^3 \omega^2}{g} = X_2 - X_1 \cdot 2R + \frac{FR}{\pi} \quad (4)$$

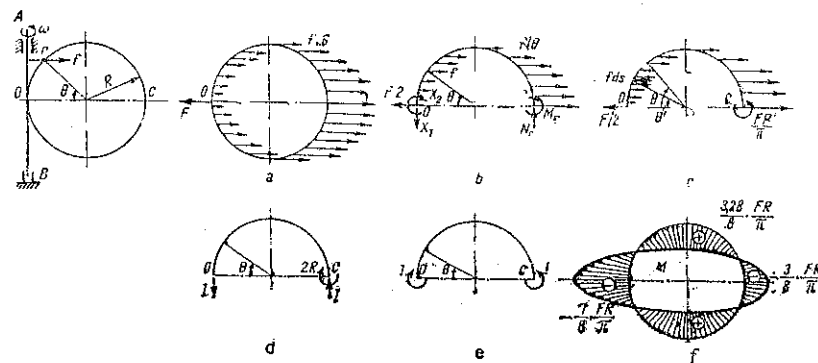


Fig. 13.8

Sistemul de ecuații care dă necunoscutele static nedeterminate are forma :

$$\delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = 0$$

$$\delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = 0.$$

Coefficienții se calculează cu ajutorul sistemelor auxiliare reprezentate în figurile 13.8, c, d, e. În secțiunea C s-au introdus eforturile necesare ca bara să rămână în echilibru sub acțiunea forțelor aplicate asupra ei, în fiecare caz de încărcare.

Momentele încovoietoare necesare la calculul coeficienților $\delta_{10}, \dots, \delta_{22}$ au expresiile (Fig. 13.8, c, d, e) :

$$\begin{aligned} M^0(\theta) &= \frac{FR}{2} R \sin \theta \int_0^\theta f(\theta') ds (R \sin \theta - R \sin \theta') = \\ &= \frac{FR}{2} R \sin \theta \cdot \frac{\gamma A}{g} R^3 \omega^2 \left[\int_0^\theta (1 - \cos \theta') \sin \theta d\theta' - \int_0^\theta (1 - \cos \theta') \sin \theta' d\theta' \right] = \\ &= \frac{FR}{2\pi} \left[(\pi - \theta) \sin \theta - \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2} + 1 \right] \end{aligned}$$

$$m_1(\theta) = -R(1 - \cos \theta)$$

$$m_2(\theta) = 1.$$

Coefficienții $\delta_{10}, \dots, \delta_{22}$ se calculează prin integrare :

$$EI \delta_{10} = \int_0^\pi M^0(\theta) m_1(\theta) ds = -\frac{5}{4} FR^3$$

$$EI \delta_{20} = \int_0^\pi M^0(\theta) m_2(\theta) ds = \frac{9}{8} FR^2$$

$$EI \delta_{11} = \int_0^\pi m_1^2(\theta) ds = \frac{3}{2} \pi R^3$$

$$EI \delta_{12} = \int_0^\pi m_1(\theta) m_2(\theta) ds = -\pi R^2$$

$$EI \delta_{22} = \int_0^\pi m_2^2(\theta) ds = \pi R.$$

Înlocuind expresiile (6) în sistemul (5) se obține :

$$-\frac{5}{4} FR^3 + X_1 \cdot \frac{3}{2} \pi R^3 - X_2 \cdot \pi R^2 = 0$$

$$\frac{9}{8} FR^2 - X_1 \cdot \pi R^2 + X_2 \cdot \pi R = 0.$$

Soluțiile sistemului (7) sînt :

$$X_1 = \frac{FR}{4\pi}, \quad X_2 = -\frac{7FR}{8\pi}.$$

Expresia momentului încovoietor într-o secțiune oarecare a inelului solicitat prin forțe de inerție se obține utilizînd relația (11.3) :

$$\begin{aligned} M(\theta) &= M^0(\theta) + X_1 \cdot m_1(\theta) + X_2 m_2(\theta) = \\ &= \frac{FR}{8\pi} [4(\pi - \theta) \sin \theta - 2 \cos \theta + 2 \sin^2 \theta - 5]. \end{aligned}$$

Diagrama de momente încovoietoare este prezentată în figura 13.8, f.

13.9. Un volant, considerat ca o coroană circulară de grosime mică și rază medie R , avînd secțiunea obezii A , este montat, din greșeală, înclinat cu unghiul θ față de planul normal pe arbore, așa cum se arată în figura 13.9. Să se calculeze momentul încovoietor produs din această cauză în arbore, precum și efortul unitar cauzat de acest moment. Aplicație numerică : $A = 240 \text{ cm}^2$, $R = 100 \text{ cm}$, $\omega = 31,4 \text{ rad/s}$, $\gamma = 7,25 \cdot 10^{-3} \text{ daN/cm}^3$, $\theta = \frac{1^\circ}{2}$, diametrul arborelui $d = 10 \text{ cm}$. Volantul este așezat în consolă.

Rezolvare. Asupra unui element de masă lucrează o forță de inerție radială :

$$df = a \cdot dm = R \omega^2 \frac{\gamma A R d\alpha}{g} = \frac{\gamma A R^2 \omega^2 d\alpha}{g}.$$

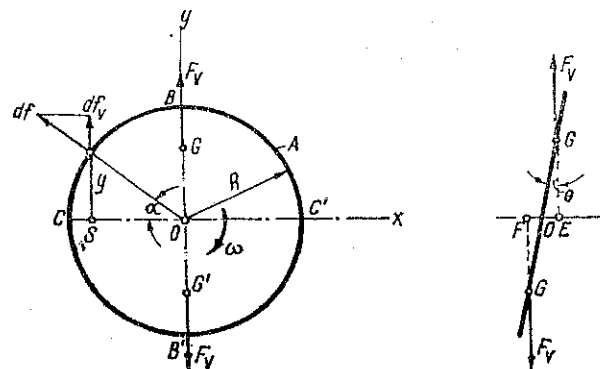


Fig 13.9

Ea are o componentă verticală

$$df_v = df \sin \alpha = \frac{\gamma A R^2 \omega^2 \sin \alpha d\alpha}{g}$$

Pentru o jumătate din volant, aceste forțe verticale de inerție dau o rezultantă F_v :

$$F_v = \int_0^\pi df_v = \int_0^\pi \frac{\gamma A R^2 \omega^2}{g} \sin \alpha d\alpha = \frac{2\gamma A R^2 \omega^2}{g} \quad (1)$$

Punctul de aplicație G al acestei forțe se află prin teorema momentelor statice:

$$OG = \frac{\int df_v y}{F_v} = \frac{\int_0^\pi \frac{\gamma A R^2 \omega^2}{g} \sin \alpha d\alpha \cdot R \sin \alpha}{\frac{2\gamma A R^2 \omega^2}{g}} = \frac{\pi R}{4}$$

Conform figurii 13.9, momentul forțelor F_v față de punctul O este:

$$M = F_v \cdot EF = F_v \cdot 2OG \sin \theta = \frac{2\gamma A R^2 \omega^2}{g} \cdot \frac{\pi R}{2} \sin \theta$$

$$M = \frac{\pi \gamma A R^3 \omega^2 \sin \theta}{g} \quad (2)$$

Acesta este cuplul pe care volantul înclinat îl produce asupra arborelui. Efortul unitar produs de el este

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{\pi \gamma A R^3 \omega^2 \sin \theta}{g} \cdot \frac{32}{\pi d^3} = \frac{32 \gamma R^3 \omega^2 \sin \theta}{g d^3} \quad (3)$$

În cazul aplicației numerice, rezultă:

$$\sin \theta = \sin 30' = 0,00873,$$

$$\sigma = \frac{32 \cdot 7,25 \cdot 10^{-3} \cdot 240 \cdot 100^3 \cdot 31,4^2 \cdot 0,00873}{981 \cdot 10^3} = 487 \text{ daN/cm}^2.$$

Se vede că rezultă o valoare destul de mare, care, adăugându-se solicitării utile a arborelui, poate fi periculoasă. Rezultă necesitatea unui montaj cât mai corect al volantului pe arbore.

13.10. Paleta unei turbine are secțiunea variabilă liniar, după relația:

$$A = A_1 + (A_2 - A_1) \frac{r - R_1}{l}$$

Să se calculeze efortul unitar în secțiunea A_1 dacă se dau: $R_1 = 60$ cm, $R_2 = 90$ cm, lungimea paletelor $l = R_2 - R_1 = 30$ cm, rotația discului $n = 3000$ rot/min, raportul între secțiunea maximă și cea minimă $\frac{A_1}{A_2} = 1,6$ (Fig. 13.10).

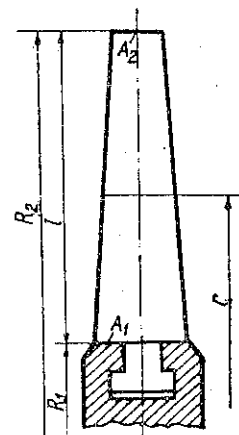


Fig. 13.10

Rezolvare. Forța de inerție maximă se obține din relația (1), problema 13.1, înlocuind α cu r și efectuând integrarea pe toată lungimea paletelor:

$$N_{max} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\gamma A r \omega^2 dr}{g} = \frac{\gamma \omega^2}{g} \int_{R_1}^{R_2} \left[A_1 + (A_2 - A_1) \frac{r - R_1}{l} \right] r dr$$

Integrând se obține:

$$N_{max} = \frac{\gamma \omega^2 l}{g} \left\{ \left[A_1 - \frac{R_1}{l} (A_2 - A_1) \right] \frac{R_1 + R_2}{2} + \frac{A_2 - A_1}{l} \frac{R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2}{3} \right\} = \frac{\gamma \omega^2 l}{6g} [(2R_1 + R_2)A_1 + (2R_2 + R_1)A_2] \quad (1)$$

Efortul unitar în secțiunea A_1 este:

$$\sigma_1 = \frac{N_{max}}{A_1} = \frac{\gamma \omega^2 l}{6g} \left[2R_1 + R_2 + (2R_2 + R_1) \frac{A_2}{A_1} \right] \quad (2)$$

Înlocuind datele numerice se obține:

$$\sigma_1 = \frac{7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 314^2 \cdot 30}{6 \cdot 981} \left[2 \cdot 60 + 90 + (2 \cdot 90 + 60) \frac{1}{1,6} \right] = 1420 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$$

13.11. Să se determine variația eforturilor unitare σ_r și σ_t la un disc de oțel de grosime constantă, avind raza exterioară $R_2 = 750$ mm, raza interioară $R_1 = 150$ mm, dacă discul se rotește cu $n = 2000$ rot/min.

Rezolvare. Variația eforturilor unitare σ_r se obține din relația (13.4), unde $p_1 = p_2 = 0$:

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} \left(R_2^2 + R_1^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \right) \quad (1)$$

Efortul unitar la exteriorul discului se obține înlocuind $r = R_2$:

$$(\sigma_{t2})_{r=R_2} = \frac{\gamma \omega^2}{4g} [(3+\nu) R_1^2 + (1-\nu) R_2^2] =$$

$$= \frac{7,85 \cdot 210^2}{1\,000 \cdot 4 \cdot 981} [(3+0,3) \cdot 15^2 + (1-0,3) \cdot 75^2] = 413 \text{ daN/cm}^2$$

unde:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 2\,000}{30} = 210 \text{ rad/s.}$$

Efortul unitar la interiorul discului:

$$(\sigma_{t1})_{r=R_1} = \frac{\gamma \omega^2}{4g} [(3+\nu) R_2^2 + (1-\nu) R_1^2] =$$

$$= \frac{7,85 \cdot 210^2}{1\,000 \cdot 4 \cdot 981} [(3+0,3) \cdot 75^2 + (1-0,3) \cdot 15^2] = 1\,650 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar σ_r este nul în punctele extreme, deoarece $p_i = p_e = 0$. Variația efortului unitar σ_r se obține din formula (13.3):

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \left(R_2^2 + R_1^2 - r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \right). \quad (2)$$

Pentru determinarea efortului unitar σ_r maxim se derivează formula (2) și se anulează derivata:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} \left(-2r + \frac{2R_1^2 R_2^2}{r^3} \right) = 0,$$

de unde:

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} (R_2^2 - R_1^2)^2 \quad r = \sqrt[4]{R_1^2 R_2^2} = \sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{15 \cdot 75} =$$

$$= 33,6 \text{ cm.} \quad (3)$$

Înlocuind valoarea (3) în relația (2) se obține valoarea maximă a lui σ_r ,

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{\gamma \omega^2}{4g} [R_2^2(3+\nu) + R_1^2(1-\nu)]$$

$$(\sigma_r)_{\max, r=\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{3+\nu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} (R_2 - R_1)^2 =$$

$$= \frac{3+0,3}{8} \cdot \frac{7,85 \cdot 210^2}{1\,000 \cdot 981} (75 - 15)^2 =$$

$$= 525 \text{ daN/cm}^2. \quad (4)$$

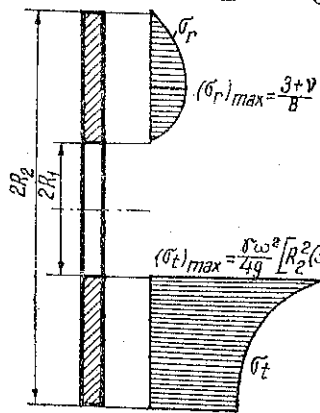


Fig. 13.11

Cu aceste valori și ținând seamă de relațiile (1) și (2) se trasează diagramele de variație a eforturilor unitare σ_r și σ_t (Fig. 13.11). Din diagrame se vede că efortul unitar maxim este $\sigma_{t1} = 1\,650 \text{ daN/cm}^2$.

13.12. Să se determine grosimea minimă necesară h a discului de oțel al unui ventilator, astfel ca efortul unitar maxim să nu depășească $\sigma_{t\max} = 1\,000 \text{ daN/cm}^2$. Se dau: raza exterioară a discului $R_2 = 25 \text{ cm}$; raza interioară $R_1 = 5 \text{ cm}$; turația ventilatorului $n = 3\,800 \text{ rot/min}$. Discul are $z = 12$ palete, care, datorită inerției, acționează fiecare cu o forță $P = 920 \text{ daN}$.

Rezolvare. Efortul unitar $\sigma_{t\max}$ se obține din relația (13.4), pentru $r = R_1$ și înlocuind, pentru cazul din problemă, $p_i = 0$:

$$\sigma_{t\max} = \frac{\gamma \omega^2}{4g} [R_2^2(3+\nu) + R_1^2(1-\nu)] + \frac{2p_e R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

Înlocuind valorile cunoscute, se obține:

$$1\,000 = \frac{7,85}{1\,000} \frac{\left(\frac{\pi \cdot 3\,800}{30} \right)^2}{4 \cdot 981} [25^2(3+0,3) + 5^2(1-0,3)] + \frac{2p_e \cdot 25^2}{25^2 - 5^2}$$

$$1\,000 = 655 + 2,08 p_e,$$

$$p_e = 165 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar la periferia discului, dat de forța de inerție a paletelor, este:

$$p_e = \frac{zP}{2\pi R_2 h}$$

Grosimea h este atunci:

$$h = \frac{zP}{2\pi R_2 p_e} = \frac{12 \cdot 920}{2 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 165} = 0,425 \text{ cm.}$$

Valoarea h , astfel obținută, este grosimea minimă necesară a discului.

13.13. Pentru ca în timpul funcționării discul unui ventilator să păstreze contactul cu arborele pe care este așezat, se fretează discul pe arbore. Să se calculeze grosimea de fretaj pentru disc, dacă se dau: raza exterioară $R_2 = 50 \text{ cm}$, raza interioară $R_1 = 10 \text{ cm}$, turația $n = 2\,000 \text{ rot/min}$. În timpul funcționării trebuie să existe între disc și arbore o presiune $p = 50 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Se notează cu $2R_1$ diametrul interior al discului și cu $2R'_1$ diametrul exterior al arborelui, u_1 deplasarea radială a discului și u'_1 deplasarea radială a arborelui. Condiția de deformare pentru ansamblul format de arbore și disc este:

$$2R_1 + 2u_1 = 2R'_1 + 2u'_1.$$

Grosimea de fretaj este :

$$\delta = R'_1 - R_1 = u_1 - u'_1. \quad (1)$$

Deplasările radiale se pot scrie, conform formulei (13.5) :

$$u_1 = \frac{R_1}{E} (\sigma_{r1} - \nu \sigma_{\theta1}); \quad (2)$$

$$u'_1 = \frac{R_1}{E} (\sigma'_{r1} - \nu \sigma'_{\theta1}). \quad (3)$$

Introducând valorile (2) și (3) în relația (1) se obține :

$$\delta = u_1 - u'_1 = \frac{R_1}{E} (\sigma_{r1} - \nu \sigma_{\theta1} - \sigma'_{r1} + \nu \sigma'_{\theta1}). \quad (4)$$

Deoarece în punctul de contact dintre disc și arbore se cunosc eforturile unitare $\sigma_r = \sigma'_{r1} = p$, relația (4) devine :

$$\delta = \frac{R_1}{E} (\sigma_{\theta1} - \sigma'_{\theta1}). \quad (5)$$

Eforturile unitare $\sigma_{\theta1}$ și $\sigma'_{\theta1}$ depind de presiunea p dintre disc și arbore. În cazul din problemă, efortul unitar $\sigma_{\theta1}$ din disc se obține din relația (13.7). Înlocuind $r = R_1$, $p_r = 0$ și $p_t = p = 50 \text{ daN/cm}^2$:

$$\sigma_{\theta1} = \frac{\gamma \omega^2}{4g} [R_2^2(3 + \nu) + R_1^2(1 - \nu)] + p \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (6)$$

Efortul unitar $\sigma'_{\theta1}$ la exteriorul arborelui este dat de relația (13.7), în care se înlocuiește R_2 cu R_1 , $p_r = -p = -50 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$ (pentru a se ține seama de sensul real al efortului unitar) și $r = R_1$

$$\sigma'_{\theta1} = R_1^2(1 - \nu) \frac{\gamma \omega^2}{4g} - p. \quad (7)$$

Făcând înlocuiri, rezultă

$$\delta = \frac{R_1}{E} (\sigma_{\theta1} - \sigma'_{\theta1}) = \frac{R_1 R_2^2}{E} \left[\frac{\gamma \omega^2}{4g} (3 + \nu) + \frac{2p}{R_2^2 - R_1^2} \right]. \quad (8)$$

Înlocuind datele numerice se obține :

$$\delta = \frac{10 \cdot 50^2}{2,1 \cdot 10^6} \left[\frac{7,85}{1000} \left(\frac{\pi \cdot 2000}{30} \right)^2 \frac{(3 + 0,3)}{4 \cdot 981} + \frac{2 \cdot 50}{50^2 - 10^2} \right] =$$

$$= 3,94 \cdot 10^{-3} \approx 4 \cdot 10^{-3} = 0,004 \text{ cm} = 0,04 \text{ mm}.$$

Diametrul arborelui trebuie să fie :

$$2R'_1 = 2R_1 + 2\delta = 2 \cdot 100 + 2 \cdot 0,04 = 200,08 \text{ mm}.$$

Efortul unitar maxim în disc se obține din formula (6) :

$$\sigma_{\theta1} = \frac{7,85}{1000} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 2000}{30} \right)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot 981} [50^2(3 + 0,3) + 10^2(1 - 0,3)] +$$

$$+ 50 \frac{50^2 + 10^2}{50^2 - 10^2} = 793 \text{ daN/cm}^2.$$

13.14. Grosimea discului din figura 13.14, a variază brusc, de la h la h' , la distanța R de la centru. Să se calculeze — pe baza condițiilor de echilibru și continuitate a deformației unui element de volum izolat din disc — variația eforturilor unitare, σ_r și σ_t , datorită saltului de grosime, produsă în zona unde are loc acest salt.

Rezolvare. a) Variația efortului unitar σ_r se determină pe baza condiției de echilibru a elementului de volum izolat din disc, ca în figura 13.14, b , unde s-au notat cu σ_r și σ_t eforturile unitare corespunzătoare porțiunii de grosime h , respectiv σ'_r și σ'_t cele corespunzătoare grosimii h' .

Din ecuația de proiecții a forțelor pe bisecțiunea unghiului $d\varphi$, se obține (înlocuind $\sin d\varphi \approx d\varphi$)

$$\sigma_r(R - dr) h d\varphi - \sigma'_r(R + dr') h' d\varphi + 2\sigma'_t h' dr' \frac{d\varphi}{2} +$$

$$+ 2\sigma_t h dr \frac{d\varphi}{2} - \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2 h' dr' d\varphi - \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2 h dr d\varphi = 0. \quad (1)$$

În această ecuație, ultimii doi termeni reprezintă pe dF' și dF din figura 13.14, b . Se simplifică :

$$\sigma_r R h - \sigma'_r R h' - \sigma_t h dr - \sigma'_t h' dr' + \sigma'_t h' dr' +$$

$$+ \sigma_t h dr - \frac{\gamma}{g} h' R^2 \omega^2 dr' - \frac{\gamma}{g} h R^2 \omega^2 dr = 0. \quad (2)$$

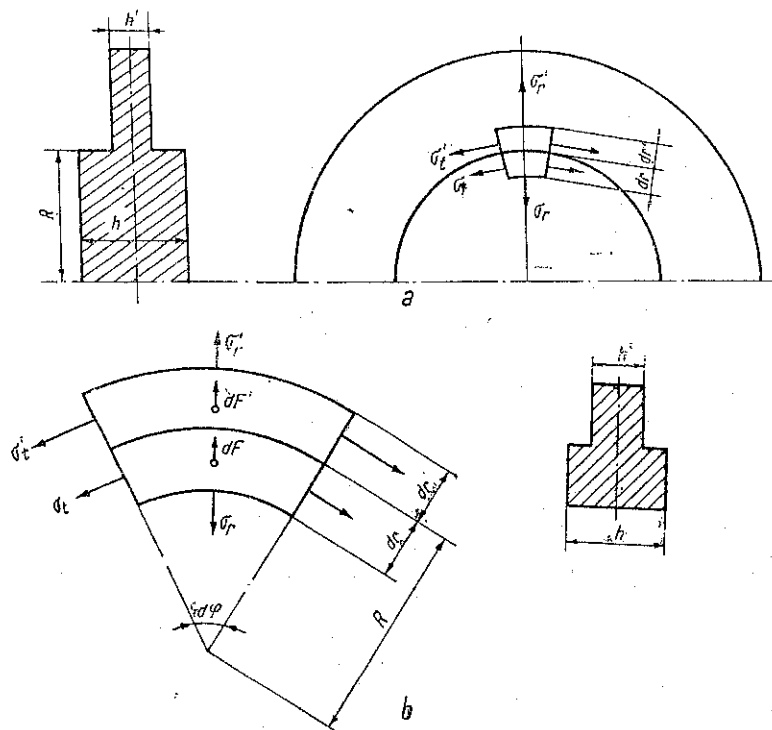


Fig. 13.14

Se observă că, afară de primii doi termeni, ceilalți sînt infiniți mici, care se pot neglija, astfel că se obține:

$$\sigma_r h = \sigma'_r h', \quad \sigma'_r = \sigma_r \frac{h}{h'} \quad (3)$$

b) Variația efortului unitar σ_t se obține din condiția ca cele două porțiuni de grosime diferită, ce formează elementul de volum izolat, să aibă aceeași deplasare u la raza R . Se aplică relația (13.5):

$$u_R = u'_R = \frac{R}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_r) = \frac{R}{E} (\sigma'_t - \nu \sigma'_r),$$

$$\sigma_t - \sigma'_t = \nu (\sigma_r - \sigma'_r); \quad \sigma'_t = \sigma_t + \nu \sigma_r \left(\frac{h}{h'} - 1 \right). \quad (4)$$

Variațiile de eforturi unitare la saltul de grosime sînt date de relațiile (3) și (4).

13.15. Să se calculeze variația eforturilor unitare la discul cu salt de grosime din figura 13.15, a, știind că discul se rotește cu $n = 3\,000$ rot/min. Discul este solicitat la exterior de un efort unitar $p_e = 203$ daN/cm² și la interior de unul $p_i = 80$ daN/cm². Dimensiunile discului sînt: $R_1 = 17,5$ cm, $R_2 = 26$ cm, $R_3 = 41,8$ cm, $h = 9$ cm, $h' = 3$ cm.

Observație. Se vor utiliza rezultatele problemei 13.14.

Rezolvare. Se izolează obada de butuc, ca în figura 13.15, b, înlocuind influența butucului asupra obezii cu efortul unitar σ'_{r2} și influența obezii

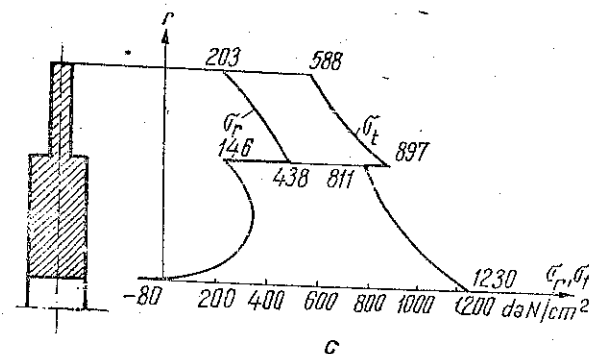
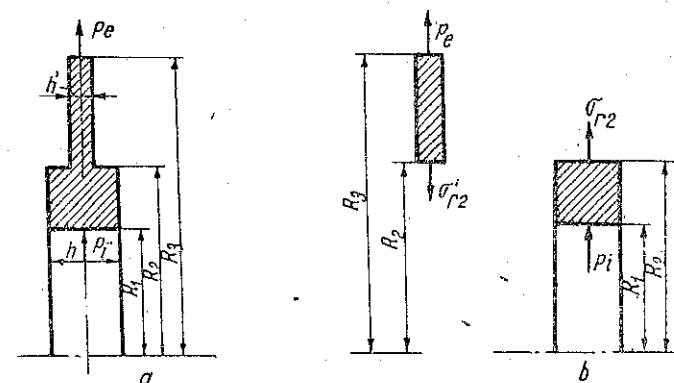


Fig. 13.15

asupra butucului cu σ_{r2} . Eforturile unitare σ_{r2} și σ'_{r2} sînt diferite din cauza variației de grosime a discului.

Expresia eforturilor unitare pentru obadă și pentru butuc, la o rază oarecare r , se obține din ecuațiile 13.3 și 13.4 cu următoarele schimbări:

— Pentru obadă se înlocuiesc R_1 cu R_2 , R_2 cu R_3 și p_1 cu $-\sigma'_r$ cu semnul minus, deoarece σ'_r are sens invers decât în figura 13.15, b.

$$\sigma'_i = \frac{\gamma \omega^2}{8g} \left[(3 + \nu) \left(R_3^2 + R_2^2 + \frac{R_3^2 R_2^2}{r^2} \right) - (1 + 3\nu) r^2 \right] + p_e \frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right) - \sigma'_r \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \left(1 + \frac{R_3^2}{r^2} \right), \quad (1)$$

$$\sigma'_r = \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3 + \nu) \frac{(R_3^2 - r^2)(r^2 - R_2^2)}{r^2} + p_e \frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right) - \sigma'_r \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \left(1 - \frac{R_3^2}{r^2} \right). \quad (2)$$

— Pentru butuc se înlocuiește p_e cu σ_{r_2} , ecuațiile rămânând în rest neschimbate:

$$\sigma_i = \frac{\gamma \omega^2}{8g} \left[(3 + \nu) \left(R_2^2 + R_1^2 + \frac{R_2^2 R_1^2}{r^2} \right) - (1 + 3\nu) r^2 \right] + \sigma_{r_2} \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2} \right) + p_1 \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right), \quad (3)$$

$$\sigma_r = \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3 + \nu) \frac{(R_2^2 - r^2)(r^2 - R_1^2)}{r^2} + \sigma_{r_2} \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) + p_1 \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right). \quad (4)$$

În relațiile (1) — (4) sînt necunoscute eforturile unitare σ_{r_2} și σ'_r , care se determină pe baza condițiilor (3) și (4) din problema 13.14, în punctul $r = R_2$ unde variază brusc grosimea discului:

$$\sigma'_{r_2} = \sigma_{r_2} \frac{h}{h'}, \quad (5)$$

$$\sigma_{i_2} - \sigma'_{i_2} = \nu(\sigma_{r_2} - \sigma'_{r_2}). \quad (6)$$

Efortul unitar σ'_{i_2} în obadă în punctul 2, se determină din relația (1) unde se înlocuiește r cu R_2 :

$$\sigma'_{i_2} = \frac{\gamma \omega^2}{4g} [(3 + \nu) R_2^2 + (1 - \nu) R_2^2] + p_e \frac{2R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} - \sigma'_{r_2} \frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \quad (7)$$

Efortul unitar σ_{i_2} în butuc, în punctul 2, se găsește din relația (3), înlocuind r cu R_2 :

$$\sigma_{i_2} = \frac{\gamma \omega^2}{4g} [(3 + \nu) R_1^2 + (1 - \nu) R_2^2] + \sigma_{r_2} \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + p_1 \frac{2R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (8)$$

Înlocuind valorile (7) și (8) în relația (6), se obține:

$$\frac{\gamma \omega^2}{4g} [(3 + \nu) R_1^2 + (1 - \nu) R_2^2 - (3 + \nu) R_2^2 - (1 - \nu) R_2^2] + \sigma_{r_2} \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \sigma'_{r_2} \frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} + p_1 \frac{2R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - p_e \frac{2R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} = \nu(\sigma_{r_2} - \sigma'_{r_2}).$$

Utilizînd și relația (5) se obține:

$$\sigma_{r_2} = \frac{\frac{\gamma \omega^2}{4g} (3 + \nu)(R_3^2 - R_1^2) + \frac{2R_3^2 p_e}{R_3^2 - R_2^2} - \frac{2R_1^2 p_1}{R_2^2 - R_1^2}}{\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{R_3^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \cdot \frac{h}{h'} + \nu \left(\frac{h}{h'} - 1 \right)} \quad (9)$$

$$\sigma_{r_2} = \frac{\frac{7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 314^2}{4 \cdot 981} (3 + 0,3) (41,8^2 - 17,5^2) + \frac{2 \cdot 41,8^2 \cdot 203}{41,8^2 - 26^2} - \frac{2 \cdot 17,5^2 \cdot 80}{26^2 - 17,5^2}}{\frac{26^2 + 17,5^2}{26^2 - 17,5^2} + \frac{41,8^2 + 26^2}{41,8^2 - 26^2} \cdot \frac{9}{3} + 0,3 \left(\frac{9}{3} - 1 \right)} = 146 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma'_{r_2} = \sigma_{r_2} \cdot \frac{h}{h'} = 146 \frac{9}{3} = 438 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Înlocuind aceste valori, în relațiile (1) — (4) se determină expresiile variațiilor eforturilor unitare pentru obadă și pentru butuc.

Diagramele de variație a eforturilor unitare, ținînd seama de aceste relații, sînt reprezentate în figura 13.15, c. Valorile eforturilor unitare sînt trecute pe diagramă.

13.16. Să se verifice piesa din figura 13.16, a asupra căreia cade greutatea $P = 1\,000$ daN de la înălțimea $h = 1$ cm. Din motive constructive piesa este strunjită pe o porțiune $l_1 = 10$ cm la un diametru $d_1 = 45$ mm. Se neglijează efectul variației de secțiune. Se dă: $d = 55$ mm și $\sigma_a = 1\,800$ daN/cm².

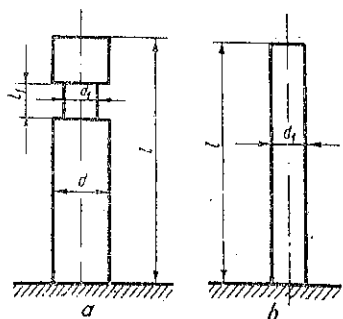


Fig. 13.16

Rezolvare. Deformația statică a barei este :

$$\delta_{st} = \frac{Pl_1^2}{EA_1} + \frac{P(l-l_1)}{EA} = \frac{P}{E} \left(\frac{l_1^2}{A_1} + \frac{l-l_1}{A} \right) = \frac{1\,000}{2,1 \cdot 10^6} \left(\frac{10}{\pi \cdot 4,5^2} + \frac{90}{\pi \cdot 5,5^2} \right) = 0,0021 \text{ cm},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,0021}} = 31,9.$$

Efortul unitar maxim apare în secțiunea slăbită :

$$\sigma_{st} = \frac{P}{A_1} = \frac{1\,000}{\frac{\pi \cdot 4,5^2}{4}} = 63 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 31,9 \cdot 63 = 2\,010 \text{ daN/cm}^2 > \sigma_a.$$

Efortul unitar dinamic depășește rezistența admisibilă cu 11,7%. Piesa nu poate fi utilizată cu dimensiunile date. Pentru micșorarea efortului unitar dinamic, este necesară mărirea deformației statice a barei, care se poate obține reducând dimensiunile întregii bare, ca în figura 13.16, b, prin strunjire la diametrul d_1 .

În acest caz :

$$\delta_{st} = \frac{Pl}{EA_1} = \frac{1\,000 \cdot 100}{2,1 \cdot 10^6 \frac{\pi \cdot 4,5^2}{4}} = 0,003 \text{ cm},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,003}} = 26,8,$$

$$\sigma_{st} = \frac{P}{A_1} = 63 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 26,8 \cdot 63 = 1\,688 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Se vede că deși s-au redus dimensiunile piesei, efortul unitar efectiv a scăzut sub rezistența admisibilă, deci piesa cu aceste noi dimensiuni poate funcționa.

13.17. De pe o tobă se desfășoară un cablu $26 \times 6 \times 37 - 180/B-Z/Z$ STAS 1353-71, cu secțiunea $A = 250,9 \text{ mm}^2$, care suportă o greutate $P = 12 \text{ kN}$ ce coboară cu viteza $v = 1 \text{ m/s}$. După ce s-a desfășurat o

lungime $l = 10 \text{ m}$ din cablu, toba se blochează brusc (Fig. 13.17). Se cere să se calculeze efortul unitar ce se produce în cablu dacă :

a) greutatea este legată direct de cablu (Fig. 13.17, a);

b) între cablu și greutate se introduce un arc amortizor având constanta elastică $k = 4 \text{ kN/cm}$ (Fig. 13.17, b).

Rezolvare. a) Efortul unitar dinamic este dat de relația (13.11), unde efortul unitar static este :

$$\sigma_{st} = \frac{P}{A} = \frac{1200}{2,509} = 478 \text{ daN/cm}^2,$$

iar multiplicatorul de impact este, după relația (13.14) :

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{100^2}{981 \cdot 0,227}} = 7,8.$$

S-a înlocuit :

$$\delta_{st} = \frac{Pl}{EA} = \frac{1\,200 \cdot 1\,000}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2,509} = 0,227 \text{ cm};$$

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 7,8 \cdot 478 = 3\,720 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar are o valoare foarte mare, care se poate totuși admite, deoarece rezistența de rupere a cablului considerat este :

$$\sigma_r = 180 \text{ daN/mm}^2 = 18\,000 \text{ daN/cm}^2.$$

b) Datorită introducerii arcului, deformația statică va fi, sub acțiunea forței P , mai mare, deci se va micșora multiplicatorul de impact :

$$\delta_{st} = \frac{Pl}{EA} + \frac{P}{k} = \frac{1\,200 \cdot 1\,000}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2,509} + \frac{12}{4} = 0,227 + 3 = 3,227 \text{ cm}$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{100^2}{981 \cdot 3,227}} = 3,04.$$

Deoarece efortul unitar static în cablu rămâne același, cel dinamic are valoarea :

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 3,04 \cdot 478 = 1\,450 \text{ daN/cm}^2.$$

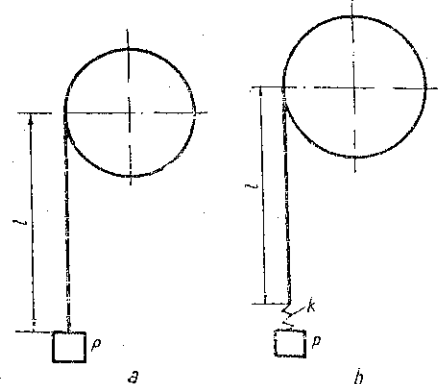
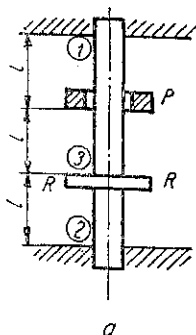


Fig. 13.17



Se vede că introducerea arcului amortizor a micșorat efortul unitar de 2,56 ori.

13.18. Pe opritorul $R-R$ al tijei din figura 13.18, a cade o greutate P de la înălțimea $h = l$. Tija este prismatică având aria secțiunii transversale A . Se cere să se stabilească expresia efortului unitar maxim.

Rezolvare. Efortul unitar maxim este:

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st}.$$

Pentru calculul lui σ_{st} se determină reacțiunile H_1 și H_2 funcție de P (Fig. 13.18, b).

Din ecuația de proiecții pe verticală rezultă:

$$H_1 + H_2 = P. \quad (1)$$

Problema este simplă static nedeterminată. Se rezolvă nedeterminarea punând condiția ca deformația totală a barei să fie nulă (bara fiind încastrată la ambele capete):

$$\Delta l = \frac{H_1 \cdot 2l}{EA} + \frac{(H_1 - P)l}{EA} = 0. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) se obține:

$$H_1 = \frac{1}{3} P; \quad H_2 = \frac{2}{3} P.$$

Efortul unitar σ_{st} este maxim pe intervalul 2-3,

$$\sigma_{st \max} = \frac{H_2}{A} = \frac{2}{3} \frac{P}{A}.$$

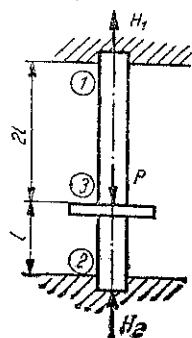


Fig. 13.18

Pentru calculul lui ψ se aplică relația (13.13), în care δ_{st} este deplasarea opritorului $R-R$ pe care este aplicată static greutatea P :

$$\delta_{st} = \frac{H_1 \cdot 2l}{EA} = \left| \frac{H_2 l}{EA} \right| = \frac{2}{3} \frac{Pl}{EA},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot l}{\frac{2}{3} \frac{Pl}{EA}}}.$$

Efortul unitar dinamic maxim este:

$$\sigma_d = \frac{2}{3} \frac{P}{A} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3EA}{P}} \right).$$

13.19. O greutate $P = 200$ daN cade pe mijlocul unei grinzi de la înălțimea $h = 1$ cm. Grinda este un profil I 10, cu lungimea $l = 1$ m iar materialul are rezistență admisibilă $\sigma_a = 1400$ daN/cm². Modul de sprijinire al grinzii poate fi ca în figura 13.19, a sau ca în figura 13.19, b . Elementele elastice (Fig. 13.19, b) sînt două arcuri elicoidale avînd raza de înfășurare $R = 6,4$ cm, diametrul sîrmei $d = 1,6$ cm și numărul de spire $n = 4$. Se cere să se calculeze reacțiunile în momentul șocului și să se verifice grinda în cele două moduri de sprijinire.

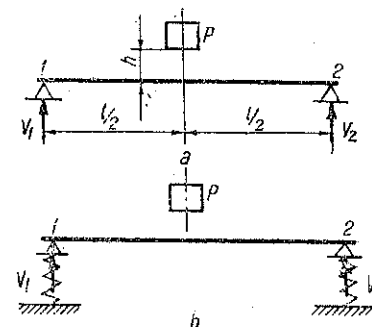


Fig. 13.19

Rezolvare. Din anexa 9, pentru profilul I 10 se găsește:

$$I_x = 171 \text{ cm}^4; \quad W_x = 34,2 \text{ cm}^3.$$

— Grinda din figura 13.19, a

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{200 \cdot 100^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 171} \approx 0,0116 \text{ cm}, \quad (1)$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,0116}} = 14,1. \quad (2)$$

Reacțiunile în momentul șocului sînt:

$$V_{1d} = V_{2d} = \psi V_{1st} = \psi V_{2st} = \psi \frac{P}{2} = 14,1 \cdot \frac{200}{2} = 1410 \text{ daN}$$

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{4W} = \frac{200 \cdot 100}{4 \cdot 34,2} = 146 \text{ daN/cm}^2, \quad (3)$$

$$\sigma_d = \psi \sigma_{st} = 14,1 \cdot 146 = 2059 \text{ daN/cm}^2 > \sigma_a.$$

— Grinda din figura 13.19, b .

Deformația statică a arcului elicoidal este dată de formula:

$$\delta_{st} = \frac{64 \cdot V_{1st} R^3 n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 100 \cdot 6,4^3 \cdot 4}{8,5 \cdot 10^5 \cdot 1,6^4} = 1,205 \text{ cm}, \quad (4)$$

unde

$$V_{1st} = 100 \text{ daN}.$$

Deformația statică totală este dată de suma expresiilor (1) și (4):

$$f_{st} = 0,0116 + 1,205 = 1,2166 \text{ cm},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{1,2166}} = 2,62.$$

$$V_{1a} = \psi V_{1st} = \psi \frac{P}{2} = 2,62 \frac{200}{2} = 262 \text{ daN},$$

$$\sigma_a = \psi \sigma_{st} = 2,62 \cdot 146 = 383 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

$$\tau_a = \frac{V_{1a} R}{W_p} = \frac{\psi V_{1st} R}{W_p} = \psi \tau_{st} = 2,62 \frac{100 \cdot 6,4}{\pi \cdot \frac{1,6^3}{16}} = 2086 \text{ daN/cm}^2.$$

Introducerea arcurilor amortizează mult șocul, micșorînd solicitarea dinamică în grindă de 5,4 ori.

13.20. Să se dimensioneze o grindă simplu rezemată, de secțiune dreptunghiulară, avînd raportul între înălțime și bază $\frac{H}{B} = 1,5$ solici-

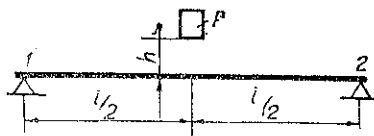


Fig. 13.20

tată la încovoiere prin șoc de o greutate $P = 400 \text{ daN}$, căzînd de la o înălțime $h = 2 \text{ cm}$ (Fig. 13.20).

Se dau: deschiderea grinzii $l = 3 \text{ m}$, rezistența admisibilă $\sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2$, $E = 10^5 \text{ daN/cm}^2$. Se neglijează masa proprie a grinzii.

Rezolvare. Făcînd ipoteza că raportul $\frac{h}{\delta_{st}}$ este mare, se aplică formula simplificată (13.17):

$$\psi = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}; \quad \sigma_a = \psi \sigma_{st} = \psi \frac{M}{W}. \quad (1)$$

În cazul din figură:

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{48EI}; \quad M = \frac{Pl}{4};$$

$$\sigma_a = \frac{Pl}{4W} \sqrt{\frac{2h}{Pl^3}} = \sqrt{\frac{6PhE}{lW^2}}. \quad (2)$$

Dar pentru dreptunghi:

$$\frac{I}{W^2} = \frac{\frac{BH^3}{12}}{\left(\frac{BH^3}{6}\right)^2} = \frac{3}{BH} = \frac{2}{B^2}.$$

Înlocuind în relația (2) se obține:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{6PhE}{l} \frac{2}{B^2}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{12PhE}{l}}, \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{\sigma_a} \sqrt{\frac{12PhE}{l}} = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{12 \cdot 400 \cdot 2 \cdot 10^5}{300}} = 17,9 \text{ cm}.$$

Se alege:

$$B = 18 \text{ cm}; \quad H = 1,5 \cdot B = 1,5 \cdot 18 = 27 \text{ cm}.$$

Deoarece s-a aplicat pentru dimensionare formula aproximativă, trebuie făcută verificarea:

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{400 \cdot 300^3}{48 \cdot 10^5 \cdot \frac{18 \cdot 27^3}{12}} = 0,076 \text{ cm},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2}{0,076}} = 3,33,$$

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W} = \frac{\frac{Pl}{4}}{\frac{BH^2}{6}} = \frac{3Pl}{2BH^2} = \frac{3 \cdot 400 \cdot 300}{2 \cdot 18 \cdot 27^2} = 13,72 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_a = \psi \sigma_{st} = 3,33 \cdot 13,72 = 45,7 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Se vede că efortul unitar efectiv depășește cu 14,3% pe cel admisibil. Aceasta se datorește faptului că s-a lucrat cu formula aproximativă (13.17), raportul $\frac{2h}{\delta_{st}} = \frac{2 \cdot 2}{0,076} = 52,5$ fiind prea mic (vezi relația 13.17). Se face în acest caz o nouă dimensionare cu formula (13.16):

$$\psi = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}.$$

În acest caz:

$$\sigma_a = \psi \sigma_{st} = \frac{M}{W} \left(1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}\right) = \frac{Pl}{4W} + \frac{Pl}{4W} \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}},$$

$$\sigma_a = \frac{Pl}{4 \cdot \frac{BH^2}{6}} + \frac{1}{B} \sqrt{\frac{12PhE}{l}} = \frac{3Pl}{2 \cdot 2,25 \cdot B^3} + \frac{1}{B} \sqrt{\frac{12PhE}{l}},$$

$$100 = \frac{3 \cdot 400 \cdot 300}{4,5 \cdot B^3} + \frac{1}{B} \sqrt{\frac{12 \cdot 400 \cdot 2 \cdot 10^5}{300}}.$$

Se obține ecuația :

$$B^3 - 17,90 B^2 - 800 = 0.$$

Soluția aproximativă a ecuației este : $B = 20$ cm ; $H = 1,5 B = 30$ cm.

Cu aceste valori se obține : $\delta_{st} = 0,05$ cm ; $\psi = 10$; $\sigma_{st} = 10$ daN/cm² ; $\sigma_d = 100$ daN/cm² = σ_a .

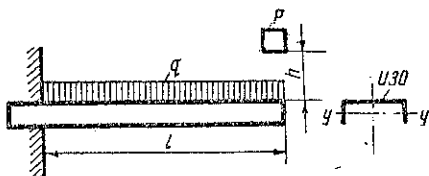


Fig. 13.21

unitar maxim în următoarele cazuri :

- 1) nu se ține seamă de masa barei ;
- 2) se ține seamă de masa barei și de sarcină.

Se dă (anexa 8) :

$$I_y = 495 \text{ cm}^4 ; \quad W_y = 67,8 \text{ cm}^3.$$

Rezolvare. 1) Săgeata statică sub sarcina P este :

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{3EI_y} = \frac{100 \cdot 200^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 495} = 0,256 \text{ cm},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5}{0,256}} = 7,3.$$

Eforturile unitare statice și dinamice datorite sarcinii P sînt :

$$\sigma'_{st} = \frac{Pl}{W} = \frac{100 \cdot 200}{67,8} = 295 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_a = \psi \sigma'_{st} = 7,3 \cdot 295 = 2153 \text{ daN/cm}^2.$$

La acesta se adaugă efortul unitar datorit sarcinii $q + p$

$$\sigma'' = \frac{(q + p) \frac{l^2}{2}}{W} = \frac{1,46 \cdot 200^2}{2 \cdot 67,8} = 431 \text{ daN/cm}^2,$$

și rezultă efortul unitar total

$$\sigma_t = \sigma_a + \sigma'' = 2153 + 431 = 2584 \text{ daN/cm}^2.$$

13.21. Pe o grindă încadrată, încărcată cu o sarcină uniform distribuită $q = 100$ daN/m, cade o greutate $P = 100$ daN de la o înălțime $h = 5$ cm.

Grinda este un profil U 30, așezat ca în figura 13.21, lungimea sa fiind $l = 2$ m, iar greutatea proprie $p = 46,2$ daN/m. Se cere efortul

2) Pentru a ține seamă de masa barei și de sarcina distribuită se aplică formulele (13.19) și (13.21), în care :

$$Q = (p + q)l = (46,2 + 100)2 = 292,4 \text{ daN},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q}{P}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5}{0,256} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{292,4}{100}}} = 5,91,$$

$$\sigma_a = \psi \sigma'_{st} = 5,91 \cdot 295 = 1743 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_t = \sigma_a + \sigma'' = 1743 + 431 = 2174 \text{ daN/cm}^2.$$

Se vede din compararea rezultatelor că diferența între cele două cazuri este de 18,8 %.

13.22. O greutate P lovește grinda de secțiune circulară din figura 13.22, a cu viteza v . Să se calculeze eforturile unitare care se produc în grindă. Se dă : $P = 200$ daN, $l = 1$ m,

$$d = 10 \text{ cm}, \quad v = \frac{1}{2} \text{ m/s}.$$

Rezolvare. Se aplică relația (13.18). Calculul deformației statice se face aplicînd metoda Vereșceaghin, la diagramele din figurile 13.22, b și d :

$$\delta_{st} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + \right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{Pl^3}{12EI} =$$

$$= \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 64}{12 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 10^4} = 0,0162 \text{ cm},$$

$$\psi = \frac{v}{\sqrt{g\delta_{st}}} = \frac{50}{\sqrt{981 \cdot 0,0162}} = 12,56,$$

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{2W} = \frac{200 \cdot 10^2 \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot 10^3} =$$

$$= 102 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_a = 12,56 \cdot 102 = 1281 \text{ daN/cm}^2.$$

13.23. O greutate P cade de la înălțimea h pe o grindă în consolă, de masă neglijabilă. După

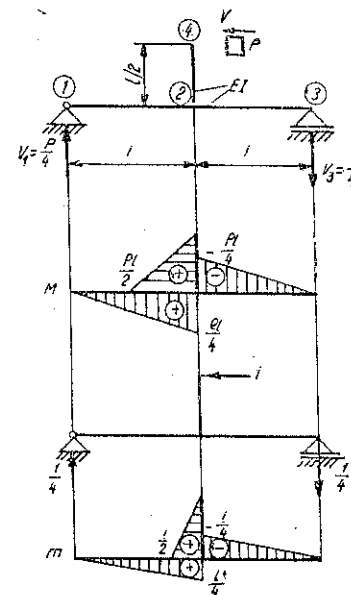


Fig. 13.22

cioenire, greutatea rămâne pe grindă. Să se arate că se realizează un coeficient de impact cu atât mai mare cu cât grinda este lovită mai aproape de încadrare. Să se cerceteze și modul cum variază efortul unitar maxim în funcție de x (Fig. 13.23).

Rezolvare. Se aplică formula coeficientului de impact:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}$$

În cazul grinzii încadrate: $f_{st} = \frac{Px^3}{3EI}$

Cu cât x este mai mic, deci punctul de lovire mai aproape de încadrare, cu atât δ_{st} este mai mic și ψ este mai mare.

Momentul încovoietor maxim este, în valoare absolută, $M_{max} = \psi Px$ sau:

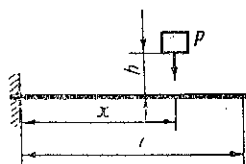


Fig. 13.23

$$M_{max} = Px \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{Px^3}} \right) = P \left[x + \sqrt{x^2 + \frac{6EIh}{P} \frac{1}{x}} \right]$$

Derivata se anulează când:

$$\frac{dM_{max}}{dx} = P \left(1 + \frac{2x - \frac{6EIh}{P} \frac{1}{x^2}}{2 \sqrt{x^2 + \frac{6EIh}{P} \frac{1}{x}}} \right) = 0.$$

Rezolvând se găsește $x = \sqrt[3]{\frac{3EIh}{4P}}$. Această valoare mai poate fi pusă

sub forma $x = l \sqrt[3]{\frac{h}{4\delta_{st}}}$. Analizând semnul derivatei, se constată ușor că ea trece de la valori negative la valori pozitive, deci funcția trece printr-un minim.

Dacă $h \geq 4\delta_{st}$, adică dacă greutatea cade de la o înălțime egală cu de 4 ori săgeata statică, punctul de ciocnire pentru care apare un minim de efect dinamic se află la capătul liber al consolei. Cu cât greutatea ciocnește grinda mai aproape de încadrare, cu atât momentul din încadrare este mai mare.

Dacă $h < 4\delta_{st}$, atunci punctul de ciocnire, pentru care apare un minim de efect dinamic, se află pe grindă la distanța

$$x = l \sqrt[3]{\frac{h}{4\delta_{st}}}$$

Înlocuind în expresia momentului încovoietor maxim se găsește:

$$M_{max} = 4Pl \sqrt[3]{\frac{h}{4\delta_{st}}}$$

Dacă greutatea ciocnește grinda la dreapta sau la stînga acestui punct, efectul dinamic este mai mare.

13.24. Să se calculeze eforturile unitare care se produc în grinda de oțel din figura 13.24, a, prin căderea greutății $P = 200$ daN, de la înălțimea $h = 2$ cm.

Se dă: $d_2 = 10$ cm.

Rezolvare. Se aplică relațiile (13.11) și (13.13).

Deplasarea statică a punctului 2 se calculează aplicînd metoda *Mohr-Maxwell-Vereșceaghin*, la diagramele din figurile 13.24, b și c

$$\delta_{st} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2Pl \cdot \frac{2}{3} 2l + \frac{1}{2EI} \left[l \cdot 2Pl \frac{5l}{2} + \frac{1}{2} l \cdot Pl \left(2l + \frac{2}{3} l \right) \right] = \frac{Pl^3}{EI} \left(\frac{8}{3} + \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{35}{6} \frac{Pl^3}{EI}$$

$$I = \frac{\pi \cdot 10^4}{64} = 490 \text{ cm}^4; \quad \delta_{st} = \frac{35 \cdot 200 \cdot 50^3}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 490} = 0,142 \text{ cm},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2}{0,142}} = 6,4.$$

Efortul unitar normal σ_{st} poate să fie maxim în secțiunea 3 sau în secțiunea 1.

$$\sigma_{st3} = \frac{2Pl}{W_1} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 50 \cdot 32}{\pi \cdot 10^3} = 203 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{st1} = \frac{3Pl}{W_2},$$

$$I_2 = 2I = 2 \cdot 490 = \frac{\pi \cdot d_2^4}{64};$$

$$d_2 = 11,9 \text{ cm},$$

$$\sigma_{st1} = \frac{3 \cdot 200 \cdot 50 \cdot 32}{\pi \cdot 11,9^3} = 181 \text{ daN/cm}^2.$$

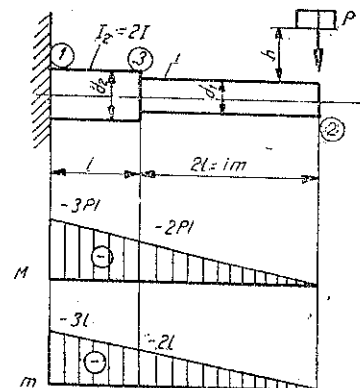


Fig. 13.24

Efortul unitar maxim este :

$$\sigma_a \max = \psi \sigma_{st} = 6,4 \cdot 203 = 1\,299 \text{ daN/cm}^2.$$

13.25. Să se determine înălțimea maximă h de la care poate cădea liber o greutate $P = 30 \text{ daN}$, în capătul unei grinzi de lemn în consolă, de lungime $l = 0,8 \text{ m}$, astfel încât să nu se depășească efortul unitar admisibil $\sigma_a = 110 \text{ daN/cm}^2$. Grinda are secțiunea dreptunghiulară constantă, de dimensiuni $B = 40 \text{ cm}$ și $H = 8 \text{ cm}$ (Fig. 13.25, a); $E = 10^5 \text{ daN/cm}^2$.

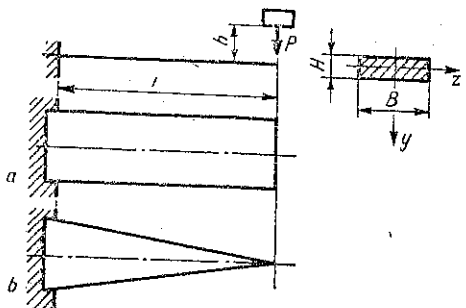


Fig. 13.25

Să se recalculeze h în cazul cind grinda ar avea secțiunea variabilă, corespunzător unei bare de egală rezistență la încovoiere, ideale (Fig. 13.25, b).

Rezolvare. Se folosește condiția $\sigma_a = \sigma_a = \psi \sigma_{st}$, de unde

înlocuind pe ψ cu expresia (13.13), se obține :

$$h = \left[\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{st}} - 1 \right)^2 - 1 \right] \frac{\delta_{st}}{2}; \quad \sigma_{st} = \frac{Pl}{W_z} = \frac{30 \cdot 0,8 \cdot 6}{40 \cdot 8^2} = 5,62 \text{ daN/cm}^2.$$

a) În cazul grinzii de secțiune constantă :

$$\delta'_{st} = \frac{Pl^3}{3EI_z} = \frac{30 \cdot 8^3 \cdot 10^3 \cdot 12}{3 \cdot 10^5 \cdot 8^3 \cdot 40} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ cm},$$

cu ajutorul căreia se obține :

$$h' = \left[(19,5 - 1)^2 - 1 \right] \frac{3 \cdot 10^{-2}}{2} = 5,1 \text{ cm}.$$

b) În cazul barei de egală rezistență :

$$\delta''_{st} = \frac{Pl^3}{2EI_z} = \frac{3}{2} \delta'_{st}, \text{ iar } h'' = \frac{3}{2} h' = 7,65 \text{ cm}.$$

13.26. O greutate $P = 50 \text{ daN}$ care se deplasează orizontal cu viteza $v = 1 \text{ m/s}$ lovește un profil $\text{U } 30$ de lungime $l = 2 \text{ m}$, așezat ca în figura 13.26, încastrat în partea de jos.

Să se afle efortul unitar maxim în grindă, știind că $\alpha = 45^\circ$.

Rezolvare. Se aplică relația (13.18), în care δ_{st} este deplasarea pe orizontală a capătului liber al barei, produsă de o forță P aplicată static pe direcție orizontală.

Calculul deplasării se face aplicind metoda Castigliano.

Eforturile într-o secțiune oarecare x sînt :

$$N = -P \sin \alpha; \quad M = -Px \cos \alpha; \quad \frac{\partial N}{\partial P} = -\sin \alpha;$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x \cos \alpha;$$

$$\begin{aligned} \delta_{st} &= \int_0^l \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P} dx + \int_0^l \frac{M}{EI_y} \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{Pl \sin^2 \alpha}{EA} + \\ &+ \frac{Pl^3 \cos^2 \alpha}{3EI_y} = \\ &= \frac{Pl^3}{3EI_y} \left(\cos^2 \alpha + \frac{3I_y}{l^2 A} \sin^2 \alpha \right). \end{aligned}$$

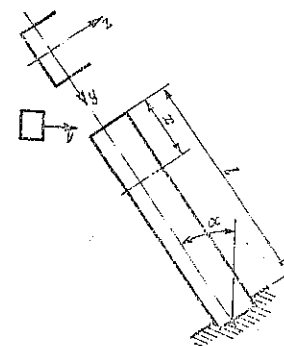


Fig. 13.26

Rezultă :

$$\psi = \frac{v}{l} \sqrt{\frac{3EI_y}{g \cdot l \cdot P \left(\cos^2 \alpha + \frac{3I_y}{l^2 A} \sin^2 \alpha \right)}}$$

Efortul unitar maxim static datorit încovoierei și compresunii este :

$$|\sigma_{st}| = \frac{Pl \cos \alpha}{W_y} + \frac{P \sin \alpha}{A} = P \left(\frac{l \cos \alpha}{W_y} + \frac{\sin \alpha}{A} \right).$$

Aplicind relația (13.11) se obține

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \psi \sigma_{st} = \frac{v}{l} \sqrt{\frac{3EI_y}{g \cdot l \cdot P \left(\cos^2 \alpha + \frac{3I_y}{l^2 A} \sin^2 \alpha \right)}} \cdot P \left(\frac{l \cos \alpha}{W_y} + \frac{\sin \alpha}{A} \right) = \\ &= \frac{v}{l} \sqrt{\frac{3PEI_y}{g \cdot l \left(\cos^2 \alpha + \frac{3I_y}{l^2 A} \sin^2 \alpha \right)}} \cdot \left(\frac{l \cos \alpha}{W_y} + \frac{\sin \alpha}{A} \right). \quad (1) \end{aligned}$$

Din anexa 8: $I_y = 495 \text{ cm}^4$; $W_y = 67,8 \text{ cm}^3$; $A = 58,8 \text{ cm}^2$.

Înlocuind valorile numerice în relația (1) se obține :

$$\sigma_a = 1\,320 \text{ daN/cm}^2.$$

13.27. Să se precizeze în ce raport se găsesc înălțimile h_1 și h_2 de la care este lăsată să cadă liber greutatea P pe grinzile de aceeași dimensiuni din figurile 13.27, *a* și *b* astfel încît efortul unitar maxim să fie același în ambele grinzi.

Rezolvare. Condiția cerută de problemă este :

$$\sigma_a = \psi_1 \sigma_{st1} = \psi_2 \sigma_{st2} \quad (1)$$

Grinda din figura 13.27, *a*, este static nedeterminată. Se calculează X_1 folosind diagramele din figura 13.27, *c* :

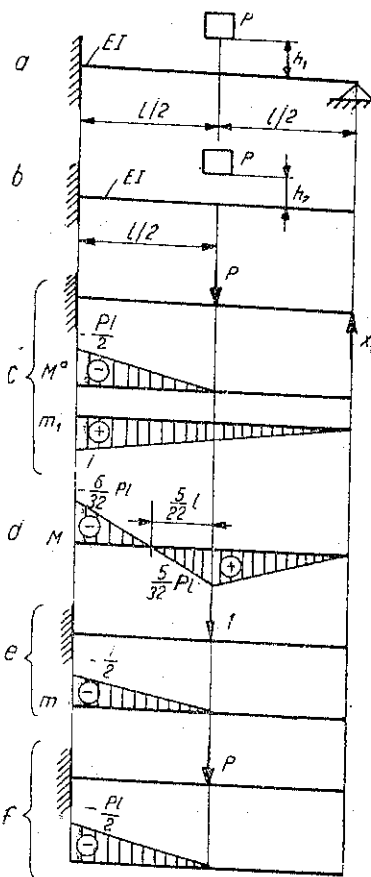


Fig. 13.27

$$\begin{aligned} EI \delta_{10} &= -\frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + \frac{2}{3} \frac{l}{2} \right) = \\ &= -\frac{5}{48} Pl^3, \end{aligned}$$

$$EI \delta_{11} = \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{3} l^3,$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{5}{48} Pl^3 : \frac{1}{3} l^3 = \frac{5}{16} P.$$

Se calculează δ_{st1} aplicind regula lui Veresceaghin la diagramele din figurile 13.27, *d* și *e* :

$$\begin{aligned} \delta_{st1} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{5}{22} l \cdot \frac{5}{32} Pl \left(-\frac{1}{3} \frac{5}{22} l \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{6}{22} l \left(-\frac{6}{32} Pl \right) \cdot \left(-\frac{5}{22} l - \frac{2}{3} \frac{6}{22} l \right) \right] = \\ &= \frac{7 \cdot Pl^3}{24 \cdot 32 EI} = 0,009 \frac{Pl^3}{EI}, \end{aligned}$$

Iar δ_{st2} se calculează folosind diagramele din figurile 13.27, *f* și *e* :

$$\begin{aligned} \delta_{st2} &= \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{2} = \\ &= \frac{1}{24} \frac{Pl^3}{EI} = 0,0416 \frac{Pl^3}{EI}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{st1} = \frac{6}{32} \frac{Pl}{W}; \quad \sigma_{st2} = \frac{1}{2} \frac{Pl}{W}$$

Din condiția (1) rezultă :

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{\sigma_{st2}}{\sigma_{st1}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{Pl}{W}}{\frac{6}{32} \frac{Pl}{W}} = \frac{8}{3} \quad (2)$$

Luind pentru ψ expresia simplificată (13.17), relația (2) devine :

$$\frac{2h_1}{\delta_{st1}} = \frac{64}{9}; \quad \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\delta_{st2}}{\delta_{st1}} = \frac{64}{9} \quad a$$

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{64}{9} \frac{\delta_{st1}}{\delta_{st2}} = \\ &= \frac{64}{9} \cdot \frac{0,009}{0,0416} = 1,53. \end{aligned} \quad b$$

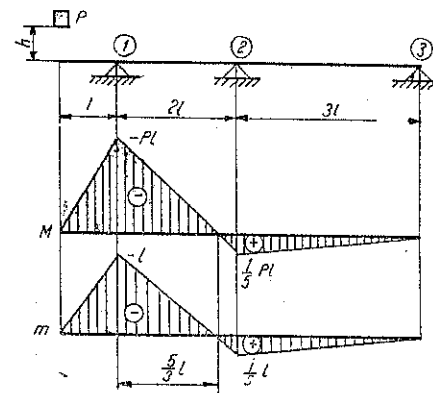


Fig. 13.28

13.28. O greutate $P=100$ daN cade de la înălțimea $h=1$ cm pe grinda din figura 13.28, *a*. Grinda este de oțel de secțiune circulară, cu $d=9$ cm. Să se verifice grinda cunoscind rezistența admisibilă $\sigma_a = 1100$ daN/cm². Se dă $l=1$ m.

Rezolvare. Se aplică relația (13.11). Grinda este static nedeterminată. Se aplică ecuația lui Clapeyron pentru grinda continuă 1-2-3, solicitată static de forța P :

$$M_1 = -Pl; \quad M_3 = 0; \quad A_2 = 0,$$

$$-Pl \cdot 2l + 2M_2 \cdot 5l = 0,$$

$$M_2 = \frac{1}{5} Pl.$$

Diagrama de momente M este trasată în figura 13.28, *b*.

În figura 13.28, *c* este trasată diagrama m pentru sarcina unitară aplicată în capătul liber al barei.

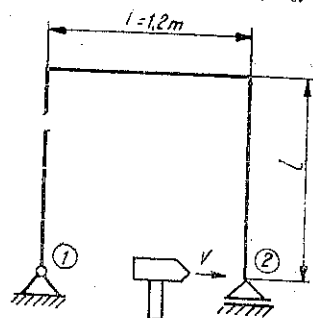
$$\begin{aligned} EI \delta_{st} &= \frac{1}{2} Pl^2 \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} Pl \frac{5}{3} l \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} \frac{Pl}{5} \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{5} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{Pl}{5} 3l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{5} = Pl^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{1}{225} + \frac{1}{25} \right) = \frac{14}{15} Pl^3 \end{aligned}$$

$$\delta_{st} = \frac{14}{15} \frac{Pl^3}{EI} = \frac{14}{15} \cdot \frac{100 \cdot 100^3}{2,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 9^4}{64}} = 0,138 \text{ cm},$$

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,138}} = 4,94,$$

$$\sigma_{st} = \frac{Pl}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 100 \cdot 100}{\pi \cdot 9^3} = 140 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_a = \psi \sigma_{st} = 4,94 \cdot 140 = 692 \text{ daN/cm}^2.$$



Efortul unitar maxim, σ_a , este mai mic decât σ_a , deci grinda rezistă.

13.29. Cadrul de secțiune circulară din figura 13.29, a este lovit în punctul 2 cu un ciocan, de greutate $P = 160 \text{ daN}$, având viteza $v = 40 \text{ cm/s}$. Se cere să se dimensioneze cadrul. Barele cadrului sînt din oțel, cu $\sigma_a = 1100 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Se aplică relațiile (13.11) și (13.18). Deplasarea pe orizontală a reazemului 2 se calculează folosind metoda *Mohr-Maxwell-Vereșceaghin* la diagramele din figurile 13.29, b și c:

$$\delta_{st} = \frac{1}{EI} \left(2 \frac{1}{2} l \cdot Pl \cdot \frac{2}{3} l + l \cdot Pl \cdot l \right) = \frac{5 Pl^3}{3 EI},$$

$$\psi = \frac{v}{\sqrt{g \delta_{st}}} = v \sqrt{\frac{3 EI}{5 Pl^3 g}},$$

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{W},$$

$$\sigma_a = \sigma_a = \psi \sigma_{st} = v \sqrt{\frac{3 EI}{5 g Pl^3}} \cdot \frac{Pl}{W},$$

$$\sigma_a = v \sqrt{\frac{48 \cdot P E}{5 \cdot \pi \cdot g \cdot l}} \cdot \frac{1}{d}$$

Se obține diametrul

$$d = \frac{v}{\sigma_a} \sqrt{\frac{48 P E}{5 \pi g l}} = \frac{40}{1100} \sqrt{\frac{48 \cdot 160 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{5 \pi \cdot 981 \cdot 120}} = 3,4 \text{ cm}.$$

Fig. 13.29

13.30. Pe bara de secțiune constantă din figura 13.30, a cade liber greutatea $P = 50 \text{ daN}$, de la înălțimea $h = 2 \text{ cm}$. Secțiunea barei este circulară, cu $d = 4 \text{ cm}$. Se dă $R = 40 \text{ cm}$. Se cere să se calculeze efortul unitar maxim produs prin șoc.

Rezolvare. Efortul unitar maxim este dat de relația (13.11)

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \psi \sigma_{st}.$$

Pentru calculul efortului unitar σ_{st} se trasează diagrama de momente. Bara este static nedeterminată. La problema 11.21 s-au calculat reacțiunile produse de o forță P , aplicată static:

$$H_1 = 0; V_1 = 1,6 P;$$

$$V_2 = 2,6 P; M_1 = 0,6 PR.$$

Diagrama de momente este dată în figura 13.30, b.

$$\sigma_{st} = \frac{PR}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 50 \cdot 40}{\pi \cdot 4^3} = 318 \text{ daN/cm}^2.$$

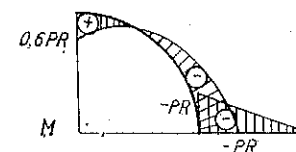
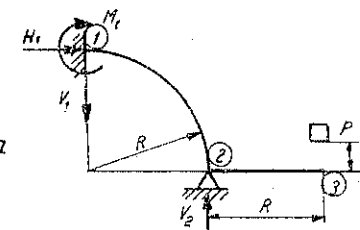


Fig. 13.30

Săgeata statică în punctul 3 este:

$$\delta_{st} = \delta_3 = 0,97 \frac{PR^3}{EI} \quad (\text{v. problema 11.21}),$$

$$\delta_{st} = 0,97 \cdot \frac{50 \cdot 40^3}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 12,566} = 0,117 \text{ cm},$$

unde

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 4^4}{64} = 12,566 \text{ cm}^4.$$

Coefficientul dinamic are valoarea:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,117}} = 5,25,$$

$$\sigma_{max} = 5,25 \cdot 318 = 1670 \text{ daN/cm}^2.$$

13.31. Să se calculeze efortul unitar maxim care se produce în inelul din figura 13.31, cu $R = 44 \text{ cm}$, prin căderea greutății $P = 80 \text{ daN}$, de la înălțimea $h = 1 \text{ cm}$. Secțiunea transversală a inelului este circulară, de diametru $d = 4 \text{ cm}$.

Rezolvare. Se aplică relațiile (13.11) și (13.13).
De la problema 11.26 se cunosc :

$$\delta_{st} = 0,149 \frac{PR^3}{EI} ; \quad M_2 = M_{max} = 0,318 PR.$$

Expresia deplasării δ_{st} este stabilită pentru bare cu rază mare de curbură. În acest caz, efortul unitar static se calculează cu relația stabilită pentru barele drepte :

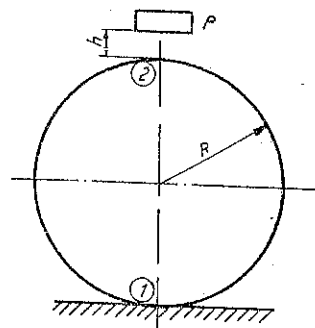


Fig. 13.31

$$\begin{aligned} \sigma_{st} &= \frac{M_2}{W_2} = \frac{0,318 PR}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \\ &= \frac{0,318 \cdot 80 \cdot 44 \cdot 32}{\pi \cdot 4^3} = 178,2 \text{ daN/cm}^2. \\ \delta_{st} &= 0,149 \frac{80 \cdot 44^3}{2,1 \cdot 10^6 \frac{\pi \cdot 4^4}{64}} = 0,0385 \text{ cm}, \\ \psi &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,0385}} = 8,27 \end{aligned}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_d = \psi \sigma_{st} = 8,27 \cdot 178,2 = 1473 \text{ daN/cm}^2.$$

13.32. O greutate $P = 200 \text{ daN}$ cade de la înălțimea h în capătul unui arc elicoidal cu următoarele dimensiuni : $R = 80 \text{ mm}$; $d = 20 \text{ mm}$; $n = 12 \text{ spire}$; $G = 8,5 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$. Se cere să se calculeze înălțimea de cădere h astfel încât $\tau_{max} = \tau_a = 4000 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. $\tau_a = \tau_a = \psi \tau_{st} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}\right) \tau_{st}$;

$$\tau_{st} = \frac{PR}{W_p} = \frac{16 \cdot 200 \cdot 8}{\pi \cdot 2^3} = 1020 \text{ daN/cm}^2 ;$$

$$\delta_{st} = \frac{64 \cdot PR^3 n}{G d^4} = \frac{64 \cdot 200 \cdot 8^3 \cdot 12}{8,5 \cdot 10^5 \cdot 2^4} = 5,78 \text{ cm} ;$$

$$\psi = \frac{\tau_a}{\tau_{st}} = \frac{4000}{1020} = 3,92 ; \quad 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 3,92 ;$$

$$h = \frac{2,92^2 - 1}{2} \cdot \delta_{st} = \frac{7,527}{2} \cdot 5,78 = 21,75 \text{ cm}.$$

13.33. Un arbore de transmisie, cu diametrul $d = 5 \text{ cm}$ și lungimea $l = 10 \text{ m}$, are la capete câte o roată de transmisie cu diametrul $D = 35 \text{ cm}$ și greutatea $P = 7 \text{ daN}$. Dacă arborele se rotește cu $n = 120 \text{ rot/min}$ și la un moment oarecare una din roțile de la capete este brusc imobilizată, se cere să se calculeze efortul unitar de răsucire ce se produce în arbore în două ipoteze :

a) ținând seamă de masa arborelui ;

b) neglijând masa arborelui.

Se dă greutatea specifică $\gamma = 7,8 \text{ daN/cm}^3$.

Rezolvare. a) Efortul unitar maxim se poate determina prin metoda arătată la punctul 6 din „Definiții și formule”. Energia de deformare la solicitarea de torsiune este, după relația (13.24) :

$$E_d = \frac{1}{2} \frac{\tau_{max}^2}{2G} V \quad (1)$$

În cazul arborelui din problemă, care se rotește cu viteza unghiulară $\omega = \frac{\pi n}{30}$, care variază brusc de la ω la 0, variația de energie cinetică este :

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (2)$$

unde J este suma momentelor de inerție al arborelui și al unei roți.

Egalind (1) cu (2) se obține :

$$\tau_{max}^2 = \frac{2JG\omega^2}{V}, \quad (3)$$

unde V este volumul arborelui.

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 12,56 \text{ rad/s}.$$

$$V = \frac{\pi d^2}{4} l = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} \cdot 1000 = 19600 \text{ cm}^3 = 0,0196 \text{ m}^3$$

Momentul de inerție masic al arborelui față de axa de rotație este :

$$J_1 = \frac{Q d^2}{8g} = \frac{V \gamma d^2}{8g} = \frac{0,0196 \cdot 78 \cdot 10^3 \cdot 0,05^2}{8 \cdot 9,81} = 0,0487 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

unde Q este greutatea arborelui.

Momentul de inerție al roții este :

$$J_2 = \frac{PD^2}{8g} = \frac{70 \cdot 0,35^2}{8 \cdot 9,81} = 0,1093 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

unde P este greutatea roții.

$$J = J_1 + J_2 = 0,0437 + 0,1093 = 0,158 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Din relația (3) se obține :

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \omega \cdot \sqrt{\frac{2JG}{V}} = 12,56 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,158 \cdot 8,1 \cdot 10^5 \cdot 10^4}{0,0196}} = \\ &= 14,35 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 = 143,5 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned}$$

b) În cazul cînd se neglijează masa arborelui, momentul de inerție este :

$$\begin{aligned} J &= J_2 = 0,1093 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ \tau_{\max} &= \omega \sqrt{\frac{2JG}{V}} = 12,56 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1093 \cdot 8,1 \cdot 10^5 \cdot 10^4}{0,0196}} = \\ &= 119,3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 119,3 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned}$$

Se vede că diferența dintre rezultate este apreciabilă, ea fiind de aproximativ 20 %.

13.34. Arborele de transmisie din figura 13.34, *a*, cu diametrul d și lungimea l , are la mijloc o roată cu momentul de inerție masic J . Se cere să se calculeze efortul unitar tangențial care se produce în arbore dacă acesta se rotește cu viteza unghiulară ω , iar la un moment oarecare se oprește mișcarea prin frinarea bruscă :

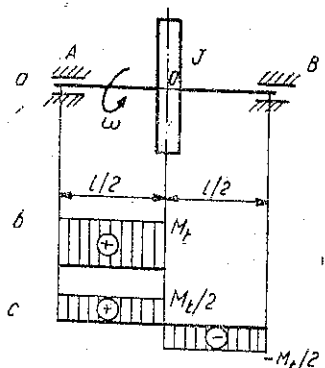


Fig.13.34

a) numai a capătului A al arborelui ;
b) a ambelor capete.

Se neglijează masa arborelui.

Rezolvare. a) Energia cinetică a roții în mișcare de rotație se transformă în energie potențială de deformare a arborelui pe porțiunea OA.

Diagrama de variație a momentului de răsucire M_t , care deformează arborele, este dată în figura 13.34, *b* :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J \omega^2 &= \frac{1}{2} \frac{M_t^2}{GI_p} \cdot \frac{l}{2} ; M_t = \omega \sqrt{\frac{2J \cdot GI_p}{l}}, \\ \tau_{\max} &= \frac{M_t}{W_p} = \frac{4\omega}{d} \sqrt{\frac{J \cdot G}{\pi \cdot l}}. \end{aligned} \quad (1)$$

b) În al doilea caz arborele se deformează pe întreaga lungime l . Diagrama de variație a momentului de răsucire M_t , care deformează arborele este dată în figura 13.34, *c* ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J \omega^2 &= 2 \cdot \frac{1}{2GI_p} \left(\frac{M_t}{2} \right)^2 \frac{l}{2} ; M_t = 2\omega \sqrt{\frac{J \cdot GI_p}{l}}, \\ \tau_{\max} &= \frac{M_t}{W_p} = \frac{2\omega}{d} \sqrt{\frac{2JG}{\pi \cdot l}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Comparînd relațiile (1) și (2) se constată că în cazul *b*) efortul unitar tangențial este mai mic decît cel din cazul *a*).

13.35. Arborele de transmisie I, de diametru d_1 , din figura 13.35 se rotește cu viteza unghiulară ω_1 . Se cere să se calculeze efortul unitar tangențial maxim care se produce în arborele II, de diametru d_2 , dacă mișcarea se oprește brusc prin frinare în punctul A. Se dă $J_2 = \frac{1}{4} J_1$, $\omega_2 = 2\omega_1$.

Rezolvare. Energia cinetică a roților I și 2 se consumă pentru deformarea arborelui II pe porțiunea OA :

$$\frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2) = \frac{M_t^2 l}{2GI_p}. \quad (1)$$

$$\text{Deoarece } J_2 = \frac{1}{4} J_1, \omega_2 = 2\omega_1,$$

expresia (1) devine :

$$J_1 \omega_1^2 = \frac{M_t^2 l}{2GI_p} ; M_t = \omega_1 \sqrt{\frac{2J_1 GI_p}{l}},$$

de unde :

$$\tau_{\max} = \frac{4\omega_1}{d_2} \sqrt{\frac{J_1 G}{\pi \cdot l}}.$$

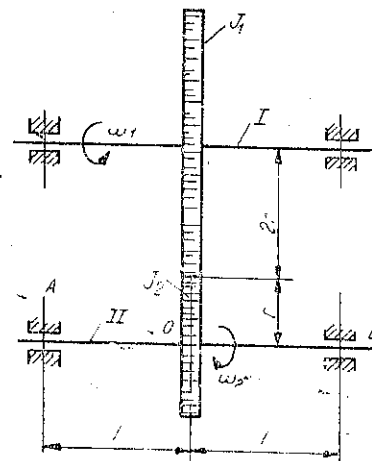


Fig. 13.35

13.36. Asupra grinzii cotite de oțel din figura 13.36, de dimensiuni $a = 30 \text{ cm}$, $b = 80 \text{ cm}$, cade o greutate $P = 50 \text{ daN}$, de la o înălțime $h = 1,2 \text{ cm}$. Să se verifice grinda, știind că este de secțiune circulară cu $d = 6 \text{ cm}$, iar $\sigma_a = 1200 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Efortul unitar dinamic este dat de relația (13.11). Săgeata statică produsă de sarcina P în punctul I se calculează ca în problema (10.37) obținîndu-se

$$\delta_{st} = \frac{P(a^3 + b^3)}{3EI} + \frac{Pa^2b}{GI_p} = \frac{50(30^3 + 80^3)}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 6^4}{64}} + \frac{50 \cdot 30^2 \cdot 80}{8,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 6^4}{32}} = 0,102 \text{ cm}.$$

Coefficientul de impact are valoarea

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1,2}{0,102}} \approx 6.$$

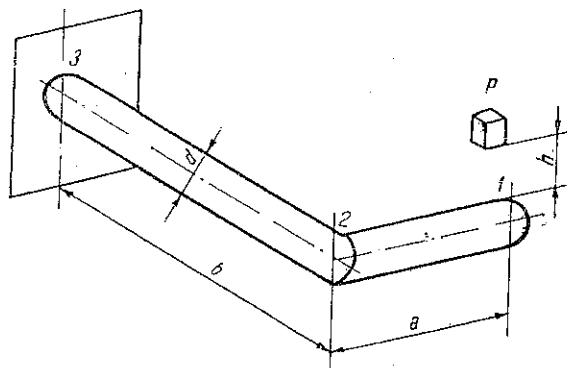


Fig. 13.36

Secțiunea cea mai solicitată este în punctul 3 unde momentul încovoietor echivalent are valoarea (după teoria a 3-a de rezistență):

$$M_{ech3} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = \sqrt{(50 \cdot 30)^2 + (50 \cdot 80)^2} = 4280 \text{ daNcm}.$$

Efortul unitar echivalent static este

$$\sigma_{ech-st} = \frac{M_{ech3}}{W} = \frac{4280}{\frac{\pi \cdot 6^3}{32}} = 202 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar dinamic are valoarea

$$\sigma_{ech-d} = \psi \cdot \sigma_{ech-st} = 6 \cdot 202 = 1212 \text{ daN/cm}^2 \approx \sigma_a.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

13.37. Bara de secțiune constantă A și lungime l din figura 13.37 se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul axei verticale. Se cere să se construiască diagrama forțelor axiale și să se calculeze efortul unitar maxim de întindere, produs de forțele de inerție, neglijând greutatea barei. Se dau: $n = 1000 \text{ rot/min}$, $l = 1 \text{ m}$, $\gamma = 7,85 \text{ daN/dm}^3$.

$$\text{Răspuns: } \sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{\gamma l^2 \omega^2}{2g} = 439 \text{ daN/cm}^2.$$

13.38. Să se refacă problema 13.4 în cazul când viteza unghiulară are o valoare mai mică, ceea ce face ca poziția de echilibru să fie oare-

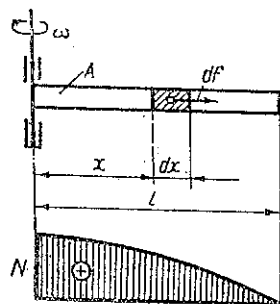


Fig. 13.37

care, iar greutatea proprii să fie luate în considerare. Se va determina întâi poziția de echilibru relativ a sistemului și apoi se vor construi diagramele N , T , M la cele trei bare, luând în considerare atât forțele de inerție cât și greutatea proprii.

Indicație. Se determină poziția de echilibru relativ prin principiul deplasărilor virtuale, sau prin altă metodă. După aceea, se pot separa barele, introducând reacțiunile și se pot construi diagramele N , T , M .

13.39. Să se calculeze efortul unitar σ_{max} care se produce în meul studiat în problema 13.7.

Răspuns. Efortul unitar maxim are loc în secțiunea A , iar valoarea sa este

$$\sigma_{max} = \frac{\gamma R^2 \omega^2}{g} \left(1 + \frac{AR}{4W} \right).$$

13.40. Să se găsească efortul unitar maxim în secțiunea A_1 (v. Fig. 13.10) pentru o paletă de turbină de secțiune variabilă după relația:

$$A = A_1 \left(\frac{H-z}{H} \right)^2,$$

în care H este distanța de la baza paletii până la punctul de întâlnire al prelungirilor laturilor paletii,

z — distanța de la baza paletii la un punct oarecare.

Răspuns: Se aplică metoda din problema 13.10 și se află

$$\sigma_1 = \frac{\gamma l \omega^2}{12g} \left[2 \left(R_1 + \frac{A_2}{A_1} R_2 \right) + (R_1 + R_2) \left(1 + 2 \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} + \frac{A_2}{A_1} \right) \right].$$

13.41. Ce rază trebuie să aibă un volant de fontă, care se rotește cu $n = 300 \text{ rot/min}$, spre a nu se depăși rezistența admisibilă $\sigma_a = 67 \text{ daN/cm}^2$? Se dă $\gamma = 7,25 \cdot 10^{-3} \text{ daN/cm}^3$.

$$\text{Răspuns: } R = \frac{v}{\omega} = 95,6 \text{ cm}.$$

13.42. Semicercul de rază R din figura 13.42 se rotește în jurul unui ax vertical, cu viteza unghiulară constantă ω . Să se calculeze momentul încovoietor maxim produs de forțele de inerție dacă masa semicercului este uniform repartizată pe toată lungimea.

$$\text{Răspuns: } M_{max} = M_2 = \frac{\gamma A R^3 \omega^2}{2g}.$$

13.43. Să se calculeze efortul unitar ce se produce într-o grindă I 20 simplă rezemată,

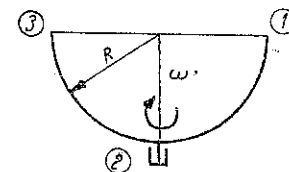


Fig. 13.42

pe mijlocul căreia se așază brusc o sarcină $P = 1\,300$ daN, dacă lungimea grinzii este $l = 4$ m.

Răspuns: Așezarea bruscă este echivalentă cu o sarcină dinamică aplicată de la înălțimea $h = 0$. Se obține:

$$\psi = 2; \sigma_d = \psi \sigma_{st} = 1\,216 \text{ daN/cm}^2.$$

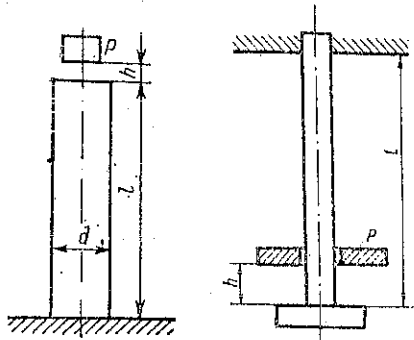


Fig. 13.44

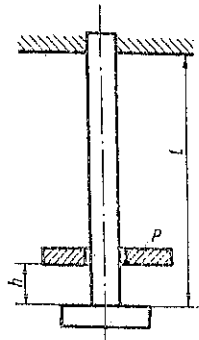


Fig. 13.45

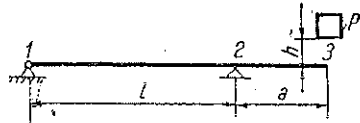


Fig. 13.46

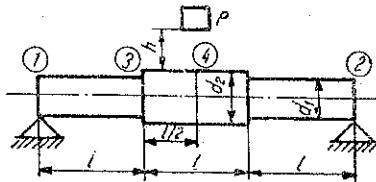


Fig. 13.47

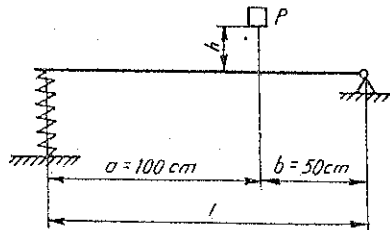


Fig. 13.48

13.44. Pe o bară cu diametrul $d = 55$ mm și lungimea $l = 1$ m, cade axial un berbec cu greutatea $P = 1\,000$ daN, de la înălțimea $h = 1$ cm. Să se verifice bara, dacă este confecționată din oțel cu $\sigma_a = 1\,800$ daN/cm² (Fig. 13.44).

Răspuns: $\sigma_d = 1\,372$ daN/cm².

13.45. Asupra unei tije de oțel de lungime $l = 2$ m cade o greutate $P = 50$ daN, de la o înălțime $h = 1$ cm. Să se dimensioneze tija dacă rezistența admisibilă este $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm² (Fig. 13.45).

Răspuns: $d = 9$ mm.

13.46. Să se calculeze efortul unitar maxim și săgeata maximă care apar în grinda de profil I 14 din figura 13.46, dacă la capătul consolei cade o greutate $P = 100$ daN, de la o înălțime $h = 5$ cm. Se dau $l = 2$ m, $a = 1$ m.

Răspuns: $\sigma_d = 1\,464$ daN/cm²,
 $\delta_d = 0,996$ cm.

13.47. Să se verifice bara din figura 13.47, asupra căreia cade greutatea $P = 80$ daN de la înălțimea $h = 1,5$ cm. Bara este din oțel, de secțiune circulară având $d_1 = 5$ cm și $d_2 = 6$ cm. Se dau: $\sigma_a = 1\,800$ daN/cm², $l = 30$ cm.

Răspuns: $\sigma_{d3} = 1\,653$ daN/cm²,
 $\sigma_{d4} = 1\,435$ daN/cm².

13.48. Să se determine înălțimea maximă h de la care poate cădea liber greutatea $P = 60$ daN pe grinda din figura 13.48, de lungime $l = 150$ cm, astfel încât să nu se depășească efortul unitar admisibil $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm². Grinda este un profil I 8 și se sprijină pe un arc elicoidal având raza de în-

fășurare $R = 6$ cm, diametrul sîrmei $d = 1$ cm și numărul de spire $n = 8$.

Răspuns: $h = 70,4$ cm.

13.49. O greutate $P = 80$ daN cade de la înălțimea $h = 1,5$ cm pe grinda de oțel din figura 13.49. Grinda este de secțiune dreptunghiulară cu dimensiunile $b = 6$ cm, $h = 12$ cm. Să se verifice grinda, cunoscînd rezistența admisibilă $\sigma_a = 1\,000$ daN/cm².

Se dau: $l = 120$ cm.

$$\text{Răspuns: } \delta_{st} = \frac{71}{128} \frac{Pl^3}{EI}$$

$$= 0,042 \text{ cm,}$$

$$\sigma_{st} = 44,8 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_d = 425 \text{ daN/cm}^2.$$

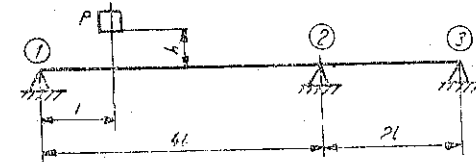


Fig. 13.49

SOLICITĂRI VARIABILE ÎN TIMP

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Solicitarea variabilă în timp este formată din *cicluri*, adică din variații periodice ale efortului unitar între o valoare maximă și una minimă, ca în figura 14. a. Următoarele mărimi definesc ciclul de solicitări variabile:

- efortul unitar maxim σ_{max}
- efortul unitar minim σ_{min}
- efortul unitar mediu σ_m :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \quad (14.1)$$

- amplitudinea efortului unitar:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}; \quad (14.2)$$

- coeficientul de asimetrie al ciclului:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}; \quad (14.3)$$

După semnele pe care le au mărimile de mai sus, se definesc următoarele feluri de cicluri:

- ciclul alternant simetric, avînd:

$$\sigma_m = 0; \quad \sigma_a = \sigma_{max};$$

- ciclul pulsant, cu:

$$\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{max}}{2};$$

- solicitarea statică cu:

$$\sigma_m = \sigma_{max} = \sigma_{min}; \quad \sigma_a = 0.$$

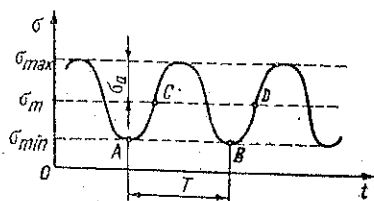


Fig. 14. a

2. Un element de bază în calculul de rezistență la solicitări variabile este *rezistența la oboseală*, determinată pe cale experimentală.

Ea se notează cu: σ_{-1} , pentru ciclul simetric;

σ_0 , pentru ciclul pulsant;

σ_R , pentru ciclul cu coeficient de asimetrie oarecare.

Cunoașterea completă a unui material în ce privește rezistența la oboseală, implică construirea *diagramei rezistențelor la oboseală*, adică diagrama care dă pe σ_R în funcție de coeficientul de asimetrie R . Practica a consacrat două tipuri de diagrame ale rezistențelor la oboseală.

— unele care dau pe σ_a în funcție de σ_m , valorile σ_a și σ_m corespunzînd rezistențelor la oboseală ale diverselor cicluri;

— altele care dau pe σ_{max} și σ_{min} în funcție de σ_m .

Diagramele rezistențelor la oboseală sînt, în general, linii curbe. Construirea acestor curbe este dificilă și din acest motiv se folosesc *diagrame schematizate*.

Rezistențele la oboseală ale ciclurilor simetric, pulsant și oarecare se notează cu următoarele simboluri:

— pentru încovoiere: σ_{-1} , σ_0 , σ_R

— pentru întindere-compresiune: σ_{-1t}

— pentru întindere: σ_{0t} , σ_{Rt}

— pentru compresiune: σ_{0c} , σ_{Rc}

— pentru răsucire: τ_{-1} , τ_0 , τ_R .

3. Rezistențele la oboseală sînt determinate, în general, pe epruvete tip netede, cu suprafețe bine șlefuite și cu diametre în jurul a 10 mm.

Experiența a arătat că anumiți factori care se întîlnesc la piesele reale, diferiți de cei întîlniți la epruvetele tip, modifică valorile rezistențelor la oboseală. Se poate face o grupare, împărțindu-i în factori:

I. Constructivi:

- a) concentrarea eforturilor unitare;
- b) dimensiunile piesei.

II. Tehnologici:

- c) materialul și tehnologia semifabricatului;
- d) starea suprafeței piesei;
- e) tratamentele termice, mecanice și chimice pentru mărirea rezistenței la oboseală.

III. De lucru:

- f) acțiunea agenților corozivi;
- g) variația solicitărilor;
- h) temperatura;
- i) felul solicitării;
- j) asimetria ciclului.

Efectul unora dintre acești factori a putut fi determinat cantitativ destul de bine, ceea ce permite luarea lor în considerare în calcul. Pentru

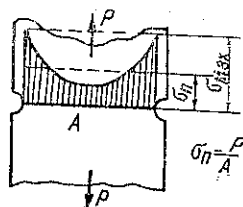


Fig. 14. b

alții, se cunoaște efectul calitativ, din care rezultă prescripții de ordin tehnologic. În cele ce urmează se face o scurtă examinare a acestor factori.

a) *Efectul de concentrare a eforturilor unitare* este unul din factorii principali care trebuie luați în considerare în calcule.

Fenomenul de concentrare a eforturilor unitare la solicitări statice, reprezentat schematic în figura 14. b, este îndeajuns de cunoscut. Efortul unitar maxim în dreptul concentratorului este dat de formula:

$$\sigma_M = \alpha_k \sigma_n \quad (14.4)$$

în care: α_k este coeficientul de concentrare;

σ_n — efortul unitar nominal, dat de formulele curențe din rezistența materialelor.

Coeficientul de concentrare α_k intră în calculele de rezistență în cazul solicitărilor statice. La solicitări variabile, se folosește coeficientul efectiv de concentrare K_σ , K_τ , definit ca raport dintre rezistența la oboseală a epruvetei tip și rezistența la oboseală a epruvetei crestate, ambele având aceleași dimensiuni minime, deci același efort unitar nominal. Valorile lui K_σ , K_τ , întocmai ca acelea ale rezistenței la oboseală, depind de o serie întreagă de factori (material, forma concentratorului, starea suprafeței dimensiunile piesei etc.) ceea ce face mult mai dificilă determinarea lor. În acest caz se recurge, în general, la grafice. Pe lângă acestea se folosesc și diverse formule de recurență pentru calculul lui K_σ , K_τ .

O formulă, utilizată adesea, calculează pe K_σ în funcție de α_k .

$$K_\sigma = 1 + \eta_k(\alpha_k - 1). \quad (14.5)$$

Valorile lui η_k pentru oțeluri se pot lua din figura 14. c, în funcție de raza de racordare r a concentratorului și de raportul $\frac{\sigma_r}{\sigma_r}$ între limita de curgere și rezistența la rupere.

În figura 14. d se dau valorile lui α_k pentru bara de secțiune circulară având variație de diametru, de la D la d , realizată cu racordare circulară.

Pentru același concentrator, solicitat la răsucire, valorile lui K_τ , pentru $\frac{D}{d} = 1,4$ și $d = 12,5$ mm,

sînt date de figura 14. e în care curba 1 este pentru $\sigma_r = 120$ daN/mm²; 2 — pentru $\sigma_r = 60$ daN/mm²; 3 — pentru $\sigma_r = 40$ daN/mm².

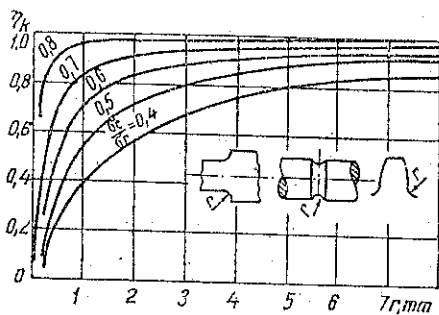


Fig. 14. c

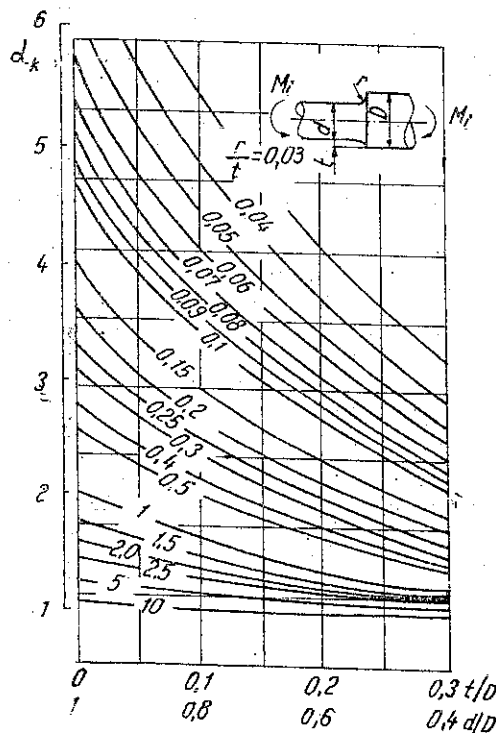


Fig. 14. d

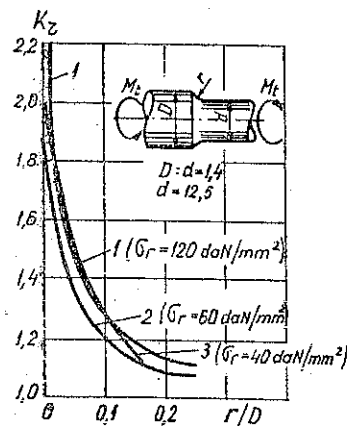


Fig. 14. e

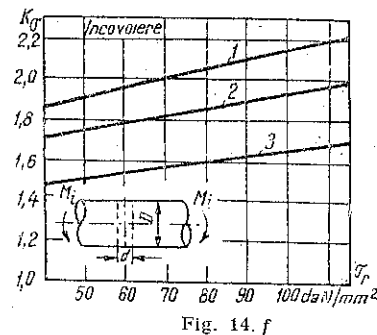


Fig. 14. f

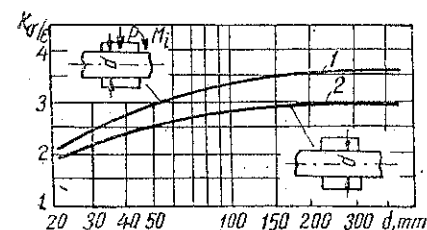


Fig. 14. g

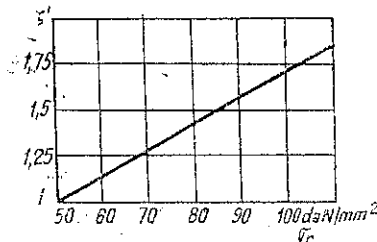


Fig. 14. h

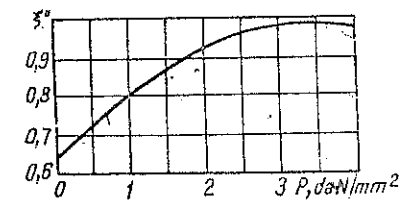


Fig. 14. i

Pentru arborele de secțiune circulară, avind o gaură transversală, solicitat la încovoiere, coeficienții K_σ se iau din figura 14. f, în care: curba 1 este pentru $\frac{d}{D} = 0,05 \dots 0,1$ și $D = 40 \dots 50$ mm; curba 2—pentru $\frac{d}{D} = 0,10 \dots 0,20$ și $D = 40 \dots 50$ mm; curba 3—pentru $\frac{d}{D} = 0,15 \dots 0,25$ și $D = 6 \dots 8$ mm.

În figura 14. g se dau coeficienții de concentrare, inclusiv factorul dimensional $\left(\frac{K_\sigma}{\epsilon}\right)$, pentru montaje presate: curba 1 cind bușă transmite o forță sau cuplu; curba 2 cind bușă nu transmite sarcini. Graficele sînt construite pentru arbore de oțel cu $\sigma_r = 50$ daN/mm², respectiv pentru o presiune între bușă și arbore $p \geq 3$ daN/mm². Pentru alte rezistențe de rupere, respectiv altă presiune de fretaj, coeficientul de concentrare este

$$\left(\frac{K_\sigma}{\epsilon}\right) = \left(\frac{K_\sigma}{\epsilon}\right)_0 \cdot \xi' \xi'', \quad (14.6)$$

unde $\left(\frac{K_\sigma}{\epsilon}\right)_0$ sînt valorile din figura 14. g, iar coeficienții de corecție ξ' , ξ'' se iau din figurile 14. h și i. Valorile din figura 14. g sînt pentru arbori solicitați la încovoiere. Pentru răsucire se ia

$$\left(\frac{K_\tau}{\epsilon}\right) = 1 + 0,6 \left(\frac{K_\sigma}{\epsilon} - 1\right). \quad (14.7)$$

b) Dimensiunile epruvetelor au de asemenea influență asupra rezistenței la oboseală: cu cît diametrul piesei crește, rezistența la oboseală scade. Acest efect se ia în considerare în calcule prin introducerea coeficientului dimensional ϵ , subunitar, care este raportul între rezistența la oboseală a epruvetei cu diametrul oarecare și cea a epruvetei tip, cu diametrul de 10 mm sau apropiat de acesta. În cazul unei piese cu creștături, factorul dimensional (notat uneori cu ϵ_k) are o definiție analoagă.

Valorile coeficientului dimensional se iau din figura 14. j pentru oțeluri solicitate la încovoiere. În lipsă de alte date, aceste valori se pot folosi și pentru răsucire. Curbele din figura 14. j se referă la:

- 1) oțel carbon, fără concentrări de eforturi unitare;
- 2) oțel aliat fără concentrări și oțel carbon cu concentrări moderate;
- 3) oțel aliat cu concentrări moderate de eforturi unitare;
- 4) oțel aliat cu concentrări puternice.

c) Fiecare material are caracteristicile sale mecanice, deci și caracteristici proprii la oboseală.

d) Starea suprafeței epruvetei are o mare influență asupra valorii rezistenței la oboseală. Suprafața unei piese reprezintă în general locul de apariție a microfisurilor care provoacă ruperea prin oboseală.

Gradul de prelucrare a suprafeței influențează în mare măsură valoarea rezistenței la oboseală. Epruvetele standard au suprafața șlefuită. Pentru piese cu o prelucrare mai brută, rezistența la oboseală scade. Acest lucru

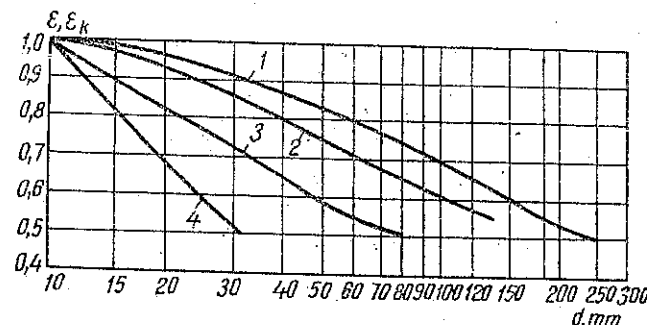


Fig. 14. j

se ia în considerare în calcule prin introducerea coeficientului de stare a suprafeței γ , care este raportul dintre rezistența la oboseală a piesei cu o prelucrare oarecare a suprafeței și rezistența la oboseală a piesei cu suprafața șlefuită. Valorile lui γ , pentru oțel, se pot lua din figura 14. k. Aceasta se referă la:

- 1) epruvetă lustruită;
- 2) șlefuire;
- 3) finisare prin strunjire;
- 4) degroșare prin strunjire;
- 5) piese cu concentrator inelar;
- 6) suprafața laminată, cu crustă;
- 7) coroziune în apă dulce;
- 8) coroziune în apă sărată.

e) Tratamentele termice, mecanice și chimice pentru mărirea rezistenței la oboseală sînt: călirea prin curenți de înaltă frecvență, călirea prin flacără, cementarea, nitrurarea, cocrisarea cu jet de alic, rularea cu role. La oricare din aceste tratamente, apare de asemenea un coeficient de calitate γ , de data aceasta supraunitar. Valori informative pentru acești coeficienți se găsesc în literatura de specialitate.

Pentru protecția împotriva uzurii și coroziunii a pieselor de oțel, se folosesc acoperiri metalice, realizate în general pe cale electrochimică, din: crom, nichel, cupru, zinc etc. Aceste straturi acoperitoare au un rol foarte important în mărirea rezistenței la uzură și coroziune. În schimb, ele duc la ușoare micșorări ale rezistenței la oboseală, ceea ce se traduce prin apariția în formulele de rezistență a unui coeficient de calitate subunitar γ .

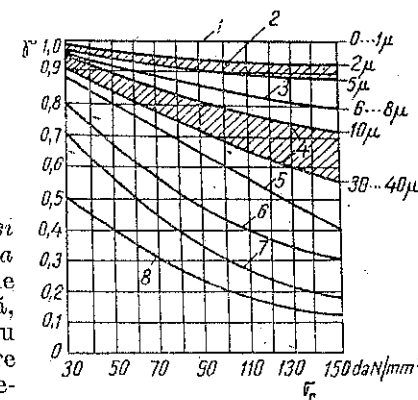


Fig. 14. k

f) Acțiunea agenților corozivi este foarte dăunătoare asupra rezistenței la oboseală. Efectul acestora se ia în considerare prin același coeficient γ , definit mai sus. Adesea se introduce în calcul coeficientul de calitate γ care reprezintă atât acțiunea agentului coroziv, cât și efectul metodei de protecție împotriva coroziei. În această situație, cu cât protecția anticorozivă este mai eficientă, cu atât coeficientul de calitate γ este mai mare, ajungând, uneori, chiar la valori supraunitare.

g) În ce privește frecvența de variație a solicitărilor, se constată că ea nu are influență asupra rezistenței la oboseală, deci nu va apărea în calcule.

h) Temperaturile înalte, întâlnite în unele construcții de mașini, influențează simțitor rezistența la oboseală.

i) Felul solicitării — întindere, încovoiere, răsucire, solicitări compuse — determină valoarea rezistenței la oboseală corespunzătoare.

j) Asimetria ciclului condiționează valoarea rezistenței la oboseală.

4. În calculul de rezistență la oboseală, se urmărește în general verificarea coeficientului de siguranță pentru piese dimensionate în baza unor evaluări aproximative. Mai rar, se determină rezistența admisibilă la solicitări variabile, prin metode similare celor de verificare a coeficientului de siguranță.

În aceste calcule intră următoarele mărimi:

— eforturile unitare nominale ale ciclurilor de solicitări variabile σ_{max} , σ_m , σ_a ;

— caracteristicile mecanice ale materialelor, la solicitări statice și variabile σ_r , σ_c , σ_{-1} , σ_0 ;

— coeficienții K_σ , ϵ , γ , care reprezintă efectul asupra rezistenței la oboseală al concentratorilor de eforturi unitare, al dimensiunilor piesei și al stării suprafeței piesei;

— valorile statistice, informative, asupra coeficientului de siguranță, care depind de material, procedeele tehnologice, importanța piesei și a mașinii etc.

Există metode variate de calcul al coeficientului de siguranță.

O clasificare în mare poate deosebi două feluri de coeficienți de siguranță.

a) Un coeficient de siguranță c , definit ca raportul dintre rezistența la oboseală și efortul unitar maxim din piesă, cu condiția de a se compara cicluri similare, iar piesele comparate să fie identice sau echivalente. Echivalența între piese care nu sînt identice se realizează prin introducerea în calcule a coeficienților K_σ , ϵ , γ .

b) Un coeficient de siguranță global K , prin care se compară rezistența la oboseală a epruvetei tip cu efortul unitar maximal din piesa reală. Acest coeficient global este, desigur, mai mare decât c .

În continuare sînt prezentate amănunte asupra primei clase de metode:

Pentru determinarea coeficientului de siguranță c se ajunge la metode de calcul variate, după forma diagramei schematizate care se utili-

zează și după criteriul de asemănare ales între ciclul real și cel limită de pe diagrama rezistențelor la oboseală.

În cazul particular al ciclului simetric, care are $\sigma_{max} = \sigma_a$, coeficientul de siguranță are expresia:

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a \epsilon \gamma} \quad (14.8)$$

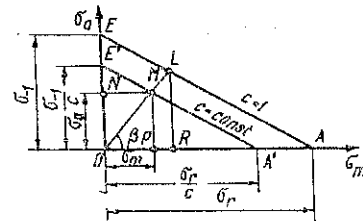


Fig. 14. i

Pentru ciclurile asimetrice, apar metode de calcul variate, din motivele arătate mai sus.

α) În metoda Soderberg, se poate lua ca diagramă a ciclurilor limită linia dreaptă EA din figura 14. i. Ciclurile cu coeficienți de siguranță c se află pe linia E'A', paralelă cu EA. Două cicluri se consideră asemenea — de exemplu ciclul M asemenea cu ciclul limită L — dacă au același coeficient de simetrie R, ceea ce se traduce prin faptul că ele se află pe o dreaptă care trece prin origine. Se ajunge la formula care dă coeficientul de siguranță:

$$c = \frac{1}{K_\sigma \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r} \right) \epsilon \gamma} \quad (14.9)$$

Pentru metale tenace punctul A din figura 14. i corespunde limitei de curgere, nu rezistenței de rupere, ceea ce face ca formula (14.9) să se transforme în:

$$c = \frac{1}{K_\sigma \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r} \right) \epsilon \gamma} \quad (14.10)$$

Coeficienții de siguranță calculați mai sus se numesc coeficienți de siguranță față de rezistența la oboseală. În afară de aceștia, se determină și coeficientul de siguranță față de limita de curgere:

$$c_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_r}{\sigma_m + \sigma_a} \quad (14.11)$$

β) În metoda Serensen, diagrama schematizată este formată din linii frunte. Una dintre formele curente de schematizare este cea din figura 14. m, care, pentru cicluri situate în triunghiul EOG, duce la expresia coeficientului de siguranță:

$$c = \frac{1}{K_\sigma \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \phi \frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}} \right) \epsilon \gamma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a + \phi \sigma_m} \quad (14.12)$$

În această relație, coeficientul ψ are expresia :

$$\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \quad (14.13)$$

Dacă ciclul se află în triunghiul OGB (Fig. 14. m) se calculează coeficientul de siguranță față de limita de curgere, cu formula (14.11).

γ) Dacă diagrama ciclurilor limită, pentru metale tenace, este schematizată sub forma unui sfert de elipsă, de semiaxe σ_{-1} și σ_c , ca în figura 14. n, coeficientul de siguranță are expresia :

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\left(\frac{K_\sigma}{\varepsilon\gamma}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_c}\right)^2 \sigma_m^2}} \quad (14.14)$$

În figura 14. n, elipsa mare este curba ciclurilor limită, iar cea mai mică curba ciclurilor cu coeficient de siguranță $c = \text{const.}$

Pentru simplificare, în calcule, adesea se notează coeficientul de concentrare complex

$$K_{\sigma P} = \frac{K_\sigma}{\varepsilon\gamma}$$

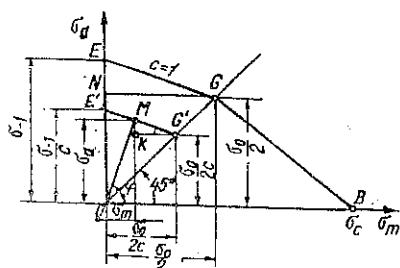


Fig. 14. m

Cînd $\gamma = 1$, el devine

$$K_{\sigma P} = \frac{K_\sigma}{\varepsilon}$$

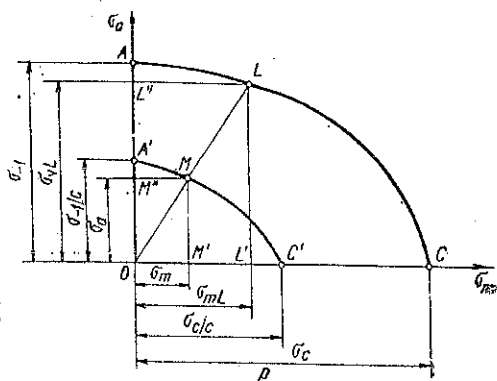


Fig. 14. n

5. La solicitări compuse, în cazul materialelor cu proprietăți plastice accentuate, coeficientul de siguranță se determină cu ajutorul relației :

$$c = \frac{c_\sigma c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} \quad (14.15)$$

unde c_σ și c_τ sînt coeficienții de siguranță ai solicitărilor simple componente, determinați prin metodele arătate mai sus.

Observație. În acest capitol rezistențele admisibile se notează cu σ_{adm} sau τ_{adm} , simbolul σ_a , τ_a fiind folosit pentru amplitudinea efortului unitar.

B. PROBLEME REZOLVATE

14.1. Pentru un oțel, se dau $\sigma_{-1} = 24 \text{ daN/mm}^2$; $\sigma_c = 37 \text{ daN/mm}^2$. Dacă se ia diagrama ciclurilor limită ca o linie dreaptă, se cere să se determine rezistența la oboseală pentru ciclurile cu $R = 0,5$ și $R = -0,2$.

Rezolvare. Problema se poate trata grafic sau analitic. S-a ales calea grafică, întocmindu-se figura 14.1. Ciclurile asemenea se află pe o dreaptă care trece prin origine și are coeficientul unghiular φ dat de relația :

$$\text{tg } \varphi = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{1 - R}{1 + R}$$

Pentru cele două valori date ale lui R , rezultă :

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{1 - 0,5}{1 + 0,5} = \frac{1}{3}$$

$$\text{tg } \varphi_2 = \frac{1 + 0,2}{1 - 0,2} = \frac{3}{2}$$

Se trasează dreptele respective, OB și OD și se citesc pe desen rezistențele la oboseală :

$$\sigma_{0,5} = OA + AB = 32,6 \text{ daN/mm}^2,$$

$$\sigma_{-0,2} = OC + CD = 27,7 \text{ daN/mm}^2.$$

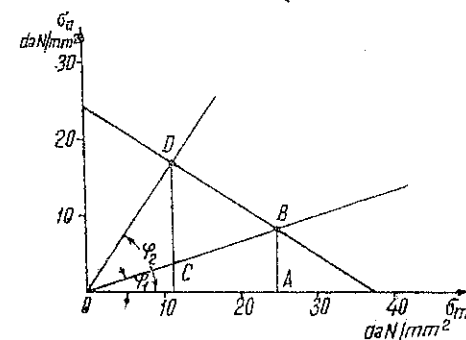


Fig. 14.1

14.2. Un arbore de mașină este solicitat la răsucire printr-un ciclu asimetric cu $R = -0,5$. Materialul are caracteristicile mecanice : $\sigma_r = 50 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_c = 18 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_{-1} = 12 \text{ daN/mm}^2$. Să se determine

rezistența la oboseală corespunzătoare acestui ciclu, dacă se dau : $\alpha_k = 1,5$; $\eta_k = 0,6$; $\varepsilon = 1$; $\gamma = 0,78$.

Rezolvare. Se consideră diagrama rezistențelor la oboseală schematizată printr-o linie dreaptă, ca în figura 14.1, avind ca puncte extreme τ_{-1} și τ_a . Conform desenului, se poate scrie :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_a}{\tau_m} = \frac{1-R}{1+R} = \frac{1+0,5}{1-0,5} = 3 = \frac{\tau_{aL}}{\tau_{mL}}$$

(s-a înlocuit σ prin τ).

Din datele problemei, prin aplicarea formulei (14.5), se găsește :

$$K_r = 1 + \eta_k(\alpha_k - 1) = 1 + 0,6(1,5 - 1) = 1,3.$$

Dacă ar fi vorba despre un arbore cu coeficienții $K_r = \varepsilon = \gamma = 1$, ecuația liniei drepte EA care dă ciclurile limită se poate scrie (dacă se înlocuiesc literele σ prin τ și dacă pentru punctul A se ia valoarea limitei de curgere τ_c) :

$$\tau_{aL} = \tau_{-1} \left(1 - \frac{\tau_{mL}}{\tau_a} \right).$$

Înlocuind valoarea de mai sus :

$$\tau_{mL} = \frac{\tau_{aL}}{3}$$

se obține :

$$\tau_{aL} = \tau_{-1} \left(1 - \frac{\tau_{aL}}{3\tau_c} \right),$$

care se transformă în :

$$\tau_{aL} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_{-1}} + \frac{1}{3\tau_c}}.$$

Coeficienții K_r , ε , γ se aplică, după cum se știe, numai asupra lui τ_{-1} nu și asupra lui τ_c . În consecință, pentru arborele real se aplică acești coeficienți în formula de mai sus :

$$\tau_{aL} = \frac{1}{\frac{K_r}{\varepsilon\gamma} \cdot \frac{1}{\tau_{-1}} + \frac{1}{3\tau_c}} = \frac{1}{\frac{1,3}{1 \cdot 0,78} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{3 \cdot 18}} = 6,35 \text{ daN/mm}^2$$

Rezistența la oboseală este :

$$\tau_R = \tau_{max} = \tau_{aL} + \tau_{mL} = \tau_{aL} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = 6,35 \left(1 + \frac{1}{3} \right) = 8,47 \text{ daN/mm}^2$$

14.3. Un arbore avind forma din figura 14. e este sollicitat la răsucire printr-un ciclu oscilant, la care se cunoaște : $R = 0,5$; $D = 75 \text{ mm}$, $d = 60 \text{ mm}$, $r = 5 \text{ mm}$, materialul cu $\sigma_r = 83 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_c = 38 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_{-1} = 21 \text{ daN/mm}^2$. Coeficienții de corecție sînt $K_r = 1,29$, $\varepsilon = 0,65$, $\gamma = 0,83$. Dacă se ia coeficientul de siguranță $c = 2$, se cere să se determine momentul de răsucire $M_{t,max}$ pe care îl poate suporta arborele.

Rezolvare. Momentul capabil este :

$$M_{t,max} = \tau_{adm} \cdot W_p = \tau_{max} W_p$$

$$\tau_{max} = \tau_a + \tau_m.$$

Deci trebuie determinat τ_{max}

$$c = \frac{1}{\frac{K_r}{\varepsilon \cdot \gamma} \cdot \frac{\tau_a}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_c}} \quad (1)$$

$$R = \frac{\tau_{min}}{\tau_{max}}; \quad \tau_{min} = R \tau_{max},$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \tau_{max} \frac{(1 - R)}{2}; \quad (2)$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \tau_{max} \frac{(1 + R)}{2} \quad (3)$$

Din relația (1), în care se înlocuiesc expresiile (2) și (3), se obține

$$\tau_{max} = \frac{2}{c \left(\frac{K_r}{\varepsilon\gamma} \frac{1 - R}{\tau_{-1}} + \frac{1 + R}{\tau_c} \right)} \quad (4)$$

$$M_{t, cap} = W_p \tau_{max} = \frac{\pi d^3}{16} \frac{2}{2 \left(\frac{1,29}{0,65 \cdot 0,83} \cdot \frac{0,5}{21} + \frac{1,5}{38} \right)} = 44 \ 000 \text{ daNcm}.$$

14.4. O bară de secțiune circulară este solicitată la întindere printr-un ciclu oscilant, forța variind între $P_{max} = 7\,000$ daN și $P_{min} = 3\,000$ daN. Să se dimensioneze bara, dacă materialul este un oțel cu $\sigma_c = 30$ daN/mm² și $\sigma_{-1} = 21$ daN/mm², iar $c = 2$.

$$\text{Rezolvare. } A_{nec} = \frac{P_{max}}{\sigma_{adm}};$$

$$\sigma_{adm} = \sigma_{max} = \sigma_a + \sigma_m.$$

Calculul lui σ_{adm} se face folosind relația (4) de la problema 14.3, în care se înlocuiește τ cu σ :

$$\sigma_{max} = \frac{2}{c \left(\frac{K_\sigma}{\epsilon \gamma} \cdot \frac{1-R}{\sigma_{-1}} + \frac{1+R}{\sigma_c} \right)} \quad (1)$$

unde

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{P_{min}}{P_{max}} = \frac{3\,000}{7\,000} = \frac{3}{7}$$

— $K_\sigma = 1$, $\gamma = 1$, iar, într-un prim calcul, $\epsilon = 1$

$$\sigma_{max} = \frac{2}{2 \left(1 \cdot \frac{1 - \frac{3}{7}}{21} + \frac{1 + \frac{3}{7}}{30} \right)} = 13,4 \text{ daN/mm}^2.$$

Cu această valoare se dimensionează bara

$$A_{nec} = \frac{P_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{7\,000}{1\,340} = 5,22 \text{ cm}^2; d = 2,58 \text{ cm}.$$

Se alege $d = 26$ mm. Materialul fiind de tipul oțel carbon, iar bara fără concentrări de eforturi unitare, din curba 1 (Fig. 14. j) se ia $\epsilon = 0,92$. Se recalculează σ_{max} :

$$\sigma_{max} = \frac{2}{2 \left(\frac{1}{0,96} \cdot \frac{1 - \frac{3}{7}}{21} + \frac{10}{30} \right)} = 13,2 \text{ daN/mm}^2.$$

Noua dimensionare dă

$$A_{nec} = \frac{7\,000}{1\,320} = 5,3 \text{ cm}^2; d = 2,6 \text{ cm}.$$

Se menține deci valoarea, $d = 26$ mm.

14.5. O tijă de piston este solicitată printr-un ciclu asimetric, avînd $P_{max} = 70$ kN și $P_{min} = -50$ kN. Tijă se termină prin filet M68. Materialul este oțel cu $\sigma_r = 60$ daN/mm², $\sigma_c = 30$ daN/mm², $\sigma_{-1} = 20$ daN/mm², $\sigma_{01} = 30$ daN/mm². Să se calculeze coeficientul de siguranță.

Rezolvare. După figura 14.5, a, se găsește coeficientul de concentrare, pe curba 3: $K_\sigma = 3,0$. După figura 14.5, b, factorul dimensional este $\epsilon = 0,50$. Rezultă

$$\frac{K_\sigma}{\epsilon} = \frac{3,0}{0,50} = 6.$$

Șurubul are $d_1 = 60,2$ mm, iar aria secțiunii este $A = 28,4 \text{ cm}^2$.

Îmbinarea între tijă și piston este făcută fără prestringere, ceea ce face ca eforturile unitare nominale să aibă valorile

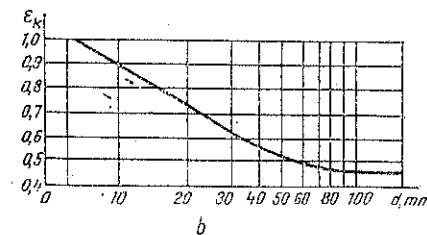
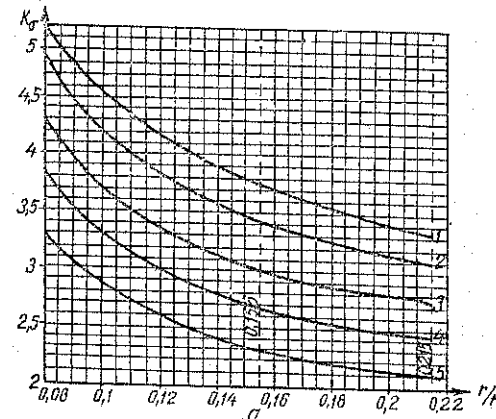


Fig. 14.5

$$\sigma_{max} = \frac{7\,000}{28,4} = 247 \text{ daN/cm}^2; \sigma_{min} = -\frac{5\,000}{28,4} = -176 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_m = \frac{2,47 - 1,76}{2} = 0,35 \text{ daN/mm}^2; \sigma_a = \frac{2,47 + 1,76}{2} = 2,12 \text{ daN/mm}^2.$$

Se determină coeficientul

$$\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_{01}}{\sigma_{01}} = \frac{2 \cdot 20 - 30}{30} = 0,33.$$

Coeficientul de siguranță, calculat prin formula (14.12), este,

$$c = \frac{20}{6 \cdot 2,12 + 0,33 \cdot 0,35} = 1,56.$$

Dacă se folosește formula (14.14) rezultă

$$c = \frac{20}{\sqrt{6^2 \cdot 2,12^2 + 0,35^2 \left(\frac{20}{30}\right)^2}} = 1,57.$$

Solicitarea fiind apropiată de cea simetrică, ambele metode dau același rezultat.

14.6. Pe un arbore cu variație de diametru (racordare) avînd forma din figura 14. d, cu $D = 55$ mm și $d = 45$ mm, urmează să se monteze un rulment. Inelul rulmentului are raza de racordare $r_1 = 2$ mm, ceea ce impune ca arborele să aibă o rază mai mică, de exemplu $r = 1$ mm. Dacă această racordare este periculoasă, se folosește un mel intermediar A, ca în figura 14.6, ceea ce permite să se ia o rază mai mare, după voie, de exemplu $r = 8$ mm. Materialul arborelui este oțel cu $\sigma_r = 52,5$ daN/mm² și $\sigma_{-1} = 22,5$ daN/mm². Solicitarea arborelui se face printr-un ciclu simetric, cu $M_t = 10\,300$ daNcm. Se cere să se determine coeficientul de siguranță în ambele alternative de construcție.

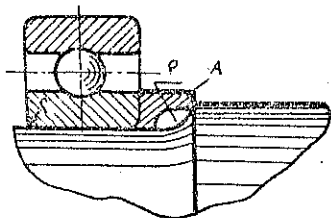


Fig. 14.6

Rezolvare. Efortul unitar nominal în arbore este :

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \frac{M_t}{W} = \frac{10\,300}{\frac{\pi \cdot 4,5^3}{32}} = 1\,150 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_m = 0; \sigma_a = 11,5 \text{ daN/mm}^2$$

Pentru determinarea coeficientului efectiv de concentrare K_σ se procedează astfel :

a) Pentru raza de racordare $r = 1$ mm.

$$\text{În figura 14. d, pentru } \frac{r}{t} = \frac{1}{5} = 0,2; \frac{d}{D} = 0,818 \text{ și } \frac{t}{D} = \frac{5}{55} = \frac{1}{11} = 0,0909, \text{ se găsește } \alpha_k = 2,8.$$

Pentru calculul lui K_σ se aplică formula (14.5)

$$K_\sigma = 1 + \eta_k(\alpha_k - 1).$$

Pentru coeficientul η_k se folosește figura 14. c. Materialul are

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_r} = \frac{28}{52,5} = 0,53.$$

Căutînd pe curba respectivă din figura 14. c, se găsește

$$- \text{la } r = 1 \text{ mm}; \quad \eta_k = 0,6;$$

$$- \text{la } r = 8 \text{ mm}; \quad \eta_k = 0,9.$$

Se obține

$$K_\sigma = 1 + 0,6(2,8 - 1) = 1 + 1,08 = 2,08.$$

Arborele este rectificat și se ia $\gamma = 1$, $\varepsilon = 1$, deoarece K_σ s-a calculat chiar pentru dimensiunile piesei.

Cu relația (14.8) se află coeficientul de siguranță

$$c = \frac{22,5}{2,08 \cdot 11,5} = 0,94.$$

Coeficientul fiind subunitar, piesa se va rupe prin oboseală.

b) Pentru raza $r = 8$ mm.

Repetînd succesiunea de calcule, rezultă :

$$\frac{r}{t} = \frac{8}{5} = 1,6; \quad \frac{t}{D} = 0,0909; \quad \alpha_k = 1,4; \quad K_\sigma = 1,36;$$

$$c = \frac{22,5}{1,36 \cdot 11,5} = 1,43.$$

A doua variantă este corespunzătoare.

14.7. Un arbore solicitat la încovoiere, printr-un ciclu simetric cu $\sigma_{max} = |\sigma_{min}| = \sigma_a = 6$ daN/mm², are un șanț cu forma din figura 14.7 pentru fixarea volantului. Acest șanț de pană poate fi executat în două alterantive :

a) cu $r = 3$ mm și $r/B = 0,05$,

b) cu $r = 7$ mm și $r/B = 0,15$.

Materialul din care este confecționat arborele este un oțel cu $\sigma_{-1} = 28$ daN/mm²; $\sigma_r = 60$ daN/mm² și $\sigma_c = 30$ daN/mm².

Se cere să se afle coeficientul de siguranță.

Rezolvare. Diagrama din figura 14.7 dă numai valorile α_k :

Cazul a) : $\alpha_k = 4,70$,

Cazul b) : $\alpha_k = 2,25$.

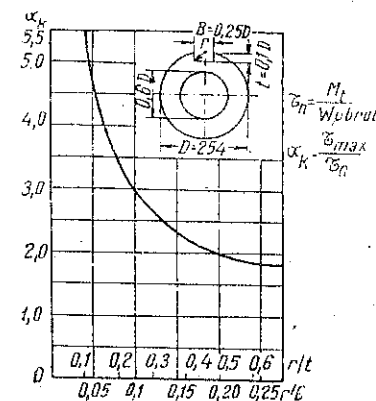


Fig. 14.7

Pentru calculul lui K_σ se aplică formula (14.5):

$$K_\sigma = 1 + \eta_k(\alpha_k - 1).$$

Pentru coeficientul η_k se folosește figura 14. c. Materialul are

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_r} = \frac{30}{60} = 0,5.$$

Căutând pe curba respectivă din figura 14. c, se găsește:

$$- \text{la } r = 3 \text{ mm}, \eta_k = 0,8;$$

$$- \text{la } r = 7 \text{ mm}, \eta_k = 0,92.$$

Valorile lui K_σ sînt:

Cazul a):

$$K_\sigma = 1 + 0,8(4,70 - 1) = 3,96.$$

Cazul b):

$$K_\sigma = 1 + 0,92(2,25 - 1) = 2,15.$$

Pentru calculul coeficientului de siguranță, se folosește formula (14.8), în care — neîfiind precizate alte date — se ia $\varepsilon = \gamma = 1$:

Cazul a):

$$c = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon \gamma} \cdot \sigma_a} = \frac{28}{\frac{3,96}{1 \cdot 1} \cdot 6} = 1,18.$$

Cazul b):

$$c = \frac{28}{2,15 \cdot 6} = 2,17.$$

Se recomandă construcția din cazul b), întrucît la cealaltă, coeficientul de siguranță este prea mic.

14.8. Un arbore de secțiune circulară, cu diametrul $D = 40$ mm, este solicitat la încovoiere printr-un ciclu oscilant, care face ca în fibrele extreme efortul unitar să varieze între $\sigma_{max} = 16$ daN/mm² și $\sigma_{min} = 4$ daN/mm². În secțiunea unde se produc aceste eforturi unitare, arborele are o gaură transversală, cu diametrul $d = 2$ mm, perpendiculară pe axa neutră (Fig. 14.8). Materialul arborelui este un oțel cu $\sigma_r = 95$ daN/mm², $\sigma_c = 72$ daN/mm², $\sigma_{-1} = 43$ daN/mm². Suprafața este strunjită brut. Se cere să se afle coeficientul de siguranță.

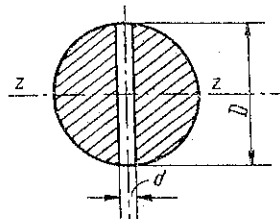


Fig. 14.8

Rezolvare. Se determină în prealabil coeficienții K_σ , ε , γ . Pentru calculul lui K_σ se folosește diagrama reprezentată în figura 14. f.

În cazul problemei de față se cunoaște:

$$\frac{d}{D} = \frac{2}{40} = 0,05; D = 40 \text{ mm},$$

ceea ce corespunde curbei 1 din figura 14. f. Pentru valoarea dată a lui σ_r se găsește $K_\sigma = 2,14$.

După figura 14. j curba 3, la $D = 40$ mm, se află $\varepsilon = 0,65$.

Din figura 14. k, zona 4, se găsește $\gamma = 0,78$.

Ciclul asimetric are

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{16 + 4}{2} = 10 \text{ daN/mm}^2,$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{16 - 4}{2} = 6 \text{ daN/mm}^2.$$

Coeficientul de siguranță se află cu ajutorul formulei (14.10):

$$c = \frac{1}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon \gamma} \cdot \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}} = \frac{1}{\frac{2,14}{0,65 \cdot 0,78} \cdot \frac{6}{43} + \frac{10}{72}} = 1,37.$$

Coeficientul de siguranță față de limita de curgere, calculat cu formula (14.11), este:

$$c_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_m + \sigma_a} = \frac{72}{10 + 6} = 4,5.$$

14.9. Un arbore de oțel, avînd forma din figura 14. e, este solicitat la răsucire printr-un ciclu pulsant, cu $M_{t,max} = 6400$ daNm. Dimensiunile sînt: $D = 56$ mm, $d = 40$ mm, $r = 2$ mm. Materialul are $\sigma_r = 60$ daN/mm², $\tau_r = 40$ daN/mm², $\tau_c = 26$ daN/mm², $\tau_{-1} = 19$ daN/mm². Se cere să se calculeze coeficienții de siguranță față de ruperea prin oboseală și față de limita de curgere.

Rezolvare. Efortul unitar nominal maxim este:

$$\tau_{max} = \frac{M_{t,max}}{W_p} = \frac{6400}{\frac{\pi d^3}{16}} = 500 \text{ daN/cm}^2.$$

Rezultă:

$$\tau_m = \tau_a = \frac{\tau_{max}}{2} = 2,5 \text{ daN/mm}^2$$

Coefficientul de siguranță, față de limita de curgere, este dat de formula (14.11):

$$c_s = \frac{\tau_c}{\tau_{max}} = \frac{26}{5} = 5,2.$$

Arborele are următoarele date geometrice:

$$\frac{D}{d} = \frac{56}{40} = 1,4; \quad \frac{r}{d} = \frac{2}{40} = 0,05.$$

Din figura 14. e, curba întâi de jos, se ia coeficientul

$$K_r = 1,38,$$

care corespunde la oțel cu $\sigma_r = 60 \text{ daN/mm}^2$ și la un raport $\frac{D}{d} = 1,4$.

Diagrama din figura 14. e, este construită pentru arbori cu $d = 12,5 \text{ mm}$, deci vom lua în calcul $\varepsilon \neq 1$. Din figura 14. j, curba 2, pentru $d = 40 \text{ mm}$, se ia $\varepsilon = 0,8$.

Neavînd precizări asupra prelucrării superficiale, se alege:

$$\gamma = 1.$$

Cu formula (14.10) se găsește:

$$c = \frac{1}{\frac{K_r}{\varepsilon \gamma} \cdot \frac{\tau_a}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_r}} = \frac{1}{\frac{1,38}{0,8 \cdot 1} \cdot \frac{2,5}{19} + \frac{2,5}{26}} = 3,1.$$

14.10. Un arc elicoidal are diametrul de înfășurare $D = 60 \text{ mm}$ și diametrul firului $d = 6 \text{ mm}$. El este confecționat dintr-un oțel de arc, cu $\tau_r = 80 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_c = 50 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_{-1} = 30 \text{ daN/mm}^2$. După înfășurare, arcul a fost călit și ecrusat cu alic, ceea ce permite să se obțină un coeficient de calitate $\gamma = 1,55$. Arcul este supus unui ciclu oscilant cu $\tau_{max} = 42 \text{ daN/mm}^2$ și $\tau_{min} = 18,7 \text{ daN/mm}^2$. Dacă se iau $K_\sigma = \varepsilon = 1$, se cere să se calculeze coeficientul de siguranță.

Rezolvare. Se calculează τ_a și τ_m

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{42 - 18,7}{2} = 11,7 \text{ daN/mm}^2,$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{42 + 18,7}{2} = 30,4 \text{ daN/mm}^2.$$

Se aplică formula (14.9):

$$c = \frac{1}{\frac{K_r}{\varepsilon \gamma} \cdot \frac{\tau_a}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_r}} = \frac{1}{\frac{1}{1 \cdot 1,55} \cdot \frac{11,7}{30} + \frac{30,4}{80}} = 1,59.$$

14.11. Un arbore dintr-o cutie de viteze are forma din figura 14.11, pe cele două porțiuni λ_1 , λ_2 fiind montate presat două roți dințate. Dimensiunile sînt: $d_1 = 80 \text{ mm}$, $d_2 = 100 \text{ mm}$, $d_3 = 110 \text{ mm}$. Materialul este oțel 35 CN25 avînd: $\sigma_r = 90 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_c = 30 \text{ daN/mm}^2$; $\tau_{-1} = 23 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_0 = 36 \text{ daN/mm}^2$.

Locurile de calare au fost perfect șlefuite, deci $\gamma = 1$. Arborele transmite un moment de răsucire pulsant, de valoare $M_{t, max} = 40\,000 \text{ daNcm}$. Se cere coeficientul de siguranță al piesei.

Rezolvare. Modulul de rezistență polar al secțiunii este

$$W_p = \frac{\pi(10^4 - 8^4)}{16 \cdot 10} = 116 \text{ cm}^3.$$

Eforturile unitare nominale sînt

$$\tau_{max} = \frac{M_{t, max}}{W_p} = \frac{40\,000}{116} = 345 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_a = \tau_m = 1,72 \text{ daN/mm}^2.$$

Coefficientul de concentrare, inclusiv factorul dimensional, se determină după figurile 14. g; 14. h; 14. i. Din figura 14. g curba 1, pentru $d = 100 \text{ mm}$, se află $\left(\frac{K_\sigma}{\varepsilon}\right)_0 = 3,4$. Nefiind indicații asupra presiunii de fretaj, se ia $\xi'' = 1$. Pentru $\sigma_r = 90 \text{ daN/mm}^2$, după figura 14. h, rezultă $\xi' = 1,6$. Formula (14.6) dă:

$$\frac{K_\sigma}{\varepsilon} = 3,4 \cdot 1,6 = 5,44.$$

Din relația (14.7)

$$\left(\frac{K_r}{\varepsilon}\right) = 1 + 0,6 \left(\frac{K_\sigma}{\varepsilon} - 1\right) = 1 + 0,6 \cdot 4,44 = 3,66.$$

Din datele problemei rezultă $\psi = 0,28$.

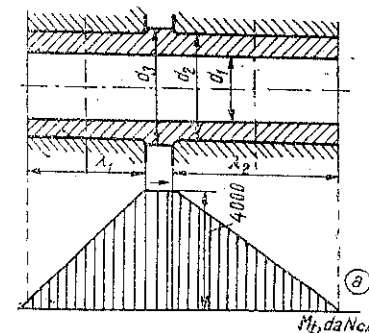


Fig. 14.11

Aplicind formula lui Serensen (14.12), rezultă :

$$c = \frac{\tau_{-1}}{\left(\frac{K_r}{c}\right) \tau_a + \psi \tau_m} = \frac{23}{1,72(3,66 + 0,28)} = 3,40.$$

Cu metoda dată de formula (14.14) se obține :

$$c = \frac{\tau_{-1}}{\sqrt{\left(\frac{K_r}{c}\right)^2 \tau_a^2 + \tau_m^2 \left(\frac{\tau_{-1}}{\tau_c}\right)^2}} = \frac{23}{1,72 \sqrt{3,66^2 + \left(\frac{23}{30}\right)^2}} = 3,57.$$

Cele două rezultate diferă între ele numai cu 4,7%. Fiind vorba de un ciclu pulsant, se calculează și coeficientul de siguranță față de limita de curgere :

$$c_c = \frac{\tau_c}{\tau_{max}} = \frac{30}{3,45} = 8,7.$$

Piesa este corect dimensionată.

14.12. Un arbore de oțel, avind forma din figura 14. e, este solicitat la întindere prin o forță constantă, ceea ce dă $\sigma_m = 5 \text{ daN/mm}^2$ și $\sigma_a = 0$, iar la răsucire printr-un moment oscilant, care produce $\tau_{max} = 5 \text{ daN/mm}^2$ și $\tau_{min} = 2,5 \text{ daN/mm}^2$. Materialul are $\sigma_r = 52,5 \text{ daN/mm}^2$, $\sigma_{-1} = 21,7 \text{ daN/mm}^2$, $\sigma_c = 28 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_{-1} = 11 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_c = 16,4 \text{ daN/mm}^2$. Dimensiunile sînt : $D = 56 \text{ mm}$, $d = 40 \text{ mm}$, $r = 2,5 \text{ mm}$. Suprafața arborelui este șlefuită. Se cere să se afle coeficientul de siguranță al solicitării compuse.

Rezolvare. Se folosește formula (14.10), aplicată odată pentru σ apoi pentru τ și după aceea formula (14.15). Pentru solicitarea de întindere, cu $\sigma_a = 0$, formula (14.10) dă coeficientul :

$$c_\sigma = \frac{\sigma_r}{\sigma_m} = \frac{28}{5} = 5,6.$$

Pentru solicitarea de răsucire, se caută întii valorile coeficienților K_r , c , γ . Se cunoaște

$$\frac{r}{d} = \frac{2,5}{40} = 0,06; \quad \frac{D}{d} = \frac{56}{40} = 1,4.$$

Din figura 14. e curba 2, rezultă :

$$K_r = 1,3.$$

Din figura 14. j curba 2, se ia $\varepsilon = 0,8$.

Din figura 14. k curbele 2, pentru $\sigma_r = 52,5 \text{ daN/mm}^2$, rezultă coeficientul de calitate :

$$\gamma = 0,96.$$

Se aplică formula (14.10) pentru eforturile unitare τ :

$$c_\tau = \frac{1}{\frac{1,3}{0,8 \cdot 0,96} \cdot \frac{1,25}{11} + \frac{3,75}{16,4}} = 2,38$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{5 + 2,5}{2} = 3,75 \text{ daN/mm}^2,$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{5 - 2,5}{2} = 1,25 \text{ daN/mm}^2.$$

Folosind formula (14.19), rezultă :

$$c = \frac{c_\sigma c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} = \frac{5,6 \cdot 2,38}{\sqrt{5,6^2 + 2,38^2}} = 2,19.$$

14.13. Se dă un arbore solicitat la încovoiere și răsucire, pe care sînt împănate două roți dințate, ca în figura 14.13. Materialul este un oțel cu $\sigma_c = 43 \text{ daN/mm}^2$, $\sigma_r = 60 \text{ daN/mm}^2$, $\sigma_{-1} = 25 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_r = 50 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_{-1} = 15 \text{ daN/mm}^2$. Reacțiunile în reazemele A și B au valorile : $V_A = 520 \text{ daN}$, $H_A = 140 \text{ daN}$, $V_B = 410 \text{ daN}$, $H_B = 60 \text{ daN}$. Momentul de răsucire între secțiunile I și II este $M_t = 6000 \text{ daN cm}$. Solicitățile de încovoiere variază după un ciclu simetric, iar cele de răsucire după un ciclu pulsant. Se cere să se afle coeficientul de siguranță.

Rezolvare. Reacțiunile în cele două reazeme sînt :

$$\begin{aligned} R_A &= \sqrt{V_A^2 + H_A^2} = \\ &= \sqrt{520^2 + 140^2} = 540 \text{ daN}, \\ R_B &= \sqrt{V_B^2 + H_B^2} = \\ &= \sqrt{410^2 + 60^2} = 414 \text{ daN}. \end{aligned}$$

Secțiunea periculoasă este I, în care momentul încovoiator este maxim, de valoare :

$$M_{max} = 540 \cdot 13 = 7000 \text{ daN cm}.$$

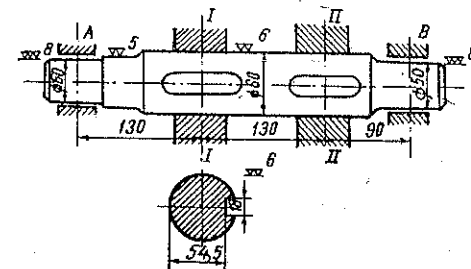


Fig. 14.13

Eforturile unitare nominale în secțiunea periculoasă sînt :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{7\,000}{\frac{\pi \cdot 6^3}{32}} = 324 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\,max}}{W_p} = \frac{6\,000}{\frac{\pi \cdot 6^3}{16}} = 138 \text{ daN/cm}^2.$$

Cele două cicluri au :

$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_a = \sigma_{max} = 3,24 \text{ daN/mm}^2;$$

$$\tau_m = \tau_a = \frac{\tau_{max}}{2} = 0,69 \text{ daN/mm}^2.$$

Se determină coeficienții K_σ , ε , γ .

a) La încovoiere.

Din figura 14. g, curba 1, pentru $d = 60 \text{ mm}$, rezultă

$$\left(\frac{K_\sigma}{\varepsilon} \right)_0 = 3,05,$$

corespunzător la $\sigma_r = 50 \text{ daN/mm}^2$. Pentru oțelul cu $\sigma_r = 60 \text{ daN/mm}^2$, figura 14. h dă $\xi' = 1,13$. Neexistînd indicații asupra presiunii, se ia $\xi'' = 1$. Formula (14.6) dă

$$\frac{K_\sigma}{\varepsilon} = 3,05 \cdot 1,13 \cdot 1 = 3,45.$$

Se consideră suprafața șlefuită, ceea ce dă, după curba 2 din figura 14. k, $\gamma = 0,95$

$$\left(\frac{K_\sigma}{\varepsilon\gamma} \right) = \frac{3,45}{0,95} = 3,63.$$

b) La răsucire, cu formula (14.7) rezultă :

$$\frac{K_\tau}{\varepsilon} = 1 + 0,6(3,45 - 1) = 2,47,$$

respectiv, luînd aceeași valoare pentru γ :

$$\left(\frac{K_\tau}{\varepsilon\gamma} \right) = \frac{2,47}{0,95} = 2,6.$$

Se aplică formulele (14.10) și (14.11)

$$c_\sigma = \frac{1}{3,63 \cdot \frac{3,24}{25}} = 2,12$$

$$c_\tau = \frac{1}{2,6 \cdot \frac{0,69}{15} + \frac{0,69}{50}} = 7,7$$

$$c = \frac{2,12 \cdot 7,7}{\sqrt{2,12^2 + 7,7^2}} = 2,05.$$

14.14. Un arbore de oțel, avînd secțiune melară cu $D = 80 \text{ mm}$ și $d = 40 \text{ mm}$, este supus acțiunii unui moment încovoiător care variază între $M_{i\,max} = 20\,500 \text{ daNcm}$ și $M_{i\,min} = -10\,500 \text{ daNcm}$ și la răsucire unui ciclu avînd $R = -\frac{1}{4}$.

Coeficienții de concentrare, de calitate și dimensiuni, pentru ambele solicitări, au valoarea $\frac{K_\sigma}{\varepsilon\gamma} = \frac{K_\tau}{\varepsilon\gamma} = 3$. Materialul are următoarele caracteristici mecanice :

$$\sigma_c = 43 \text{ daN/mm}^2; \quad \sigma_{-1} = 27 \text{ daN/mm}^2;$$

$$\tau_c = 22 \text{ daN/mm}^2; \quad \tau_{-1} = 15 \text{ daN/mm}^2;$$

$\psi_\sigma = 0,17$; $\psi_\tau = 0$. Se cere să se afle momentul de răsucire maxim care poate fi aplicat, dacă coeficientul de siguranță al arborelui este $c = 2$.

Rezolvare. Se calculează eforturile unitare produse de solicitarea variabilă de încovoiere :

$$W = \frac{\pi D^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot 8^3}{32} \left[1 - \left(\frac{4}{8} \right)^4 \right] = 46,1 \text{ cm}^3;$$

$$W_p = 2W = 92,2 \text{ cm}^3;$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i\,max}}{W} = \frac{20\,500}{46,1} = 445 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_{i\,min}}{W} = -\frac{10\,500}{46,1} = -228 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{4,45 - 2,28}{2} = 1,08 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{4,45 + 2,28}{2} = 3,36 \text{ daN/mm}^2.$$

Se aplică formula (14.12)

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon\gamma} \cdot \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \psi_\sigma \frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}}} = \frac{1}{3 \frac{3,36}{27} + 0,17 \frac{1,08}{27}} = 2,6.$$

Din relația (14.15) se calculează coeficientul de siguranță al solicitării variabile de răsucire:

$$c_\tau = \frac{c \cdot c_\sigma}{\sqrt{c_\sigma^2 - c^2}} = \frac{2 \cdot 2,6}{\sqrt{2,6^2 - 2^2}} = 3,1.$$

Înlocuind în relația (14.12)

$$\tau_a = \tau_{max} \frac{(1 - R)}{2}; \quad \tau_m = \tau_{max} \frac{(1 + R)}{2},$$

se obține

$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot \tau_{-1}}{c_\tau \left[\frac{K_\tau}{\varepsilon\gamma} \cdot (1 - R) + \psi(1 + R) \right]} = \frac{2 \cdot 15}{3,1 \cdot 3 \left(1 + \frac{1}{4} \right)} =$$

$$= 2,58 \text{ daN/mm}^2 = 258 \text{ daN/cm}^2,$$

$$M_{tmax} = \tau_{adm} W_{pof} = \tau_{max} W_{pof} = 258 \cdot 92,2 = 23\,800 \text{ daNcm}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

14.15. Să se găsească rezistența la oboseală, prin ciclu simetric, a unui arbore de forma din figura 14. e dacă se dau $D = 110 \text{ mm}$, $d = 80 \text{ mm}$, $r = 12 \text{ mm}$, iar materialul este oțel cu $\sigma_r = 120 \text{ daN/mm}^2$ și $\tau_{-1} = 30 \text{ daN/mm}^2$.

Indicație. Vezi problema 14.2.

Răspuns: $\tau_{-1p} = 1\,230 \text{ daN/cm}^2$.

14.16. O tijă din oțel, cu $\sigma_r = 70 \text{ daN/mm}^2$, $\sigma_c = 34 \text{ daN/mm}^2$ și $\sigma_{-1} = 22 \text{ daN/mm}^2$, este supusă unei solicitări alternante simetrice de întindere-compresiune, cu efortul unitar nominal $\sigma_n = \sigma_a = 500 \text{ daN/cm}^2$. Să se calculeze coeficientul de siguranță, dacă se dau: $K_\sigma = 2$, $\varepsilon = 0,7$, $\gamma = 0,8$.

Răspuns: $c = 1,23$.

14.17. Un arbore de forma celui reprezentat în figura 14. e este solicitat la răsucire printr-un moment oscilant care variază între $M_{min} = 3\,350 \text{ daNcm}$ și o valoare necunoscută M_{max} . Arborele are dimensiunile $D = 50 \text{ mm}$, $d = 35 \text{ mm}$, $r = 3 \text{ mm}$, iar materialul este un oțel cu $\sigma_r = 52 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_c = 19 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_{-1} = 12 \text{ daN/mm}^2$. Suprafața este strunjită curent. Dacă coeficientul de siguranță este $c = 1,6$, să se afle valoarea lui M_{max} .

Indicație. Pe baza materialului documentar anterior, se determină coeficienții K_τ , ε , γ .

Se calculează τ_{min} cu formulele cunoscute. În formula (14.10), se înlocuiesc τ_a și τ_m în funcție de τ_{max} , τ_{min} unde τ_{min} este cunoscut și se găsește τ_{max} . Rezultă apoi M_{max} .

14.18. La arborele menționat în problema 14.8, se cere să se determine momentul încovoietor maxim pe care îl poate suporta în cazul coeficientului de asimetrie $R = -0,2$ și al coeficientului de siguranță $c = 1,6$.

Indicație. Se exprimă σ_{min} , σ_m , σ_a în funcție de σ_{max} și se aplică formula (14.10), care dă $\sigma_{max} = 9,72 \text{ daN/mm}^2$. Rezultă $M_{max} = 6\,100 \text{ daNcm}$.

14.19. Un arbore de oțel, avind secțiune melară cu $D = 80 \text{ mm}$ și $d = 40 \text{ mm}$, este supus acțiunii unui moment încovoietor care variază între $M_{tmax} = 20\,500 \text{ daNcm}$ și $M_{tmin} = -10\,500 \text{ daNcm}$ și unui moment de răsucire care variază între $M_{rmax} = 24\,000 \text{ daNcm}$ și $M_{rmin} = -6\,000 \text{ daNcm}$. Coeficienții de concentrare, de calitate și dimensiuni,

pentru ambele solicitări, au valoarea $\frac{K_\sigma}{\varepsilon\gamma} = \frac{K_\tau}{\varepsilon\gamma} = 3$. Materialul are următoarele caracteristici mecanice: $\sigma_c = 43 \text{ daN/mm}^2$, $\sigma_{-1} = 27 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_c = 22 \text{ daN/mm}^2$, $\tau_{-1} = 15 \text{ daN/mm}^2$, $\psi_\sigma = 0,17$, $\psi_\tau = 0$. Se cere să se afle coeficientul de siguranță al solicitării compuse, determinat prin metoda Serensen.

Răspuns: $c = 2$.

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Se consideră plăci plane elementele mărginite de două suprafețe plane paralele, a căror grosime este relativ mică în raport cu celelalte două dimensiuni ale plăcii, totuși suficient de mare pentru ca placa să poată prelua momente încovoietoare.

2. Plăcile se presupun solicitate de forțe normale pe planul lor.

3. Plăcile plane se deosebesc după forma conturului lor. Se disting: plăci circulare, plăci dreptunghiulare etc.

4. În capitolul de față se studiază probleme în legătură cu plăcile circulare și inelare încărcate simetric și cu plăcile dreptunghiulare cu margini rezemate sau încastrate.

5. În cazul general ecuația diferențială a plăcilor plane este:

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{D}, \quad (15.1)$$

în care: w este săgeata plăcii, într-un punct oarecare;
 p — sarcina exterioară, iar:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (15.2)$$

în care: h — grosimea plăcii;

E — modulul de elasticitate;

ν — coeficientul de contracție transversală al lui Poisson.

În coordonate carteziene, ecuația diferențială (15.1) se scrie:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}. \quad (15.3)$$

În coordonate polare, ecuația diferențială (15.1) se scrie:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{p}{D}. \quad (15.4)$$

6. Plăci circulare și inelare încărcate axial simetric. În cazul încărcării axiale simetrice, p și w nu depind de unghiul φ și ecuația (15.4) devine:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p}{D}, \quad (15.5)$$

ecuație diferențială de tip Euler cu soluția generală:

$$w = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + \bar{w}, \quad (15.6)$$

unde $\bar{w}$ este o soluție particulară a ecuației neomogene. O asemenea soluție particulară se poate obține în cazul general cu formulele:

$$\bar{M} = - \int_0^r \frac{1}{r} \left[\int_0^r p r dr \right] dr \text{ și apoi } \bar{w} = - \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left[\int_0^r \bar{M} r dr \right] dr. \quad (15.7)$$

În cazul particular al unei sarcini uniform distribuite ($p = \text{const.}$), soluția particulară $\bar{w}$ are valoarea:

$$\bar{w} = \frac{p r^4}{64 D}. \quad (15.8)$$

7. Rotirile, momentele încovoietoare și forțele tăietoare au expresiile de mai jos (în funcție de săgeata w dată de 15.6):

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= - \frac{\partial w}{\partial r}, \\ M_r &= - D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right], \\ M_t &= - D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right], \\ T_r &= - D \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right], \\ T_t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

8. Cele patru constante arbitrare C_1 , C_2 , C_3 și C_4 care apar în ecuația (15.6) se pot determina prin condiții la limită în felul următor:

— la o periferie simplu rezemată: $w = 0$ și $M_r = 0$;

— la o periferie încastrată: $w = 0$ și $\varphi = 0$;

— la o periferie liberă: $M_r = 0$, $T_r = 0$.

În mijlocul unei plăci, w și $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ sînt cantități finite.

9. Pentru cazurile curente expresiile w , φ , M_r și M_t se iau din tabelul 15.a.

10. Eforturile unitare σ_r și σ_t variază liniar pe grosimea plăcii:

$$\sigma_r = \frac{12 M_r}{h^3} z; \quad \sigma_t = \frac{12 M_t}{h^3} z, \quad (15.10)$$

fiind maxime în fibrele extreme ale plăcii la $z = h/2$,

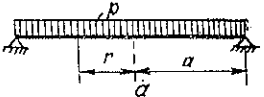
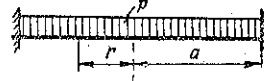
$$\sigma_{r \max} = \frac{6 M_r}{h^2}; \quad \sigma_{t \max} = \frac{6 M_t}{h^2}. \quad (15.11)$$

11. Plăcile dreptunghiulare. Ecuația (15.3) se poate rezolva prin diferite metode, proprii ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al patrulea. În problemele din capitolul de față se folosesc: metoda seriilor Fourier duble, metoda seriilor Fourier duble.

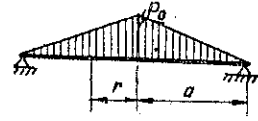
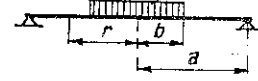
Tabelul 15.a

Expresiile săgeții w , rotirii φ , momentului încovoietor radial M_r , momentului încovoietor tangențial M_t la plăcile circulare și încărcate simetric

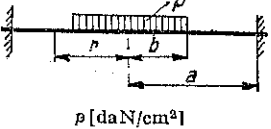
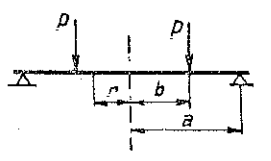
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad \rho = \frac{r}{a}$$

N. c.	Felul de încărcare	Expresiile w , φ , M_r și M_t
1	 P [daN]	$w = \frac{Pa^2}{64\pi D} (1 - \rho^2) \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} - \rho^2 \right)$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D} \rho \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} - \rho^2 \right)$ $M_r = \frac{P}{16\pi} (3 + \nu)(1 - \rho^2)$ $M_t = \frac{P}{16\pi} [3 + \nu - (1 + 3\nu)\rho^2], \text{ unde } P = \pi a^2 p_\infty$
2	 P [daN]	$w = \frac{Pa^2}{64\pi D} (1 - \rho^2)^2$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D} \rho (1 - \rho^2)$ $M_r = \frac{P}{16\pi} [1 + \nu - (3 + \nu)\rho^2]$ $M_t = \frac{P}{16\pi} [1 + \nu - (1 + 3\nu)\rho^2], \text{ unde } P = \pi a^2 p$
3	 p_0 [daN/cm ²]	$w = \frac{Pa^2}{4800\pi D} \left[\frac{3(183 + 43\nu)}{1 + \nu} - \frac{10(71 + 29\nu)}{1 + \nu} \rho^2 + 225\rho^4 - 64\rho^6 \right]$ $\varphi = \frac{Pa}{240\pi D} \rho \left[\frac{71 + 29\nu}{1 + \nu} - 45\rho^2 + 16\rho^3 \right]$ $M_r = \frac{P}{240\pi} [71 + 29\nu + 45(3 + \nu)\rho^2 + 16(4 + \nu)\rho^3]$ $M_t = \frac{P}{240\pi} [71 + 29\nu - 45(1 + 3\nu)\rho^2 + 16(1 + 4\nu)\rho^3]$ $\text{unde } P = \frac{1}{3} \pi a^2 p_0$

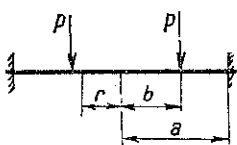
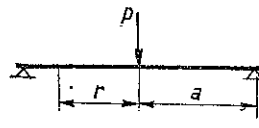
Tabelul 15.a (continuare)

N. c.	Felul de încărcare	Expresiile w , φ , M_r și M_t
4	 p_0 [daN/cm ²]	$w = \frac{Pa^2}{4800\pi D} [129 - 290\rho^2 + 225\rho^4 - 64\rho^6]$ $\varphi = \frac{Pa}{240\pi D} \rho [29 - 45\rho^2 + 16\rho^3]$ $M_r = \frac{P}{240\pi} [29(1 + \nu) - 45(3 + \nu)\rho^2 + 16(4 + \nu)\rho^3]$ $M_t = \frac{P}{240\pi} [29(1 + \nu) - 45(1 + 3\nu)\rho^2 + 16(1 + 4\nu)\rho^3]$ $\text{unde } P = \frac{1}{3} \pi a^2 p_0$
5	 p [daN/cm ²]	$r \leq b$ (regiunea încărcată) $w = \frac{Pa^2}{64\pi D} \frac{1}{1 + \nu} \left\{ 4(3 + \nu) - (7 + 3\nu)\beta^2 + 4(1 + \nu)\beta^2 \ln \beta - 2[4 - (1 - \nu)\beta^2 - 4(1 + \nu)\ln \beta] \rho^2 + \frac{1 + \nu}{\beta^2} \rho^4 \right\}$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D} \cdot \frac{1}{1 + \nu} \rho \left[4 - (1 - \nu)\beta^2 - 4(1 + \nu)\ln \beta - \frac{1 + \nu}{\beta^2} \rho^2 \right]$ $M_r = \frac{P}{16\pi} \left[4 - (1 - \nu)\beta^2 - 4(1 + \nu)\ln \beta - \frac{3 + \nu}{\beta^2} \rho^2 \right]$ $M_t = \frac{P}{16\pi} \left[4 - (1 - \nu)\beta^2 - 4(1 + \nu)\ln \beta - \frac{1 + 3\nu}{\beta^2} \rho^2 \right]$ $b \leq r \leq a$ (regiunea neîncărcată) $w = \frac{Pa^2}{32\pi D} \cdot \frac{i}{1 + \nu} \left\{ [2(3 + \nu) - (1 - \nu)\beta^2](1 - \rho^2) + 2(1 + \nu)\beta^2 \ln \rho + 4(1 + \nu)\rho^2 \ln \rho \right\}$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D} \cdot \frac{i}{1 + \nu} \left\{ [4 - (1 - \nu)\beta^2] \rho - (1 + \nu)\beta^2 \frac{1}{\rho} - 4(1 + \nu) \rho \ln \rho \right\}$ $M_r = \frac{P}{16\pi} \left[(1 - \nu)\beta^2 \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - 4(1 + \nu) \ln \rho \right]$ $M_t = \frac{P}{16\pi} \left\{ (1 - \nu) \left[4 - \beta^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) \right] - 4(1 + \nu) \ln \rho \right\}$ $\text{unde } P = \pi b^2 p; \quad \beta = \frac{b}{a}$

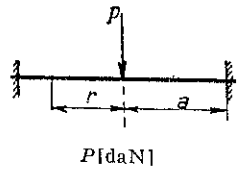
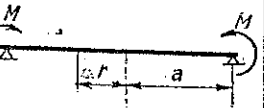
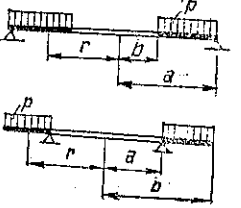
Tabelul 15.a (continuare)

N. c.	Felul de încărcare	Expresiile w , φ , M_r și M_t
6		$r < b \text{ (regiunea încărcată)}$ $w = \frac{Pa^2}{64\pi D} \left[4 - 3\beta^2 + 4\beta^2 \ln \beta - 2(\beta^2 - 4 \ln \beta) \rho^2 + \frac{1}{\beta^2} \rho^4 \right]$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D} \rho \left[\beta^2 - 4 \ln \beta - \frac{1}{\beta^2} \rho^2 \right]$ $M_r = \frac{P}{16\pi} \left[(1 + \nu)(\beta^2 - 4 \ln \beta) - \frac{3 + \nu}{\beta^2} \rho^2 \right]$ $M_t = \frac{P}{16\pi} \left[(1 + \nu)(\beta^2 - 4 \ln \beta) - \frac{1 + 3\nu}{\beta^2} \rho^2 \right]$ $b < r < a \text{ (regiunea neîncărcată)}$ $w = \frac{Pa^2}{32\pi D} \left[(2 - \beta^2)(1 - \rho^2) + 2(\beta^2 + 2\rho^2) \ln \rho \right]$ $\varphi = \frac{Pa}{16\pi D} \rho \left[\beta^2 \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) - 4 \ln \rho \right]$ $M_r = \frac{P}{16\pi} \left[-4 + (1 - \nu)\beta^2 \frac{1}{\rho^2} + (1 + \nu)(\beta^2 - 4 \ln \rho) \right]$ $M_t = \frac{P}{16\pi} \left[-4\nu - (1 - \nu)\beta^2 \frac{1}{\rho^2} + (1 + \nu)(\beta^2 - 4 \ln \rho) \right]$ unde $P = \pi b^2 p$; $\beta = \frac{b}{a}$
7		$\rho < \beta \text{ (regiunea interioară)}$ $w = \frac{Pa^3}{8D} \cdot \frac{\beta}{1 + \nu} \{ (3 + \nu)(1 - \beta^2) + 2(1 + \nu)\beta^2 \ln \beta - [(1 - \nu)(1 - \beta^2) - 2(1 + \nu) \ln \beta] \rho^2 \}$ $\varphi = \frac{Pa^2}{4D} \frac{\beta}{1 + \nu} \rho \{ (1 + \nu)(1 - \beta^2) - 2(1 + \nu) \ln \beta \}$ $M_r = M_t = \frac{Pa}{4} \cdot \beta \{ (1 - \nu)(1 - \beta^2) - 2(1 + \nu) \ln \beta \}$ $\beta < \rho < 1 \text{ (regiunea exterioră)}$ $w = \frac{Pa^3}{8D} \frac{\beta}{1 + \nu} \{ [3 + \nu - (1 - \nu)\beta^2](1 - \rho^2) + 2(1 + \nu)(\beta^2 + \rho^2) \ln \rho \}$ $\varphi = \frac{Pa^2}{4D} \frac{\beta}{1 + \nu} \rho \left[2 - (1 - \nu)\beta^2 - (1 + \nu)\beta^2 \frac{1}{\rho^2} - 2(1 + \nu) \ln \rho \right]$ $M_r = \frac{Pa}{4} \cdot \beta \cdot \left\{ (1 - \nu)\beta^2 \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - 2(1 + \nu) \ln \rho \right\}$ $M_t = \frac{Pa}{4} \beta \left\{ (1 - \nu) \left[2 - \beta^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) \right] - 2(1 + \nu) \ln \rho \right\}, \text{ unde } \beta = \frac{b}{a}$

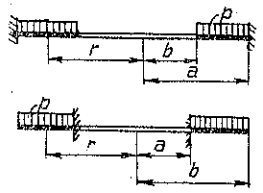
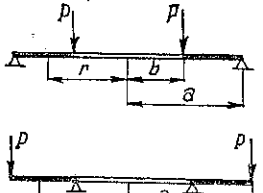
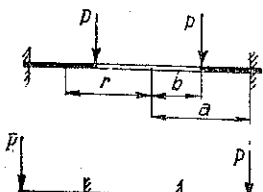
Tabelul 15.a (continuare)

N. c.	Felul de încărcare	Expresiile w , φ , M_r și M_t
8		$\rho < \beta \text{ (regiunea interioară)}$ $w = \frac{Pa^3}{8D} \beta [1 - \beta^2 + 2\beta^2 \ln \beta + (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta) \rho^2]$ $\varphi = -\frac{Pa^2}{4D} \beta \rho (1 - \beta^2 + 2 \ln \beta)$ $M_r = M_t = -\frac{Pa}{4} \beta (1 + \nu)(1 - \beta^2 + 2 \ln \beta)$ $\beta < \rho < 1 \text{ (regiunea exterioră)}$ $w = \frac{Pa^3}{8D} \beta \{ (1 + \beta^2)(1 - \rho^2) + 2(\beta^2 + \rho^2) \ln \rho \}$ $\varphi = \frac{Pa^2}{4D} \beta \rho \left[\beta^2 \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) - 2 \ln \rho \right]$ $M_r = -\frac{Pa}{4} \beta \left[2 - (1 - \nu)\beta^2 \frac{1}{\rho^2} - (1 + \nu)(\beta^2 - 2 \ln \rho) \right]$ $M_t = -\frac{Pa}{4} \beta \left[2\nu + (1 - \nu)\beta^2 \frac{1}{\rho^2} - (1 + \nu)(\beta^2 - 2 \ln \rho) \right]$ unde $\beta = \frac{b}{a}$
9		$w = \frac{Pa^2}{16\pi D} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} (1 - \rho^2) + 2\rho^2 \ln \rho \right]$ $\varphi = \frac{Pa}{4\pi D} \rho \left[\frac{1}{1 + \nu} - \ln \rho \right]$ $M_r = -\frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \rho$ $M_t = \frac{P}{4\pi} [1 - \nu - (1 + \nu) \ln \rho]$ În mijlocul plăcii $M_r = M_t = \frac{P}{4\pi} [1 - (1 + \nu) \ln \beta]$ unde $\beta = 0,95$

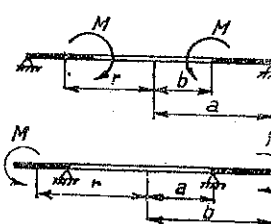
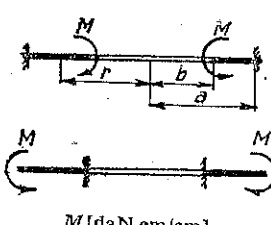
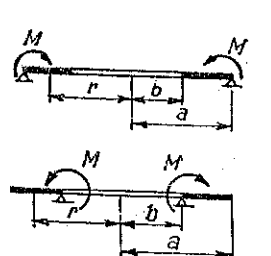
Tabelul 15. a (continuare)

N. c.	Felul de încărcare	Expresiile w , φ , M_r și M_t
10	 $P[\text{daN}]$	$w = \frac{Pa^2}{6\pi D} (1 - \rho^2 + 2\rho^2 \ln \rho)$ $\varphi = -\frac{Pa}{4\pi D} \rho \ln \rho$ $M_r = -\frac{P}{4\pi} [1 + (1 + \nu) \ln \rho]$ $M_t = -\frac{P}{4\pi} [\nu + (1 + \nu) \ln \rho]$ În mijlocul plăcii $M_r = M_t = -\frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \beta$ unde $\beta \approx 0,05$
11	 $M[\text{daN cm/cm}]$	$w = \frac{Ma^2}{2D(1 + \nu)} (1 - \rho^2)$ $\varphi = \frac{Ma}{D(1 + \nu)} \rho$ $M_r = M_t = M$
12	 $p[\text{daN/cm}^2]$	$w = \frac{Pa^4}{64D} \left\{ \frac{2}{1 + \nu} [(3 + \nu)(1 - 2\beta^2) + k](1 - \rho^2) - (1 - \rho^4) - \frac{4}{1 - \nu} k \cdot \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho \right\}$ $\varphi = \frac{pa^3}{16D} \left[\frac{1}{1 + \nu} (3 + \nu - 4\beta^2 + k)\rho - \rho^3 + \frac{k}{1 - \nu} \frac{1}{\rho} + 4\beta^2 \rho \ln \rho \right]$ $M_r = \frac{pa^2}{16} \left[(3 + \nu)(1 - \rho^2) + k \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + 4(1 + \nu)\beta^2 \ln \rho \right]$ $M_t = \frac{pa^2}{16} \left[2(1 - \nu)(1 - 2\beta^2) + (1 + 3\nu)(1 - \rho^2) + k \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + 4(1 + \nu)\beta^2 \ln \rho \right]$ unde $k = \beta^2 \left[3 + \nu + 4(1 + \nu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta \right]$; $\beta = \frac{b}{a}$

Tabelul 15. a (continuare)

N. c.	Felul de încărcare	Expresiile w , φ , M_r și M_t
13	 $p[\text{daN/cm}^2]$	$w = \frac{pa^4}{64D} \left[1 - i + 2(1 - k - 2\beta^2)(1 - \rho^2) + \rho^4 - 4k \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho \right]$ $\varphi = \frac{pa^3}{16D} \left[(1 - k)\rho - \rho^3 + k \frac{i}{\rho} + 4\beta^2 \rho \ln \rho \right]$ $M_r = \frac{pa^2}{16} \left[(1 + \nu)(1 - k) + 4\beta^2 - (3 + k)\rho^2 - (1 - \nu)k \frac{i}{\rho^2} + 4(1 + \nu)\beta^2 \ln \rho \right]$ $M_t = \frac{pa^2}{16} \left[(1 + \nu)(1 - k) + 4\nu\beta^2 - (1 + 3\nu)\rho^2 + (1 - \nu)k \frac{1}{\rho^2} + 4(1 + \nu)\beta^2 \ln \rho \right]$ unde $\beta = \frac{b}{a}$ și $k = \beta^2 \frac{(1 - \nu)\beta^2 + (1 + \nu)(1 + 4\beta^2 \ln \beta)}{1 - \nu + (1 + \nu)\beta^2}$
14	 $P[\text{daN/cm}]$	$w = \frac{Pa^3}{8D} \beta \left[\frac{13 + \nu - 2k}{1 + \nu} (1 - \rho^2) + 4 \frac{k}{1 - \nu} \ln \rho + 2\rho^2 \ln \rho \right]$ $\varphi = \frac{Pa^2}{2D} \beta \left[\frac{1 - k}{1 + \nu} \rho - \frac{k}{1 - \nu} \frac{i}{\rho} - \rho \ln \rho \right]$ $M_r = \frac{Pa}{2} \beta \left[k \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - (1 + \nu) \ln \rho \right]$ $M_t = \frac{Pa}{2} \beta \left[1 - \nu - k \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) - (1 + \nu) \ln \rho \right]$ unde $\beta = \frac{b}{a}$, $k = (1 + \nu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta$
15	 $P[\text{daN/cm}]$	$w = \frac{Pa^3}{8D} \beta \left[(1 + 2k)(1 - \rho^2) + 4k \ln \rho + 2\rho^2 \ln \rho \right]$ $\varphi = \frac{Pa^2}{2D} \beta \left[k \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) - \rho \ln \rho \right]$ $M_r = \frac{Pa}{2} \beta \left[-1 + (1 + \nu)k + (1 - \nu)k \frac{i}{\rho^2} - (1 + \nu) \ln \rho \right]$ $M_t = \frac{Pa}{2} \beta \left[-\nu + (1 + \nu)k - (1 - \nu)k \frac{i}{\rho^2} - (1 + \nu) \ln \rho \right]$ unde $\beta = \frac{b}{a}$ și $k = \beta^2 \frac{1 + (1 + \nu) \ln \beta}{1 - \nu + (1 + \nu)\beta^2}$

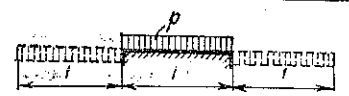
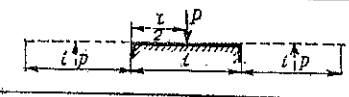
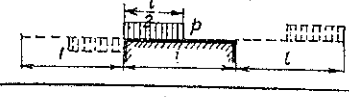
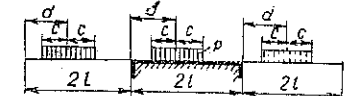
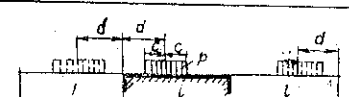
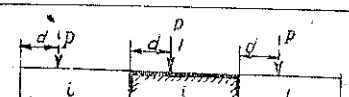
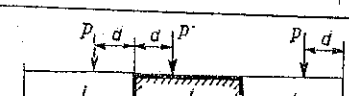
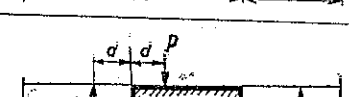
Tabelul 15. a (continuare)

N. c.	Felul de încărcare	Expresiile w , φ , M_r și M_t
16	 M [daN cm/cm]	$w = \frac{Ma^2}{2D} \frac{k}{1+\nu} \left(1 - \rho^2 - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \ln \rho \right)$ $\varphi = \frac{Ma}{D} \frac{k}{1+\nu} \left(\rho + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{\rho} \right)$ $M_r = M \cdot k \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right)$ $M_t = M \cdot k \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right)$ unde $\beta = \frac{b}{a}$ și $k = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$
17	 M [daN cm/cm]	$w = \frac{Ma^2}{2D} k (-1 + \rho^2 - 2 \ln \rho)$ $\varphi = \frac{Ma}{D} k \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right)$ $M_r = -M \cdot k \cdot \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{1}{\rho^2} \right]$ $M_t = -Mk \left(1 + \nu - (1 - \nu) \frac{1}{\rho^2} \right)$ unde $\beta = \frac{b}{a}$ și $k = \frac{\beta^2}{1 - \nu + (1 + \nu)\beta^2}$
18	 M [daN cm/cm]	$w = \frac{Ma^2}{2D} \frac{k}{1+\nu} \left(1 - \rho^2 - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \beta^2 \ln \rho \right)$ $\varphi = \frac{Ma}{D} \frac{k}{1+\nu} \left(\rho + \frac{1+\nu}{1-\nu} \beta^2 \frac{1}{\rho} \right)$ $M_r = M \beta^2 k \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\rho^2} \right)$ $M_t = M \beta^2 k \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\rho^2} \right)$ unde $\beta = \frac{b}{a}$ și $k = \frac{1}{1 - \beta^2}$

Coeficienții seriilor Fourier pentru diferite cazuri de încărcare

Tabelul 15. b

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Felul de încărcare	Coeficienții seriei Fourier
	$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{4p}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$ ($n = 1, 3, 5, \dots$)
	$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2P}{l} \sin \frac{n\pi}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
	$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
	$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{4p}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi d}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
	$a_0 = \frac{2pc}{l}, a_n = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{l} \cdot \cos \frac{n\pi d}{l}$ $b_n = \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{l} \cdot \sin \frac{n\pi d}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
	$a_0 = \frac{4pc}{l}, a_n = \frac{4p}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi d}{l}, b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
	$a_0 = \frac{P}{2l}, a_n = \frac{P}{2l} \cos \frac{n\pi d}{l}, b_n = \frac{P}{2l} \sin \frac{n\pi d}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
	$a_0 = \frac{P}{l}, a_n = \frac{2P}{l} \cos \frac{n\pi d}{l}, b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
	$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2P}{l} \sin \frac{n\pi d}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Odată determinată săgeata w , rotirile φ_x și φ_y , momentele încovoietoare M_x și M_y , momentul de torsiune M_{xy} și forțele tăietoare T_x și T_y , se obțin cu formulele:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}; \\ M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ T_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ T_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15.12)$$

12. *Metoda seriilor Fourier simple.* Se presupune că sarcina p poate fi dezvoltată în serie Fourier pe una din direcții, de exemplu pe axa Ox :

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos \alpha_n x, \quad (15.13)$$

unde:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l} \quad (15.14)$$

Se încearcă o soluție w de forma:

$$w = \frac{Y_0}{2} + \sum Y_n \cdot \cos \alpha_n x. \quad (15.15)$$

Punind condiția ca w , sub forma (15.15) (în care Y_0 și Y_n sînt funcții numai de y), să satisfacă ecuația diferențială (15.3), se obțin pentru Y_0 și Y_n expresii de forma:

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= \frac{a_0 y^4}{24} + C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4. \\ Y_n &= A_n e^{-\alpha_n y} + B_n e^{\alpha_n y} + C_n \alpha_n y e^{-\alpha_n y} + D_n \alpha_n y e^{\alpha_n y} + \frac{a_n}{\alpha_n^4 D} \end{aligned} \right\} \quad (15.16)$$

Uneori este util ca Y_n să fie pus sub forma:

$$Y_n = A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y + C_n \alpha_n y \cdot \operatorname{ch} \alpha_n y + D_n \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + \frac{a_n}{\alpha_n^4 D} \quad (15.17)$$

Constantele $A_n, B_n, C_n, D_n, C_1, C_2, C_3, C_4$ se determină prin condiții la limită, și anume:

- pentru o margine simplu rezemată $w = 0, M_x = 0$ (sau $M_y = 0$);
- pentru o margine încastrată $w = 0, \varphi_x = 0$ (sau $\varphi_y = 0$);
- pentru o margine liberă $M_x = 0$ (sau $M_y = 0$) și $T_x = 0$ (sau $T_y = 0$).

În tabelul 15.b sînt date dezvoltările în serie *Fourier* pentru cîteva cazuri curențe de încărcare.

B. PROBLEME REZOLVATE

15.1. Să se stabilească expresia săgeții w în cazul unei plăci circulare cu o încărcare conică avînd în centru intensitatea p_0 (Fig. 15.1), placa fiind încastrată pe contur.

Rezolvare. Expresia săgeții w este [formula (15.6)]:

$$w = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + \bar{w}.$$

În cazul de față:

$$p = p_0 \frac{a - r}{a} = p_0 - \frac{p_0}{a} r.$$

Pentru aflarea soluției particulare $\bar{w}$, se aplică formulele (15.7). În cazul problemei de față:

$$\int_0^r p r \, dr = \int_0^r \left(p_0 - \frac{p_0}{a} r \right) r \, dr = \frac{p_0 r^2}{2} - \frac{p_0 r^3}{3a},$$

$$\bar{M} = - \int_0^r \frac{1}{r} \left[\int_0^r p r \, dr \right] dr = - \int_0^r \left(\frac{p_0 r}{2} - \frac{p_0 r^2}{3a} \right) dr = - \frac{p_0 r^2}{4} + \frac{p_0 r^3}{9a},$$

$$\int_0^r \bar{M} r \, dr = - \int_0^r \left(\frac{p_0 r^2}{4} - \frac{p_0 r^3}{9a} \right) r \, dr = - \frac{p_0 r^4}{16} + \frac{p_0 r^5}{45a},$$

și, în sfîrșit

$$\bar{w} = - \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left[\int_0^r \bar{M} r \, dr \right] dr =$$

$$= \frac{1}{D} \int_0^r \left(\frac{p_0 r^3}{16} - \frac{p_0 r^4}{45a} \right) dr = \frac{1}{D} \left(\frac{p_0 r^4}{64} - \frac{p_0 r^5}{225a} \right).$$

Deci

$$w = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + \frac{p_0 r^4}{64D} - \frac{p_0 r^5}{225aD}.$$

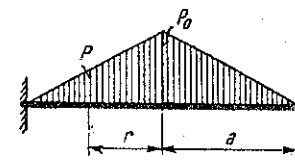


Fig. 15.1

Cum pentru $r = 0$, w și $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ trebuie să fie cantități finite, rezultă $C_3 = 0$ și $C_4 = 0$. Deci :

$$w = C_1 + C_2 r^2 + \frac{p_0 r^4}{64D} - \frac{p_0 r^5}{225aD}.$$

Marginea plăcii fiind perfect încadrată, rezultă că pentru $r = a$, $w = 0$ și $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$ sau :

$$C_1 + C_2 a^2 + \frac{p_0 a^4}{64D} - \frac{p_0 a^5}{225D} = 0,$$

$$2C_2 a + \frac{p_0 a^3}{16D} - \frac{p_0 a^3}{45D} = 0.$$

Rezultă :

$$C_2 = -\frac{29p_0 a^2}{1440D}, \quad C_1 = \frac{129p_0 a^4}{14400D}.$$

Atunci :

$$w = \frac{129p_0 a^4}{14400D} - \frac{29p_0 a^2}{1440D} r^2 + \frac{p_0}{64D} r^4 - \frac{p_0 r^5}{225aD},$$

sau notind :

$$\frac{1}{3} p_0 \pi a^2 = P, \quad \frac{r}{a} = \rho,$$

$$w = \frac{Pa^2}{4800\pi D} [129 - 290\rho^2 + 225\rho^4 - 64\rho^5],$$

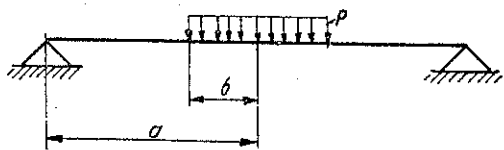


Fig. 15.2

(vezi tabelul 15. a, cazul 4).

15.2. Să se stabilească expresiile momentelor încovoietoare M_r și M_t pentru o placă circulară încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe un cerc de rază $r = b$ (Fig. 15.2), sprijinită pe contur.

Rezolvare. Se notează cu w_1 săgeata plăcii pentru zona neîncărcată și cu w_2 săgeata pentru zona încărcată. Aplicând relația (15.6) pentru cele două zone și introducând $\bar{w}_1 = 0$ și $\bar{w}_2 = \frac{pr}{64D}$ se obține:

$$w_1 = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r \quad (1)$$

$$w_2 = C'_1 + C'_2 r^2 + C'_3 \ln r + C'_4 r^2 \ln r + \frac{pr^4}{64D} \quad (2)$$

Constantele din relațiile (1) și (2) se determină ținând seama de următoarele condiții :

$$r = 0; \quad \bar{w}_2 \neq 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} \neq 0 \quad \text{deci} \quad C'_3 = C'_4 = 0.$$

$$r = a, \quad w_1 = 0 \quad \text{și} \quad (M_r)_1 = 0$$

$$r = b, \quad w_1 = w_2, \quad w'_1 = w'_2, \quad (M_r)_1 = (M_r)_2, \quad (T_r)_1 = (T_r)_2.$$

Scriind aceste condiții se obține

$$C_1 + C_2 a^2 + C_3 \ln a + C_4 a \ln a = 0$$

$$2C_2(1 + \nu) - \frac{C_3}{a^2}(1 - \nu) + [3 + \nu + 2(1 + \nu) \ln a] C_4 = 0$$

$$C_1 + C_2 b^2 + C_3 \ln b + C_4 b^2 \ln b = C'_1 + C'_2 b^2 + \frac{pb^4}{64D};$$

$$2C_2 b + \frac{C_3}{b} + C_4(b + 2b \ln b) = 2C'_2 b + \frac{pb^3}{16D},$$

$$2C_2(1 + \nu) - \frac{C_3}{b^2}(1 - \nu) + [3 + \nu + 2(1 + \nu) \ln b] C_4 =$$

$$= 2C'_2(1 + \nu) + (3 + \nu) \frac{pb^2}{16D}, \quad \frac{pb}{2} = \frac{4D}{b} C_4.$$

Rezolvind sistemul de ecuații se obține:

$$C_1 = \left[\frac{(6 + 2\nu)a^2 - (1 - \nu)b^2}{4(1 + \nu)} - \frac{b^2}{2} \ln a \right] \frac{pb^2}{8D}$$

$$C_2 = - \left[\ln a + \frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} - \frac{1 - \nu}{4(1 + \nu)} \frac{b^2}{a^2} \right] \frac{pb^2}{8D}$$

$$C_3 = \frac{pb^4}{16D}, \quad C_4 = \frac{pb^2}{8D}$$

$$C'_1 = \left[\frac{4(3 + \nu)a^2 - (7 + 3\nu)b^2}{1 + \nu} - 4b^2 \ln \frac{a}{b} \right] \frac{pb^2}{64D}$$

$$C'_2 = - \left[\ln \frac{a}{b} + \frac{4a^2 - (1 - \nu)b^2}{4(1 + \nu)a^2} \right] \frac{pb^2}{8D}.$$

Înlocuind aceste constante în relațiile (1) și (2) se obțin expresiile săgeții pe cele două porțiuni:

$$w_1 = \frac{pa^2b^2}{32D} \frac{1}{1+\nu} \left\{ \left[2(3+\nu) - (1-\nu) \frac{b^2}{a^2} \right] \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + 2(1+\nu) \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} + 4(1+\nu) \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} \right\} \quad (3)$$

$$w_2 = \frac{pa^2b^2}{64D} \cdot \frac{1}{1+\nu} \left\{ 4(3+\nu) - (7+3\nu) \frac{b^2}{a^2} + 4(1+\nu) \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{b^2}{a^2} - 2 \left[4 - (1-\nu) \frac{b^2}{a^2} - 4(1+\nu) \ln \frac{b}{a} \right] \frac{r^2}{a^2} + \frac{1+\nu}{\left(\frac{b^2}{a^2} \right)} \cdot \frac{r^4}{a^4} \right\} \quad (4)$$

(v. tab. 15. a — poziția 5).

Înlocuind pe w_1 și w_2 în relațiile (15.9) se obțin:

$$(M_r)_1 = \frac{pb^2}{16} \left[(1-\nu) \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) - 4(1+\nu) \ln \frac{r}{a} \right] \quad (5)$$

$$(M_t)_1 = \frac{pb^2}{16} \left\{ (1-\nu) \left[4 - \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \right] - 4(1+\nu) \ln \frac{r}{a} \right\} \quad (6)$$

$$(M_r)_2 = \frac{pb^2}{16} \left[C - \frac{3+\nu}{\left(\frac{b}{a} \right)^2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (7)$$

$$(M_t)_2 = \frac{pb^2}{16} \left[C - \frac{1+3\nu}{\left(\frac{b}{a} \right)^2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (8)$$

unde s-a notat:

$$C = 4 - (1-\nu) \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 4(1+\nu) \ln \frac{b}{a}$$

15.3. Să se determine săgeata w a unei plăci încărcate cu o sarcină conică parțială având la centru intensitatea maximă p_0 (Fig. 15.3, a).

Aplicație. $a = 2$ m; $b = 1$ m; $p_0 = 900$ daN/m²; $\nu = 0$.

Rezolvare. Acest caz de încărcare nu se găsește direct în tabelul 15. a. Totuși, el poate fi rezolvat ușor cu ajutorul tabelului, combinând cazurile 3, 11, 15 și 17 în modul următor:

Se calculează porțiunea centrală, încărcată conic ca o placă circulară (Fig. 15.3, b). Pentru a restabili continuitatea în lungul cercului de rezemare, cerc care are raza b , se introduce atât la periferia plăcii rezemate,

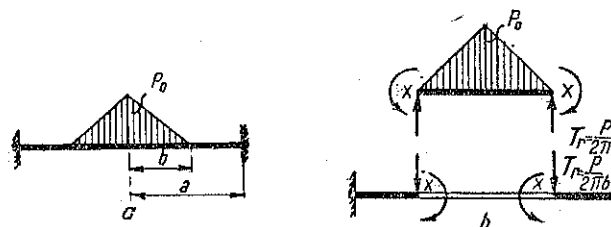


Fig. 15.3

cît și la marginea interioară a plăcii inelare un moment încovoiator X . Valoarea acestui moment va fi determinată scriind condiția de continuitate. Dacă se notează cu φ_1 unghiul de rotire pe reazem pentru placa centrală încărcată conic, cu φ_3 unghiul de rotire la marginea interioară a plăcii inelare, atunci cînd este solicitată de încărcarea T_r , pe această margine, cu φ_2 unghiul de rotire al primei plăci cînd este acționată de momentul X și cu φ_4 unghiul de rotire al celei de-a doua plăci, cînd este acționată de momentul X (Fig. 15.3, b), condiția de continuitate se scrie:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_4.$$

Folosind tabelul 15. a, cazurile 3, 11, 15 și 17 se găsește, notînd cu P sarcina totală pe placă:

$$\varphi_1 = \frac{Pb}{240\pi D} \left[\frac{71+29\nu}{1+\nu} - 45 + 16 \right] = \frac{7Pb}{40\pi D(1+\nu)}, \quad (\text{cazul 3, } \rho = 1)$$

$$\varphi_2 = -\frac{Xb}{D(1+\nu)}, \quad (\text{cazul 11, } M = -X, \rho = 1)$$

$$\varphi_3 = \frac{Pa^2}{4\pi b D} \beta \left[K \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) - \beta \ln \beta \right], \quad (\text{cazul 15, } \rho = \beta, P \text{ înlocuit prin } \frac{P}{2\pi b})$$

$$\varphi_4 = \frac{Xa}{D} K_1 \left(\frac{1}{\beta} - \beta \right), \quad (\text{cazul 17, } M = X, \rho = \beta).$$

Relația de continuitate se scrie :

$$\frac{7Pb}{40\pi D(1+\nu)} - \frac{Xb}{D(1+\nu)} = \frac{Pa^2}{4\pi bD} \beta \left[K \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) - \beta \ln \beta \right] + \frac{Xa}{D} K_1 \left(\frac{1}{\beta} - \beta \right).$$

Din această ecuație se deduce necunoscuta X . Pentru cazul aplicației :

$$P = \frac{\pi b^2 p_0}{23} = \frac{3,14 \cdot 1^2 \cdot 900}{3} = 942 \text{ daN}, \quad \beta = 0,5, \quad \nu = 0,$$

$$K = \beta^2 \frac{1 + (1+\nu) \ln \beta}{1 - \nu + (1+\nu) \beta^2} = 0,5^2 \frac{1 + \ln 0,5}{1 + 0,5^2} = 0,0614,$$

$$K_1 = \frac{\beta^2}{1 - \nu + (1+\nu) \beta^2} = \frac{0,5^2}{1 + 0,5^2} = 0,20,$$

$$\frac{7Pb}{40\pi(1+\nu)} = \frac{7 \cdot 942 \cdot 1}{40 \cdot 3,14} = 52,5; \quad \frac{b}{1+\nu} = 1,$$

$$\frac{Pa^2}{4\pi b} \beta \left[K \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) - \beta \ln \beta \right] = \frac{942 \cdot 2^2}{4 \cdot 3,14 \cdot 1} 0,5 \left[0,0614 \left(0,5 - \frac{1}{0,5} \right) - 0,5 \ln 0,5 \right] = 38,17,$$

$$aK_1 \left(\frac{1}{\beta} - \beta \right) = 2 \cdot 0,20 \left(\frac{1}{0,5} - 0,5 \right) = 0,600.$$

Ecuația de continuitate se scrie :

$$52,5 - X = 38,17 + 0,6X \text{ sau } 1,6X = 13,65, \text{ de unde } X = 8,96 \text{ daNm/m}.$$

Odată determinat X , săgețile se obțin suprapunind efectele cazurilor 3, 11, 15, 17. Rezultă :

a) Regiunea interioară (încărcată) notind $\rho = \frac{r}{b}$ și w_0 săgeata plăcii la distanța $r = b$ de centru :

$$w = w_1 - Xw_2 = \frac{Pb^2}{4800\pi D} \left[\frac{3(183 + 43\nu)}{1+\nu} - \frac{10(71 + 29\nu)}{1+\nu} \rho^2 + 225\rho^4 - 64\rho^5 \right] - \frac{Xb^2}{2D(1+\nu)} (1 - \rho^2) + w_0.$$

b) Regiunea exterioară (neîncărcată) corespunzătoare la $\beta \leq \rho \leq 1$, unde $\rho = \frac{r}{a}$:

$$w = w_3 + Xw_4 = \frac{Pa^3}{16\pi bD} \beta [(1 + 2K)(1 - \rho^2) + 4K \ln \rho + 2\rho^2 \ln \rho] + \frac{Xa^2}{2D} K_1 (-1 + \rho^2 - 2 \ln \rho).$$

Cu valori numerice rezultă :

Regiunea interioară $\left(\rho = \frac{r}{b} \right)$:

$$w = \frac{1}{D} (20,04 - 40,1\rho^2 + 14,1\rho^4 - 4\rho^5) + w_0.$$

Regiunea exterioară $\left(\rho = \frac{r}{a} \right)$:

$$w = \frac{1}{D} [81,8(1 - \rho^2) - 33,9 \ln \rho + 150 \rho^2 \ln \rho].$$

Săgeata w_0 din prima formulă se determină făcând $\rho = 0,5$ în formula doua :

$$w_0 = \frac{1}{D} [81,8(1 - 0,5^2) - 33,9 \ln 0,5 + 150 \cdot 0,5^2 \ln 0,5] = \frac{58,7}{D}.$$

15.4. Să se stabilească expresia săgeții w , în cazul unei plăci melare (Fig. 15.4) de grosimea constantă, simplu rezemată la periferie și liberă la marginea interioară. Placa este încărcată cu un moment radial M , uniform distribuit pe conturul exterior.

Rezolvare. Expresia săgeții (formula 15.6) :

$$w = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + \bar{w}.$$

Din formula (15.8) rezultă : $\bar{w} = 0$.

Din relațiile (15.9) se calculează :

$$T_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] = -4DC_4 \frac{1}{r},$$

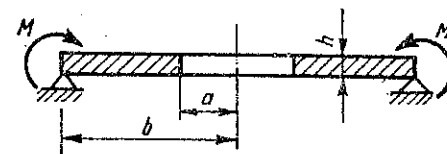


Fig. 15.4

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = -D \left[2C_2(1+\nu) - \frac{C_3}{r^2}(1-\nu) + 2C_4(1+\nu) \ln r + C_4(3+\nu) \right].$$

Pentru : $r = b$; $T_r = 0$; $M_r = M$ și $w = 0$.

Deci :

$$C_4 = 0; -D \left[2C_2(1+\nu) - \frac{C_3}{b^2}(1-\nu) \right] = M.$$

$$C_1 + C_2 b^2 + C_3 \ln b = 0.$$

Pentru : $r = a$, $M_r = 0$

$$-D \left[2C_2(1+\nu) - \frac{C_3}{a^2}(1-\nu) \right] = 0.$$

Se notează $b = a\beta$ și se rezolvă sistemul :

$$C_3 = -\frac{M}{D} \cdot \frac{a^2}{1-\nu} \cdot \frac{\beta^2}{\beta^2-1}, \quad C_2 = -\frac{M}{2D} \cdot \frac{\beta^2}{(\beta^2-1)(1+\nu)}.$$

$$C_1 = \frac{M}{D} \frac{b^2}{\beta^2-1} \left[\frac{\beta^2}{2(1+\nu)} + \frac{\ln b}{1-\nu} \right].$$

Deci :

$$w = \frac{Ma^2}{2D} \frac{1}{(\beta^2-1)(1+\nu)} \left[1 - \frac{r^2}{b^2} - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \beta^2 \ln \frac{r}{b} \right].$$

15.5. Să se determine eforturile unitare la marginea interioară a capacului de vizitare rezemat ca în figura 15.5, *a*, ținând seama că la montaj, în bulonul de legătură, ia naștere o forță de prestringere $P = 3300$ daN.

Rezolvare. Capacul este o placă inelară rezemată pe conturul exterior și strinsă pe conturul interior de bulonul considerat rigid, fixat de o traversă elastică.

La montaj, datorită prestringerii, placa și traversa se deformează ca în figura 15.5, *b* (linie plină), iar la aplicarea presiunii p , acestea iau forma desenată cu linie întreruptă. Schema de calcul este prezentată în figura 15.5, *c*.

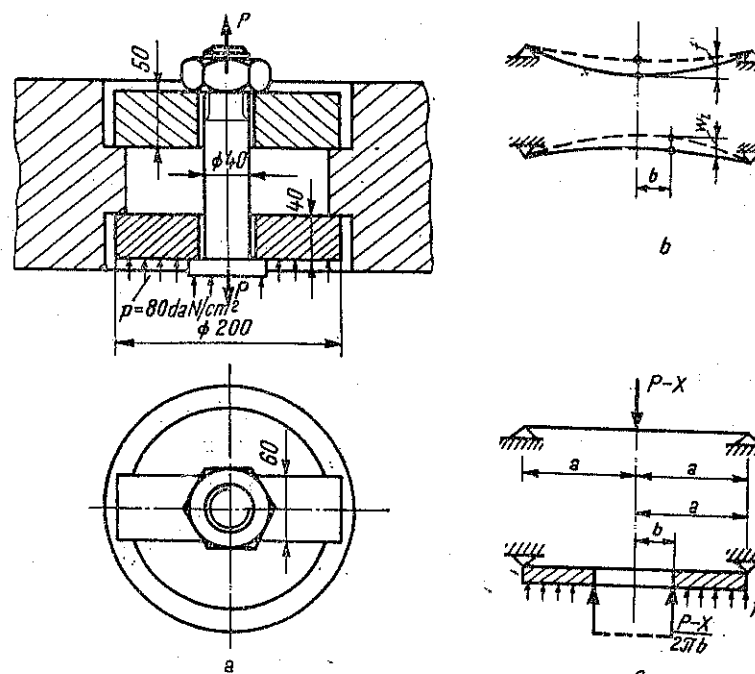


Fig. 15.5

Valoarea forței de prestringere X se determină egalind deformația suplimentară a conturului interior al plăcii, w_i , cu săgeata mijlocului traversei f , după aplicarea forței uniforme distribuite :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 4^3}{12(1-0,3^2)} = 12,3 \cdot 10^6 \text{ daNem},$$

$$I = \frac{6 \cdot 5^3}{12} = 62,5 \text{ cm}^4,$$

$$f = \frac{X(2a)^3}{48EI} = \frac{X \cdot 20^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 62,5} = 1,27 \cdot 10^{-6} X.$$

Expresia săgeții plăcii se determină prin metoda suprapunerii efectelor (tabelul 15. *a*, pozițiile 12 și 14) :

$$r = b; \rho = \beta = \frac{b}{a} = \frac{2}{10} = 0,2; \ln \rho = \ln \beta = -1,61;$$

— săgeata w'_i produsă de sarcina uniform distribuită :

$$\begin{aligned} k'_i &= \beta^2 \left[3 + \nu + 4(1 + \nu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta \right] = \\ &= 0,2^2 \left[3 + 0,3 - 4(1 + 0,3) \frac{0,2^2}{1 - 0,2^2} 1,61 \right] = 0,118, \\ w'_i &= \frac{p a^4}{64 D} \left\{ \frac{2}{1 + \nu} [(3 + \nu)(1 - 2\beta^2) + k'_i] (1 - \rho^2) - (1 - \rho^4) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{1 - \nu} k'_i \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho \right\} = \\ &= \frac{80 \cdot 10^4}{64 \cdot 12,3 \cdot 10^6} \left\{ \frac{2}{1 + 0,3} [(3 + 0,3)(1 - 2 \cdot 0,2^2) + 0,118] (1 - 0,2^2) - \right. \\ &\quad \left. - (1 - 0,2^4) + \frac{4}{1 - 0,3} 0,118 \cdot 1,61 + 8 \cdot 0,2^2 \cdot 0,2^2 \cdot 1,61 \right\} = 0,00484 \text{ cm}; \end{aligned}$$

— săgeata produsă de sarcina $\frac{X}{2\pi b}$ distribuită liniar, w'_i :

$$\begin{aligned} k''_i &= (1 + \nu) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta = -(1 + 0,3) \frac{0,2^2}{1 - 0,2^2} 1,61 = -0,087, \\ w'_i &= \frac{X}{8 D} \beta^2 \left[\frac{3 + \nu - 2k''_i}{1 + \nu} (1 - \rho^2) + 4 \frac{k''_i}{1 - \nu} \ln \rho + 2\rho^2 \ln \rho \right] = \\ &= \frac{10^3 X}{-2\pi \cdot 2 \cdot 8 \cdot 12,3 \cdot 10^6} 0,2 \left[\frac{3 + 0,3 + 2 \cdot 0,087}{1 + 0,3} (1 - 0,2^2) - 4 \frac{0,087}{1 - 0,3} 1,61 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot 0,2^2 \cdot 1,61 \right] = 0,264 \cdot 10^{-6} X, \end{aligned}$$

$$f = w'_i - w''_i; 1,27 \cdot 10^{-6} X = 0,00484 - 0,264 \cdot 10^{-6} X$$

$$X = 3160 \text{ daN}.$$

Momentul tangențial pe conturul interior se calculează însumând momentul M'_u produs de acțiunea presiunii p și M''_u datorit sarcinii $P - X$ transmisă de bulon :

$$\begin{aligned} M_u &= M'_u + M''_u; \\ M'_u &= \frac{p a^2}{16} \left[2(1 - \nu)(1 - 2\beta^2) + (1 + 3\nu)(1 - \rho^2) + k'_i \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + 4(1 + \right. \\ &\quad \left. + \nu)\beta^2 \ln \rho \right] = \frac{80 \cdot 10^3}{16} \left[2(1 - 0,3)(1 - 2 \cdot 0,2^2) + (1 + 3 \cdot 0,3)(1 - 0,2^2) + \right. \\ &\quad \left. + 0,118 \left(1 + \frac{1}{0,2^2} \right) - 4(1 + 0,3) \cdot 0,2^2 \cdot 1,61 \right] = 2920 \text{ daNcm/cm}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M''_u &= \frac{P - X}{2\pi b} \beta \left[1 - \nu - k''_i \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) - (1 + \nu) \ln \rho \right] = \\ &= \frac{3300 - 3160}{2\pi \cdot 2} 0,2 \left[1 - 0,3 + 0,087 \left(\frac{1}{0,2^2} + 1 \right) + (1 + 0,3) 1,61 \right] = 33,6 \frac{\text{daNcm}}{\text{cm}}, \\ M_u &= 2920 + 33,6 = 2953,6 \text{ daNcm/cm}, \\ \sigma_{r1} &= \frac{6 M_u}{h^2} = \frac{2953,6 \cdot 6}{4^2} = 1100 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned}$$

15.6. Se consideră o placă dreptunghiulară de dimensiuni a și $2b$ încărcată cu o sarcină uniform distribuită p . Laturile de lungime a sînt încastrate, iar cele de lungime $2b$ sînt simplu rezemate. Se cere să se determine săgeata w într-un punct oarecare al plăcii și să se deducă apoi expresiile momentelor încovoietoare M_x și M_y la mijlocul plăcii (Fig. 15.6, a).

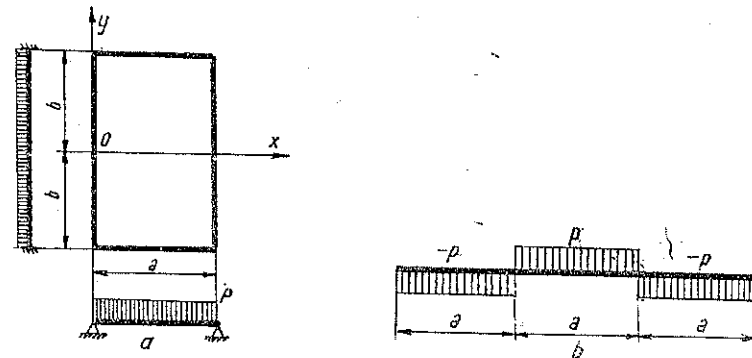


Fig. 15.6

Rezolvare. Se aplică metoda seriilor Fourier simple utilizând axele din figura 15.6, a. Se dezvoltă sarcina $p(x)$ în serie Fourier pe direcția Ox , folosind cazul 1 din tabelul 15.b, dat fiind că o grindă simplu rezemată poate fi asimilată cu o grindă de lungime infinită, acționată alternativ de sarcini uniforme distribuite, pozitive și negative (Fig. 15.6, b). Se obține :

$$p(x) = \frac{4p}{n} \sum \frac{1}{n} \sin \alpha_n x,$$

unde :

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 3, 5 \dots).$$

Atunci w va fi de forma :

$$w = \sum Y_n \sin \alpha_n x.$$

Folosind pentru Y_n forma (15.17) rezultă :

$$Y_n = A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y + C_n \alpha_n y \cdot \operatorname{ch} \alpha_n y + D_n \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + \frac{\alpha_n}{\alpha_n^4 D}$$

Din cauza simetriei, față de Ox , termenii antisimetrici $B_n \operatorname{sh} \alpha_n y$ și $C_n \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y$ sînt nuli, deci $B_n = C_n = 0$. Rezultă :

$$Y_n = A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + D_n \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + \frac{\alpha_n}{\alpha_n^4 D}$$

Pentru $y = b$, rezultă $Y_n = 0$ și $Y'_n = 0$; deci :

$$A_n \operatorname{ch} \alpha_n b + D_n \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n b + \frac{\alpha_n}{\alpha_n^4 D} = 0,$$

$$\alpha_n A_n \operatorname{sh} \alpha_n b + D_n \alpha_n [\operatorname{sh} \alpha_n b + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n b] = 0.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații se găsește :

$$A_n = - \frac{\operatorname{sh} \alpha_n b + \alpha_n b \cdot \operatorname{ch} \alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b + \alpha_n b} \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha_n^4 D},$$

$$D_n = \frac{\operatorname{sh} \alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b + \alpha_n b} \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha_n^4 D}.$$

Pentru cazul încărcării uniform distribuite, $a_n = \frac{4p}{n\pi}$ și obținem :

$$A_n = - \frac{1 + \alpha_n b \cdot \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \cdot \frac{4pb^4}{(\alpha_n b)^4 D \pi},$$

$$D_n = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \cdot \frac{4pb^4}{(\alpha_n b)^4 \pi D}.$$

Rezultă :

$$w = \frac{4pb^4}{\pi D} \sum \frac{1}{(\alpha_n b)^4} \left[- \frac{1 + \alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \operatorname{ch} \alpha_n y + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + 1 \right] \sin \alpha_n x.$$

Se calculează apoi :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{4pb^2}{\pi D} \sum \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[- \frac{1 + \alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \operatorname{ch} \alpha_n y + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y + 1 \right] \sin \alpha_n x,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{4pb^2}{\pi D} \sum \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[\frac{1 - \alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \operatorname{ch} \alpha_n y + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \cdot \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y \right] \sin \alpha_n x.$$

În mijlocul plăcii $\left(x = \frac{a}{2}, y = 0 \right)$ se obține :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{4pb^2}{\pi D} \sum \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[\frac{1 + \alpha_n b \cdot \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} - 1 \right] \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{4pb^2}{\pi D} \sum \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[\frac{1 - \alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \right] \sin \frac{n\pi}{2}; (n = 1, 3, 5 \dots).$$

Momentele încovoietoare la mijlocul plăcii vor fi :

$$M_x = - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{4pb^2}{\pi} \sum \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[1 - \frac{1 - \alpha_n b \cdot \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} + \right. \\ \left. + \nu \frac{\alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b - 1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \right] \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$M_y = - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{4pb^2}{\pi} \sum \frac{1}{(\alpha_n b)^2} \left[\frac{\alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b - 1}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} + \right. \\ \left. + \nu \left(1 - \frac{1 - \alpha_n b \operatorname{cth} \alpha_n b}{1 + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{sh} \alpha_n b}} \right) \right] \sin \frac{n\pi}{2}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

15.7. Un castel de apă de formă circulară (Fig. 15.7), avînd diametrul $d_1 = 4,00$ m, se reazemă pe teren prin intermediul unei plăci circulare, avînd grosimea $d = 30$ cm, și diametrul $D = 5,00$ m. Știînd că pereții castelului transmit o sarcină inelară de 200 kN/m și că presiunea pe teren este uniformă, se cere să se determine eforturile în placa de fundație. (Se va lua $\nu = 0,17$ și, pentru simplificare, secțiunea de beton se va considera ca secțiune omogenă).

Răspuns:

$$M_{r1} = M_{t1} = -76,3 \frac{\text{kNm}}{\text{m}},$$

$$M_{r2} = 25,0 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}, \quad M_{t2} = -28 \frac{\text{kNm}}{\text{m}},$$

$$M_{r3} = 0, \quad M_{t3} = -23 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}.$$

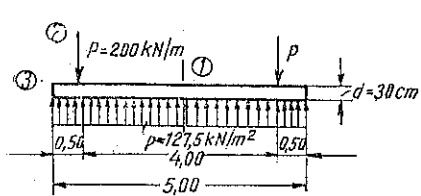


Fig. 15.7

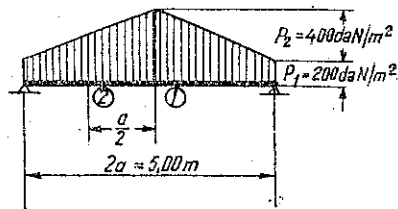


Fig. 15.8

15.8. O placă circulară, simplu rezemată, cu diametrul de $5,00$ m, este încărcată ca în figura 15.8. Se cere să se afle momentele încovoietoare în centrul plăcii și la distanța $a/2$ de centrul plăcii. Se va neglija coeficientul de contracție transversală. Sarcinile indicate pe desen sînt $p_1 = 200$ daN/m²; $p_2 = 400$ daN/m².

Răspuns:

$$M_{r1} = M_{t1} = 0,059 P_1 + 0,094 P_2 = 478 \text{ daNm/m}$$

$$M_{r2} = 0,0447 P_1 + 0,0598 P_2 = 332 \text{ daNm/m}$$

$$M_{t2} = 0,0548 P_1 + 0,0820 P_2 = 430 \text{ daNm/m}.$$

15.9. Fundația unui turn este alcătuită dintr-o placă circulară, avînd dimensiunile din figura 15.9. Turnul se reazemă pe o suprafață inelară pe care exercită o presiune de 9 kN/m². Reacțiunile terenului se

vor considera uniform distribuite. Se cere să se afle momentul încovoietor în mijlocul plăcii. Se va lua $\nu = 0,17$.

Răspuns: $M_r = M_t = -5,0$ kN/m.

15.10. Un rezervor de apă este executat în jurul unui coș de fabrică. El se sprijină pe o placă inelară, de beton armat de 30 cm grosime, avînd $D_{int} = 3,00$ m și $D_{ext} = 6,00$ m. Apa în rezervor are o înălțime de maximum $2,20$ m. Pereții exteriori ai rezervorului transmit plăcii o

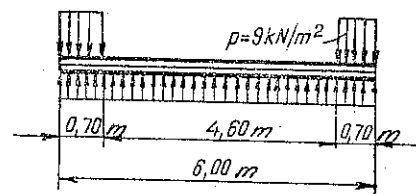


Fig. 15.9

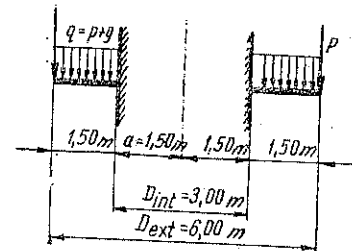


Fig. 15.10

sarcină $P = 10$ kN/m. (Fig. 15.10). Se cere să se determine eforturile unitare pe latura încastrată. Pentru determinarea eforturilor de compresie din beton se va considera că secțiunea este aproximativ omogenă. Se dau: — greutatea specifică a betonului armat: $\gamma = 25$ kN/m³; — coeficientul de contracție transversală: $\nu = \frac{1}{6}$.

Răspuns: $\sigma_b = 48$ daN/cm².

15.11. Să se determine momentele încovoietoare într-o placă inelară încastrată la periferie și liberă la marginea interioară. Placa are o balustradă înaltă de $1,00$ m și este încărcată cu oameni (500 daN/m²) care împing balustrada cu o forță orizontală $H = 100$ daN/m (Fig. 15.11). Știînd că grosimea plăcii este de 10 cm, greutatea specifică a betonului armat este

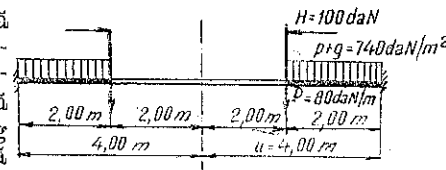


Fig. 15.11

$\gamma = 2400$ daN/m³, greutatea balustradei de 80 daN/m, iar coeficientul de contracție transversală al betonului armat este $\nu = \frac{1}{6}$, se cere să se determine momentele încovoietoare în secțiunea de încastrare.

Răspuns: $M_r = -1040$ daNm/m.

$M_t = -175$ daNm/m.

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Învelișurile de rotație au profilul determinat de o curbă meridiană, iar secțiunile transversale pe axa longitudinală sînt cercuri.

2. În cadrul acestui capitol se tratează numai probleme rezolvabile prin *teoria de membrană sau teoria fără momente a învelișurilor*. Relațiile stabilite prin această teorie se pot aplica numai în următoarele ipoteze:

— grosimea învelișului este mică în raport cu razele principale de curbură; ca urmare, eforturile unitare sînt constante pe grosime;
— nu există salturi bruște de grosime a peretelui și nici consolidări rigide;

— solicitarea nu se face prin forțe sau cupluri concentrate.

3. Izolînd un element din înveliș prin patru secțiuni ca în figura 16. a, ecuațiile de echilibru duc la următoarele relații:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h}; \quad (16.1)$$

$$\sigma_1 = \pm \frac{P}{2\pi r h \sin \varphi},^* \quad (16.2)$$

în care: σ_1 este efortul unitar meridian;

σ_2 — efortul unitar circumferențial;

ρ_1 — prima rază de curbură principală (meridiană);

ρ_2 — a doua rază de curbură principală;

r — raza paralelului;

h — grosimea peretelui învelișului;

p — componenta pe normala la suprafață a solicitării exterioare (constantă pe un paralel și pozitivă cînd este dirijată către convexitatea suprafeței);

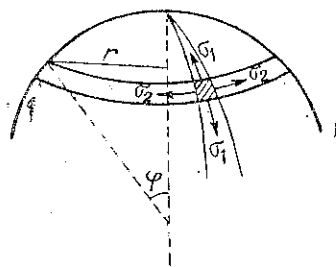


Fig. 16. a

* Semnul plus se ia pentru întindere, iar minus pentru compresiune.

P este proiecția pe axa de rotație a sarcinii totale ce acționează asupra porțiunii de înveliș situată deasupra sau dedesubtul paralelului considerat.

4. Dacă pe o suprafață acționează o presiune constantă, atunci, independent de forma suprafeței, proiecția pe o direcție dată a rezultantei forțelor de presiune este egală cu produsul dintre presiunea p și aria proiecției suprafeței pe un plan normal pe direcția dată.

5. Dacă pe o suprafață oarecare acționează presiunea unui lichid, care are un nivel liber, atunci componenta verticală a rezultantei forțelor de presiune este egală cu greutatea lichidului din volumul situat deasupra suprafeței.

B. PROBLEME REZOLVATE

16.1. Să se determine eforturile unitare în pereții unui rezervor cilindric, cu diametrul $d = 2,50$ m, știind că grosimea tablei este $h = 10$ mm, iar presiunea interioară este $p = 15$ daN/cm² (Fig. 16.1).

Rezolvare. Se aplică formula (16.1) în care:

$$\rho_1 = \infty,$$

$$\rho_2 = \frac{2,50}{2} = 1,25 \text{ m} = 125 \text{ cm} = r;$$

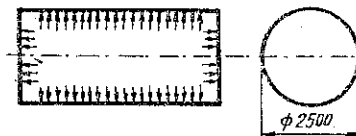


Fig. 16.1

$$P = pA = 15 \cdot \frac{3,14 \cdot 250^2}{4} = 736 \, 311 \text{ daN};$$

$$h = 1 \text{ cm}; \quad p = 15 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Rezultă:

$$\sigma_2 = \frac{p \rho_2}{h} = \frac{15 \cdot 125}{1} = 1 \, 875 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2},$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi r h \sin \varphi} = \frac{736 \, 311}{2 \cdot 3,14 \cdot 125 \cdot 1} = 937,5 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

16.2. Un rezervor sferic de rază R este umplut cu un gaz la presiunea p . Se cere să se găsească eforturile unitare în pereții rezervorului.

Rezolvare. Se aplică formula (16.1) în care $\rho_1 = \rho_2 = R$. Din motive de simetrie $\sigma_1 = \sigma_2$.

Atunci:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{p \rho}{2h} = \frac{pR}{2h}.$$

Observație. Dacă nu se ținea seama de simetrie, se putea aplica formula (16.2) în care $P = p\pi r^2$, r fiind raza paralelului.

Rezultă:

$$\sigma_1 = \frac{p\pi r^2}{2\pi r h \sin \varphi} = \frac{pr}{2h \sin \varphi} = \frac{pR}{2h}, \quad \text{căci } \frac{r}{\sin \varphi} = R.$$

16.3. Un rezervor cilindric de diametru $2R$, cu fundul de formă emisferică (Fig. 16.3) este solicitat de presiunea interioară $p = \text{const.}$ Grosimea tablei părții cilindrice este h_1 iar a părților emisferice, h_2 .

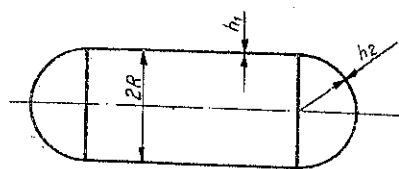


Fig. 16.3

Să se stabilească relația între h_1 și h_2 astfel încât în zona de îmbinare să nu existe discontinuitate a deformațiilor specifice circumferențiale.

Rezolvare. Condiția cerută de problemă este ca deformația specifică circumferențială să fie aceeași, adică

$$\varepsilon_{2\text{ cil}} = \varepsilon_{2\text{ sferă}}. \quad (1)$$

Se notează cu σ_1 și σ_2 eforturile unitare în partea cilindrică și cu σ'_1 și σ'_2 eforturile unitare în partea sferică. Deformațiile specifice ε_2 sunt:

$$\varepsilon_{2\text{ cil}} = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1); \quad \varepsilon_{2\text{ sferă}} = \frac{1}{E} (\sigma'_2 - \nu \sigma'_1) \quad (2)$$

$$\sigma_1 = \frac{pR}{2h_1}; \quad \sigma_2 = \frac{pR}{h_1}; \quad \sigma'_1 = \sigma'_2 = \frac{pR}{2h_2}. \quad (3)$$

Înlocuind expresiile (2) și (3) în (1) se obține:

$$\sigma_2 - \nu \sigma_1 = \sigma'_2 - \nu \sigma'_1; \quad \frac{pR}{h_1} - \nu \frac{pR}{2h_1} = \frac{pR}{2h_2} (1 - \nu),$$

$$\frac{1}{2h_1} (2 - \nu) = \frac{1}{2h_2} (1 - \nu); \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{2 - \nu}{1 - \nu}.$$

16.4. Să se găsească ecuația generatoarei suprafeței unui vas de rotație cu pereți subțiri de grosime constantă h , solicitat de presiunea interioară $p = \text{const.}$, astfel ca efortul unitar $\sigma_1 = \text{const.}$

Rezolvare. Conform relației (16.2) și figurii 16.4:

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi x h \sin \theta},$$

unde:

$$\sin \theta = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad \text{și} \quad P = p\pi x^2.$$

Rezultă:

$$\sigma_1 = \frac{p\pi x^2}{2\pi x h y'^2} \sqrt{1 + y'^2},$$

$$\frac{x \sqrt{1 + y'^2}}{y'} = \sigma_1 \frac{2h}{p} = A = \text{ct.},$$

$$y'^2 = \frac{x^2}{A^2 - x^2}; \quad y' = \pm \frac{x}{\sqrt{A^2 - x^2}} dy = \pm \frac{x dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

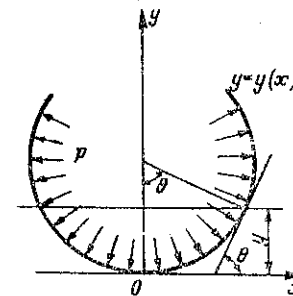


Fig. 16.4

Integrând ecuația diferențială și punind condiția ca la $x = 0$; $y = 0$, se obține ecuația curbei sub forma:

$$x^2 + y^2 - 2Ay = 0,$$

care este ecuația unui cerc cu centrul pe axa Oy , de rază A și trecând prin origine.

Rezultă că vasul corespunzător este o sferă de rază $R = A$ pentru care $\sigma_1 = \frac{pR}{2h} = \text{const.}$, rezultat cunoscut de la problema precedentă.

16.5. Să se determine eforturile unitare într-o placă subțire emisferică, de rază R și grosime h așezată ca în figura 16.5, a, sub acțiunea greutateii proprii. Să se construiască diagramele eforturilor unitare σ_1 și σ_2 . Placa este rezemată pe suprafața de jos.

Rezolvare. Notînd cu g greutatea unității de suprafață a plăcii, rezultă:

$$p_n = -g \cos \varphi.$$

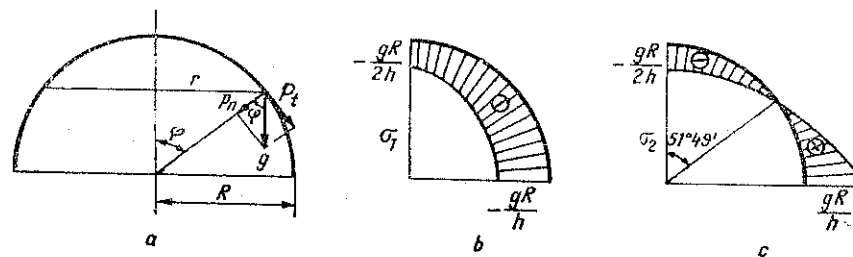


Fig. 16.5

Greutatea calotei mărginite de paralelul corespunzător unghiului φ este:

$$P = g2\pi R(R - R \cos \varphi) = 2\pi R^2 g(1 - \cos \varphi).$$

Deoarece $\rho_1 = \rho_2 = R$; $r = R \sin \varphi$;

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi r h \sin \varphi} = -\frac{2\pi R^2 g (1 - \cos \varphi)}{2\pi R h \sin^2 \varphi} = -\frac{g R}{h(1 + \cos \varphi)}.$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{R} = -\frac{g \cos \varphi}{h}.$$

Rezultă .

$$\sigma_2 = -\frac{g R \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1}{h(1 + \cos \varphi)}.$$

În figura 16.5, b și 16.5, c sînt date diagramele de variație a eforturilor unitare σ_1 și σ_2 .

16.6. Să se calculeze eforturile unitare într-un punct situat la distanța z sub baza mică a unui rezervor în formă de trunchi de con ca în figura 16.6, sub acțiunea greutateii proprii.

Aplicație numerică: $r = 2$ m; $R = 8$ m; $h = 8$ cm; $H = 8$ m; $\gamma = 2400$ da N/m³.

Rezolvare. Din figura 16.6 rezultă :

$$x = z \operatorname{tg} \alpha + r;$$

$$\rho_1 = \infty; \rho_2 = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{z \operatorname{tg} \alpha + r}{\cos \alpha}.$$

Greutatea invelișului tronconic de deasupra paralelului de cotă z este :

$$P = \gamma h \pi (x + r) \frac{z}{\cos \alpha} = \gamma h \pi (z \operatorname{tg} \alpha + 2r) \frac{z}{\cos \alpha}.$$

Din formula (16.2) rezultă :

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi x h \cos \alpha} =$$

$$= -\frac{\gamma \pi h (z \operatorname{tg} \alpha + 2r) \frac{z}{\cos \alpha}}{2\pi h (z \operatorname{tg} \alpha + r) \cos \alpha} =$$

$$= -\frac{\gamma (z \operatorname{tg} \alpha + 2r) z}{2(z \operatorname{tg} \alpha + r) \cos^2 \alpha}.$$

$$p_n = -g \cos \varphi = -\gamma h \sin \alpha.$$

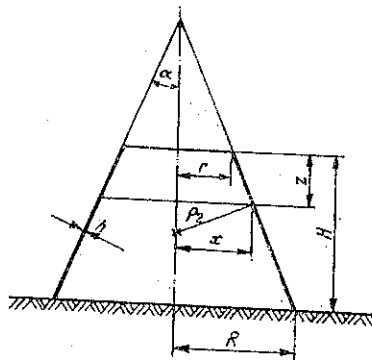


Fig. 16.6

Din relația (16.1):

$$\sigma_2 = \frac{p_n \rho_2}{h} = -\frac{\gamma h \sin \alpha (z \operatorname{tg} \alpha + r)}{h \cos \alpha} = -\gamma \operatorname{tg} \alpha (z \operatorname{tg} \alpha + r).$$

Rezultă că σ_1 și σ_2 nu depind de grosimea h a peretelui. Eforturile unitare maxime apar la $z = H$:

$$\sigma_{1\max} = -\frac{\gamma (H \operatorname{tg} \alpha + 2r) H}{2(H \operatorname{tg} \alpha + r) \cos^2 \alpha} = -\frac{\gamma H (R + r)}{2R \cos^2 \alpha};$$

$$\sigma_{2\max} = -\gamma \operatorname{tg} \alpha (H \operatorname{tg} \alpha + r) = -\gamma R \operatorname{tg} \alpha.$$

Pentru exemplul numeric :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R - r}{H} = \frac{8 - 2}{8} = 0,75; \alpha = 36^\circ 55';$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = 0,8;$$

$$\sigma_{1\max} = -\frac{2400 \cdot 8(8 + 2)}{2 \cdot 8 \cdot 0,64} = -18750 \text{ daN/m}^2 = -1,875 \text{ daN/cm}^2.$$

$$\sigma_{2\max} = -2400 \cdot 8 \cdot 0,75 = -14400 \text{ daN/m}^2 = -1,44 \text{ daN/cm}^2.$$

16.7. Să se determine eforturile unitare într-o placă subțire emisferică, de rază $R = a$, cu axa verticală și concavitatea în sus, sub acțiunea greutateii proprii, în următoarele cazuri;

- este sprijinită pe un plan orizontal (Fig. 16.7, a);
- este sprijinită pe un inel superior (Fig. 16.7, b);
- este sprijinită pe un inel situat pe un paralel oarecare (Fig. 16.7, c).

Rezolvare. a) Greutatea proprie a calotei sferice superioare este :

$$P_\varphi = 2\pi g a^2 \cos \varphi.$$

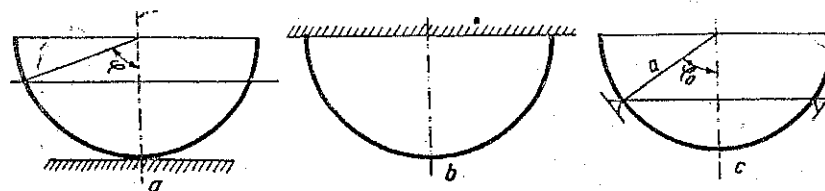


Fig. 16.7

Din relația (16.2) rezultă, înlocuind $r = a \sin \varphi$:

$$\sigma_1 = - \frac{P_\varphi}{2\pi r h \sin \varphi} = - \frac{ga}{h} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

iar din relația (16.1) se obține:

$$\sigma_2 = - \frac{ga \cos \varphi}{h} + \frac{ga}{h} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{ga \cos^3 \varphi}{h \sin^2 \varphi}. \quad (1)$$

b) Se observă că dacă se răstoarnă cupola atârnată, se obține o cupolă emisferică rezemată pe un cerc mare, solicitată de greutatea proprie. Prin răsturnarea cupolei, se modifică numai semnul eforturilor obținute la problema 16.5:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{ga}{(1 + \cos \varphi) h} \\ \sigma_2 &= \frac{ga \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1}{h (1 + \cos \varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

c) Va trebui în prealabil să se calculeze reacțiunea de-a lungul inelului de reazem definit prin unghiul φ_0 .

Pentru întreaga emisferă se obține: $P_\varphi = 2\pi ga^3$.

Dacă se taie acum cupola cu un plan orizontal definit de un unghi $\varphi > \varphi_0$, se obține, întocmai ca la punctul a) de mai sus:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= - \frac{ga \cos \varphi}{h \sin^2 \varphi} \\ \sigma_2 &= + \frac{ga \cos^3 \varphi}{h \sin^2 \varphi} \end{aligned} \right\} (\varphi \geq \varphi_0) \quad (3)$$

Cînd $\varphi < \varphi_0$ eforturile unitare datorite numai reacțiunii reazemului au valoarea:

$$\sigma_1 = - \sigma_2 = - \frac{P}{2\pi a h \sin^2 \varphi} = - \frac{2\pi ga^2}{2\pi a h \sin^2 \varphi} = - \frac{ga}{h \sin^2 \varphi}. \quad (4)$$

Eforturile unitare reale se determină prin suprapunerea efectelor, adică însumînd algebric eforturile unitare (3) și (4):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= - \frac{ga \cos \varphi}{h \sin^2 \varphi} - \frac{ga}{h \sin^2 \varphi} = - \frac{ga(1 + \cos \varphi)}{h \sin^2 \varphi} = - \frac{ga}{(1 - \cos \varphi) h} \\ \sigma_2 &= \frac{ga \cos^3 \varphi}{h \sin^2 \varphi} + \frac{ga}{h \sin^2 \varphi} = \frac{ga(1 - \cos \varphi + \cos^3 \varphi)}{h(1 - \cos \varphi)} = \\ &= \frac{ga}{h} \left(\frac{1}{1 - \cos \varphi} - \cos \varphi \right). \end{aligned} \right\} (\varphi \leq \varphi_0) \quad (5)$$

16.8. Să se dimensioneze un rezervor conic suspendat, plin cu lichid de greutate specifică γ , știind că: înălțimea sa este $l = 3$ m; unghiul la vîrf $2\alpha = 90^\circ$; rezistența admisibilă a tablei $\sigma_a = 1000$ daN/cm² și $\gamma = 10^{-3}$ daN/cm³ (Fig. 16.8).

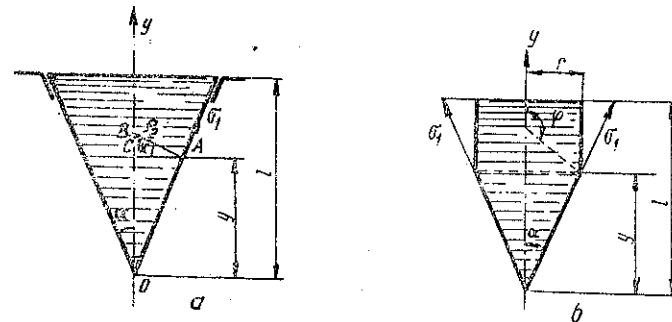


Fig. 16.8

Rezolvare. În acest caz, meridianul este o linie dreaptă și $\rho_1 = \infty$. Ecuația (16.1) se reduce la:

$$\sigma_2 = \frac{P \cdot \rho_2}{h}$$

Presiunea la o înălțime y de la fundul vasului are valoarea:

$$p = \gamma(l - y).$$

Raza de curbura ρ_2 măsurată pe normala la perete este:

$$\rho_2 = AB = \frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{y \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}; \quad \sigma_2 = \frac{\gamma(l - y)}{h} \cdot \frac{y \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha} y(l - y).$$

Efortul unitar σ_2 va fi maxim acolo unde produsul:

$$y(l - y) \text{ este maxim, adică la } y = l - y = \frac{l}{2}.$$

Valoarea maximă este:

$$\sigma_{2 \max} = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha} \cdot \frac{l^2}{4}. \quad (1)$$

Pentru a calcula efortul σ_1 se aplică formula (16.2) în care P este greutatea conului situat sub paralelul de rază r și a cilindrului de deasupra lui (Fig. 16.8, b):

$$P = \gamma \left[\frac{\pi r^2 y}{3} + \pi r^2 (l - y) \right] = \frac{\gamma \pi r^2}{3} (3l - 2y).$$

$$\text{Deoarece } r = y \operatorname{tg} \alpha, P = \frac{\gamma \pi y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{3} (3l - 2y),$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi r h \sin \varphi}.$$

În cazul de față, $\sin \varphi = \cos \alpha$ (Fig. 16.8, b), deci:

$$\sigma_1 = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{6h \cos \alpha} y(3l - 2y).$$

Maximul are loc când $y = \frac{3}{4} l$, după cum se poate verifica ușor anulind derivata.

Valoarea acestui maxim este:

$$\sigma_{1\max} = \frac{3\gamma l^2 \operatorname{tg} \alpha}{16h \cos \alpha}. \quad (2)$$

Se vede că $\sigma_{2\max} > \sigma_{1\max}$.

Rezultă că $\sigma_{2\max}$ este efortul unitar defavorabil; deci dimensionarea se va face folosind formula (1), dacă se admite teoria I de rezistență:

$$h_{\text{necesar}} = \frac{\gamma l^2 \operatorname{tg} \alpha}{4\sigma_a \cos \alpha} = \frac{10^{-3} \cdot 1 \cdot 300^2}{4 \cdot 1000 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0,0319 \text{ cm} \approx 0,32 \text{ mm}.$$

Observare. În practică se folosește o grosime mult mai mare, din cauza îmbinărilor, a pericolului de coroziune etc.

16.9. Să se determine eforturile unitare în pereții unui rezervor tronconic plin cu lichid de greutate specifică γ și rezemat pe baza mică (Fig. 16.9).

Aplicație numerică: $\gamma = 8 \text{ kN/m}^3$; $h = 6 \text{ mm}$; $\alpha = 30^\circ$; $H = 4 \text{ m}$; $l = 12 \text{ m}$.

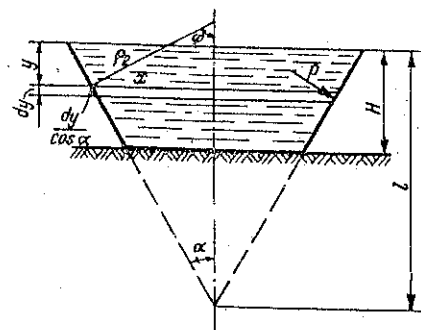


Fig. 16.9

Rezolvare. La adâncimea y presiunea este:

$$p = \gamma y; \text{ iar } x = (l - y) \operatorname{tg} \alpha;$$

$$P = \int_0^y p 2\pi x \frac{dy}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha =$$

$$= 2\pi \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha \int_0^y (l - y) y dy;$$

$$P = \frac{\pi \gamma}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha (3l - 2y) y^2.$$

Rezultă:

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi x h \cos \alpha} = -\frac{\frac{\pi \gamma}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha (3l - 2y) y^2}{2\pi (l - y) \operatorname{tg} \alpha \cdot h \cos \alpha},$$

$$\sigma_1 = -\frac{\gamma \sin \alpha}{6h \cos^2 \alpha} \cdot \frac{(3l - 2y)y^2}{l - y}.$$

Anulind derivata $\frac{d\sigma_1}{dy} = 0$, rezultă că la $y = 0,579 l$:

$$\sigma_{1\max} = -0,244 \frac{\gamma l^2 \sin \alpha}{h \cos^2 \alpha}.$$

Deoarece:

$$\rho_1 = \infty; \rho_2 = \frac{x}{\sin \varphi} = \frac{(l - y) \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{(l - y) \sin \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

din relația (16.1) se obține:

$$\sigma_2 = \frac{p \rho_2}{h} = \frac{\gamma y}{h} \frac{(l - y) \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\gamma \sin \alpha}{h \cos^2 \alpha} (l - y) y.$$

La

$$y = \frac{l}{2}; \sigma_{2\max} = 0,25 \frac{\gamma l^2 \sin \alpha}{h \cos^2 \alpha}.$$

În cazul aplicației numerice, eforturile unitare sînt maxime la baza vasului, deoarece $H < 0,5l$. Cu $l = 3H$:

$$\sigma_{1H} = -\frac{7}{12} \frac{\gamma H^2 \sin \alpha}{h \cos^2 \alpha} = -\frac{7 \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} \cdot 400^2 \cdot 0,5}{12 \cdot 0,6 \cdot 0,75} = -83 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{2H} = 2 \frac{\gamma H^2 \sin \alpha}{h \cos^2 \alpha} = \frac{24}{7} 83 = 284 \text{ daN/cm}^2.$$

16.10. Un rezervor descoperit, alcătuit din doi cilindri avînd forma din figura 16.10, este umplut cu petrol pînă la înălțimea $H = 6,6 \text{ m}$. Se dă greutatea specifică a petrolului $\gamma = 0,93 \text{ daN/dm}^3$. Să se determine grosimea necesară a tablei dacă $\sigma_a = 800 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. În acest caz, pentru fiecare cilindru în parte, $\rho_1 = \infty$, deci formula (16.1) devine:

$$\frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h}; \quad h = \frac{p r_2}{\sigma_a} = \frac{p d_2}{2\sigma_a}.$$

Presiunea maximă se exercită la partea inferioară a rezervorului de diametru $d = 7$ m.

$$p = \gamma H = 0,93 \cdot 10^{-3} \cdot 6,6 \cdot 10^2 = 0,612 \text{ daN/cm}^2,$$

$$h = \frac{0,612 \cdot 700}{2 \cdot 800} = 0,267 \text{ cm} \approx 0,27 \text{ cm}.$$

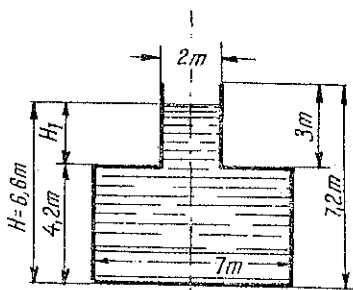


Fig. 16.10

Se observă că efortul unitar σ_1 este nul în porțiunea superioară a rezervorului, întrucât nu există forțe verticale.

În porțiunea inferioară (acolo unde diametrul este de 7 m), ia naștere un efort unitar σ_1 , datorită întinderii rezervorului de către presiunea de jos în sus, exercitată asupra coroanei circulare orizontale.

Presiunea de jos în sus este:

$$p_1 = \gamma \cdot H_1 = 0,93 \cdot 10^{-3} \cdot (6,6 - 4,2) \cdot 10^2 = 0,223 \text{ daN/cm}^2.$$

Forța de întindere în partea inferioară a rezervorului este:

$$F = p_1 \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 0,223 \cdot \frac{3,14(700^2 - 200^2)}{4} = 78\,500 \text{ daN}.$$

Efortul unitar este:

$$\sigma_1 = \frac{F}{\pi D h},$$

de unde rezultă al doilea calcul pentru h :

$$h = \frac{F}{\pi D \sigma_2} = \frac{78\,500}{3,14 \cdot 700 \cdot 800} = 0,45 \text{ cm} > 0,27 \text{ cm}.$$

În practică se folosește o grosime mai mare, din cauza îmbinărilor, a pericolului de coroziune etc.

16.11. Un rezervor cilindric suspendat, avînd fundul sferic, este umplut cu un lichid de greutate specifică γ . Să se determine eforturile unitare maxime σ_1 și σ_2 în porțiunea cilindrică și sferică, precum și efortul de compresiune în inelul mn (Fig. 16.11, a).

Rezolvare. 1) Eforturile unitare maxime ce se dezvoltă în porțiunea cilindrică se obțin în felul următor:

Pentru efortul unitar σ_2 se aplică formula generală (16.1) unde $\rho_1 = \infty$ și $\rho_2 = r$. Formula devine deci:

$$\sigma_2 = \frac{pr}{h} = \frac{\gamma H r}{h},$$

unde $p = \gamma H$ este presiunea la partea de jos a cilindrului.

Efortul unitar după generatoare se obține scriind ecuația de echilibru pe verticală, ținînd seama de forțele exterioare (greutatea lichidului din rezervor) și de forțele interioare:

$$G - 2\pi r h \sigma_1 = 0; \sigma_1 = \frac{G}{2\pi r h}, \text{ unde } G = \left[\pi r^2 H + \pi \left(\frac{2}{3} R^3 - R^2 l + \frac{l^3}{3} \right) \right] \gamma.$$

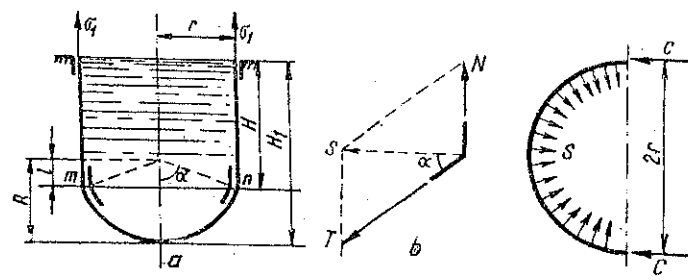


Fig. 16.11

2) În porțiunea sferică a rezervorului, eforturile unitare maxime sînt egale $\sigma_1 = \sigma_2$ și au valoarea:

$$\sigma = \frac{pR}{2h} = \frac{\gamma H_1 R}{2h}.$$

3) Dacă se izolează inelul mn (Fig. 16.11, b), asupra lui acționează două eforturi de întindere N și T (ambele se calculează raportîndu-le la unitatea de lungime a conturului)

$$N = \sigma_1 h = \frac{G}{2\pi r}; \quad T = \frac{N}{\sin \alpha} = \frac{G}{2\pi r \sin \alpha}.$$

Ele dau o rezultantă orizontală S dirijată către interiorul rezervorului (Fig. 16.11, b):

$$S = T \cos \alpha = \frac{G}{2\pi r} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Datorită acestor eforturi S , în inelul mn apar eforturile de compresiune C (Fig. 16.11, c), a căror valoare este dată de relația:

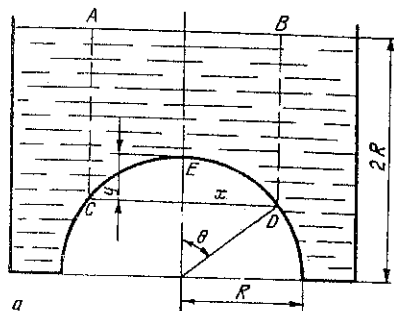
$$2C = S \cdot 2r,$$

de unde

$$C = S \cdot r = \frac{G}{2\pi} \operatorname{ctg} \alpha.$$

16.12. Să se calculeze eforturile unitare în partea emisferică a vasului cu pereți subțiri din figura 16.12, a, plin cu un lichid de greutate specifică γ .

Rezolvare. Din figura 16.12, a rezultă:



$$x = R \sin \theta; y = R(1 - \cos \theta);$$

$$dy = R \sin \theta d\theta.$$

Volumul calotei sferice CED este:

$$V_y = \int_0^y \pi x^2 dy = \pi R^3 \int_0^\theta \sin^3 \theta d\theta = \\ = \frac{\pi R^3}{3} (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 2).$$

Greutatea coloanei de lichid ACEDB este:

$$P = \gamma \left[\pi x^2 (2R - R \cos \theta) - \right. \\ \left. - \frac{\pi R^3}{3} (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 2) \right],$$

$$P = \frac{2\pi}{3} \gamma R^3 (1 - \cos \theta) (2 + 2 \cos \theta - \cos^2 \theta).$$

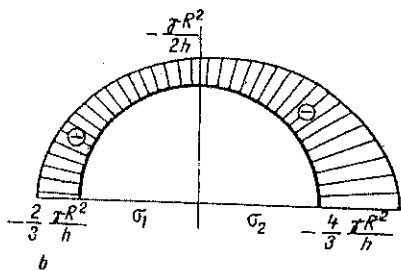


Fig. 16.12

Rezultă din relația (16.2):

$$\sigma_1 = - \frac{P}{2\pi x h \sin \theta} = - \frac{\frac{2\pi}{3} \gamma R^3 (1 - \cos \theta) (2 + 2 \cos \theta - \cos^2 \theta)}{2\pi R h (1 - \cos^2 \theta)}, \\ \sigma_1 = - \frac{\gamma R^2}{3h} \frac{2 + 2 \cos \theta - \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta}.$$

La nivelul CD: $p = -\gamma(2R - R \cos \theta)$.

Din relația (16.1):

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{R} = - \frac{\gamma R}{h} (2 - \cos \theta).$$

Înlocuind pe σ_1 , se obține:

$$\sigma_2 = - \frac{\gamma R^2}{3h} \frac{4 + \cos \theta - 2 \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta}.$$

În figura 16.12, b sînt date diagramele de variație a eforturilor unitare σ_1 și σ_2 .

16.13. Să se calculeze eforturile unitare într-un vas cu pereți subțiri suspendat, de forma unui paraboloid, plin cu lichid de greutate specifică γ (Fig. 16.13).

Rezolvare. În sistemul de axe Oxy (Fig. 16.13), ecuația generatoarei este:

$$y = \frac{b}{a^2} x^2.$$

Volumul părții inferioare a vasului pînă la cota y este:

$$V = \int_0^y \pi x^2 dy = \frac{\pi a^2}{2b} y^2.$$

Greutatea volumului de lichid ACODB este:

$$P = \gamma \left[\frac{\pi a^2}{2b} y^2 + \pi x^2 (b - y) \right] = \gamma \frac{\pi a^2}{2b} y (2b - y);$$

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}} = 2 \sqrt{by} (a^2 + 4by)^{-1/2};$$

$$\rho_2 = \frac{x}{\sin \theta} = \frac{a}{2b} (a^2 + 4by)^{1/2}.$$

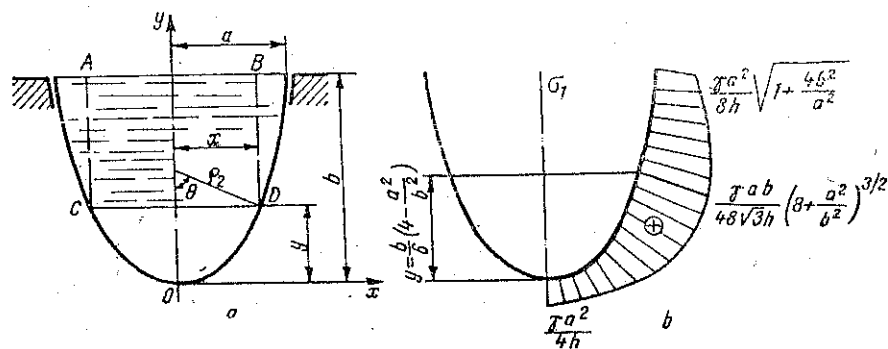


Fig. 16.13

Neglijând presiunea atmosferică pe suprafața lichidului :

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi x h \sin \theta} = \frac{\gamma \frac{\pi a^2}{2b} y(2b - y)}{2\pi a \sqrt{\frac{y}{b} h 2 \sqrt{by} (a^2 + 4by)^{-1/2}}} = \frac{\gamma a}{8bh} (2b - y)(a^2 + 4by)^{1/2}$$

Anulind derivata :

$$\frac{d\sigma_1}{dy} = \frac{\gamma a}{8bh} \left[-\sqrt{a^2 + 4by} + (2b - y) \frac{2b}{\sqrt{a^2 + 4by}} \right] = 0,$$

rezultă că la $y = \frac{b}{6} \left(4 - \frac{a^2}{b^2} \right)$ se obține :

$$\sigma_{1max} = \frac{\gamma a}{48\sqrt{3}bh} (8b^2 + a^2)^{3/2}.$$

În figura 16.13, b este dată diagrama de variație a lui σ_1 pe genera-toare.

Raza de curbura ρ_1 se determină cu relația :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{\frac{2b}{a^2}}{\left(1 + \frac{4b^2}{a^4} x^2 \right)^{3/2}},$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2ba} (a^2 + 4by)^{3/2}.$$

Din relația (16.1), înlocuind și $p = \gamma (b - y)$ rezultă :

$$\sigma_2 = \rho_2 \left(\frac{p}{h} - \frac{\sigma_1}{\rho_1} \right) = \frac{a}{2b} (a^2 + 4by)^{1/2} \left[\frac{\gamma(b - y)}{h} - \frac{\frac{\gamma a}{8bh} (2b - y)(a^2 + 4by)^{1/2}}{\frac{1}{2ba} (a^2 + 4by)^{3/2}} \right],$$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma a}{8bh} [2a^2b + (16b^2 - 3a^2)y - 16by^2] (a^2 + 4by)^{-1/2},$$

$$\text{la : } y = 0; \sigma_2 = \frac{\gamma a^2}{4h},$$

$$\text{la : } y = b; \sigma_2 = -\frac{\gamma a^2}{8h} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4b^2}{a^2}}}.$$

Pentru cazul particular $a = b$:

$$\sigma_2 = \frac{\gamma \sqrt{a} (2a^2 + 13ay - 16y^2)}{8h \sqrt{a + 4y}}$$

Anulind derivata $\frac{d\sigma_2}{dy} = 0$, rezultă că la $y = 0,276 a$ efortul unitar σ_2 are un maxim :

$$\sigma_{2max} = 3,015 \frac{\gamma a^2}{8h}.$$

Efortul unitar $\sigma_2 = 0$ pentru $y = 0,945 a$.

În figura 16.13, c este dată diagrama de variație a lui σ_2 , pentru acest caz particular.

16.14. Un vas cu pereți subțiri format dintr-o parte cilindrică și una emisferică (Fig. 16.14) este ținut scufundat într-un lichid de greutate specifică γ . Să se determine eforturile unitare din vas.

Rezolvare. Se va nota $\frac{H}{R} = \lambda$.

1) Pentru partea emisferică, la nivelul mn :

$$p = \gamma(H + R \cos \theta) = \gamma R(\lambda + \cos \theta); x = R \sin \theta.$$

Rezultanta forțelor de presiune pe calota sferică limitată de paralela la mn este :

$$P = \int_0^\theta p 2\pi x R d\theta \cos \theta = \int_0^\theta \gamma R(\lambda + \cos \theta) 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

$$P = \frac{\gamma \pi R^3}{3} (1 - \cos \theta) [(3\lambda + 2)(1 + \cos \theta) + 2 \cos^2 \theta],$$

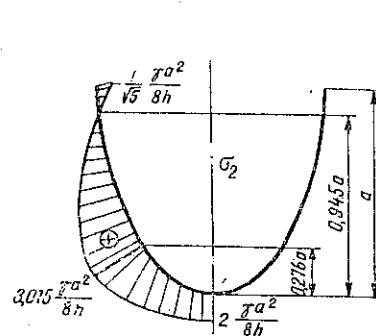


Fig. 16.13

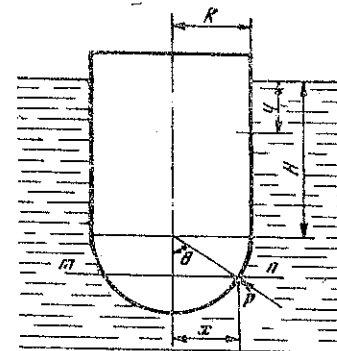


Fig. 16.14

$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi x h \sin \theta} = -\frac{\frac{\gamma \pi R^3}{3} (1 - \cos \theta) [(3\lambda + 2)(1 + \cos \theta) + \cos^2 \theta]}{2\pi h R \sin^2 \theta},$$

$$\sigma_1 = -\frac{\gamma R^2}{6h} \frac{(3\lambda + 2)(1 + \cos \theta) + 2 \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta}.$$

La $\theta = 0$; $\sigma_1 = -\frac{\gamma R^2}{2h}(\lambda + 1)$. La $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\sigma_1 = -\frac{\gamma R^2}{2h}\left(\lambda + \frac{2}{3}\right)$.

Din relația (16.1) rezultă:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{R} = -\frac{\gamma R(\lambda + \cos \theta)}{h},$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= -\frac{\gamma R^2}{h}(\lambda + \cos \theta) + \frac{\gamma R^2(3\lambda + 2)(1 + \cos \theta) + 2 \cos^2 \theta}{6h} = \\ &= -\frac{\gamma R^2}{6h} \frac{4 \cos^2 \theta + (3\lambda + 4) \cos \theta + 3\lambda - 2}{1 + \cos \theta}. \end{aligned}$$

Pentru $\theta = 0$; $\sigma_2 = -\frac{\gamma R^2}{2h}(\lambda + 1)$,

iar pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\sigma_2 = -\frac{\gamma R^2}{2h}\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)$.

2) Pentru partea cilindrică:

$$\sigma_1 = -\frac{\gamma R^2}{2h}\left(\lambda + \frac{2}{3}\right) = \text{const.}$$

Deoarece $\rho_1 = \infty$; $\rho_2 = R$, din relația (16.2) rezultă:

$$\sigma_2 = \frac{pR}{h} = \gamma \frac{R}{h} y.$$

16.15. Să se determine eforturile unitare într-un înveliș sferic cu pereți subțiri, de greutate specifică γ , care se rotește în jurul unei axe verticale cu viteză unghiulară constantă ω (Fig. 16.15). Care este volumul vasului după deformare?

Rezolvare.

$$p = \frac{\gamma}{g} h x \omega^2,$$

unde h este grosimea peretei,

$$x = R \sin \varphi;$$

$$p_n = p \sin \varphi = \frac{\gamma}{g} h R \omega^2 \sin^2 \varphi;$$

$$\sigma_1 = 0;$$

$$\sigma_2 = \frac{p_n R}{h} = \frac{\gamma}{g} \omega^2 R^2 \sin^2 \varphi.$$

Deformațiile specifice pe direcțiile paralelului și meridianului sînt:

$$\varepsilon_1 = -\nu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E}.$$

Deformația volumică specifică este aproximativ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= 2\varepsilon_2 + \varepsilon_1 = \frac{2-\nu}{E} \sigma_2 = \\ &= \frac{2-\nu}{E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 R^2 \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

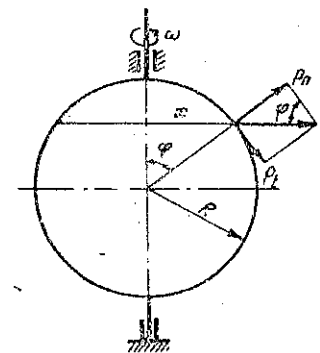


Fig. 16.15

$$V = \int_0^\pi \pi x^2 \sin \varphi R d\varphi = \pi R^3 \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi,$$

$$\Delta V = \varepsilon_v V = \frac{\gamma}{g} \frac{2-\nu}{E} \omega^2 \pi R^3 \int_0^\pi \sin^5 \varphi d\varphi = \frac{16}{15} \frac{\gamma}{g} \frac{2-\nu}{E} \omega^2 \pi R^5.$$

Volumul vasului după deformare va fi:

$$V_1 = V_0 + \Delta V = \frac{4}{3} \pi R^3 \left[1 + \frac{4}{5} \frac{2-\nu}{E} \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2 \right].$$

16.16. Se dă o bară absolut rigidă și o țevă subțire elastică, al cărei diametru interior e mai mic cu 2Δ decât diametrul barei. Țeava e încălzită și introdusă pe bară (Fig. 16.16, a). La răcire, în țevă apar eforturi unitare circumferențiale, iar în prezența frecării — eforturi unitare axiale. Să se determine mărimea și legea de distribuție a eforturilor unitare în țevă.

Rezolvare. Notînd cu p presiunea de contact și cu N forța axială din țevă:

$$\sigma_1 = \frac{N}{2\pi R h}; \quad \sigma_2 = \frac{pR}{h},$$

unde h este grosimea peretelui țevii. Deformația specifică radială :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta}{R} = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) = \frac{1}{Eh} \left(pR - \nu \frac{N}{2\pi R} \right).$$

Într-o secțiune x , forța axială este :

$$N = \int_0^x fp 2\pi R dx,$$

unde f este coeficientul de frecare.

Rezultă :

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{1}{Eh} \left(pR - \nu f \int_0^x p dx \right).$$

Derivând în raport cu x :

$$0 = \frac{dp}{dx} - \frac{\nu f}{R} p,$$

$$p = p_0 e^{\frac{\nu f}{R} x}.$$

Constanta p_0 reprezintă presiunea de contact la capătul țevii :

$$p_0 = \frac{Eh}{R^2} \Delta.$$

Rezultă :

$$p = \frac{Eh\Delta}{R^2} e^{\frac{\nu f}{R} x}; \quad \sigma_2 = \frac{E\Delta}{R} e^{\frac{\nu f}{R} x};$$

$$N = \frac{2\pi Eh\Delta}{\nu} (e^{\frac{\nu f}{R} x} - 1); \quad \sigma_1 = \frac{E\Delta}{R\nu} (e^{\frac{\nu f}{R} x} - 1),$$

astfel că eforturile unitare cresc de la capătul spre mijlocul țevii. Această creștere este întreruptă în secțiunea a în care deformația axială datorită eforturilor unitare σ_1 și σ_2 devine egală cu deformația axială inițială a țevii, care este tot $\frac{\Delta}{R}$ ca și cea radială :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = \frac{\Delta}{\nu R} [(1 - \nu^2) e^{\frac{\nu f}{R} x} - 1].$$

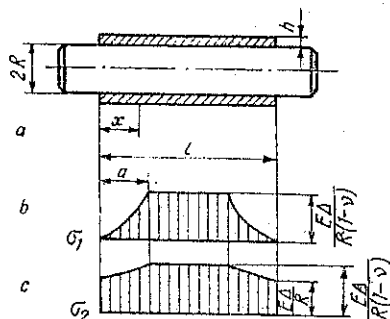


Fig. 16.16

de unde :

La $x = a$; $\varepsilon_1 = \frac{\Delta}{R}$, rezultă : $a = \frac{R}{\nu f} \ln \frac{1}{1 - \nu}$.

Pentru $x > a$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\Delta}{R} = \text{const.}$ și avem :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{E\Delta}{R(1 - \nu)}.$$

În figurile 16.16, b și 16.16, c sînt date diagramele de variație ale eforturilor unitare σ_1 și σ_2 în lungul țevii.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

16.17. Un rezervor cilindric de diametru $2R = 3,6$ m, cu fundul de formă emisferică, este plin cu apă pînă la cota $H = 6$ m (Fig. 16.17). Grosimea peretilor este $h = 6$ mm. Să se determine efortul unitar maxim din partea cilindrică și din cea sferică a rezervorului.

Răspuns :

$$\sigma_{max\text{ cil}} = 144 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{max\text{ sf}} = 93,6 \text{ daN/cm}^2.$$

16.18. Să se determine eforturile unitare în punctele mn ale rezervorului cilindric cu fundul emisferic, plin cu un lichid de greutate specifică γ (Fig. 16.18).

$$\text{Răspuns : } \sigma_1 = \frac{\gamma R}{h} \left(\frac{H - R}{2} + \frac{R}{3} \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right),$$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma R}{h} \left(\frac{H - R}{2} + \frac{R}{3} \frac{\sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} \right).$$

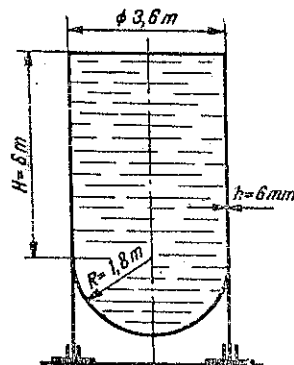


Fig. 16.17

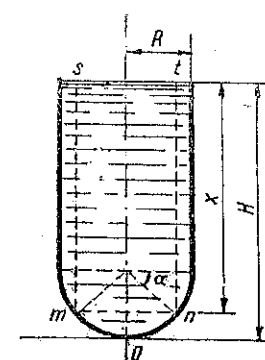


Fig. 16.18

16.19. Să se calculeze eforturile unitare maxime în pereții rezervorului din figura 16.19 plin cu lichid de greutate specifică $\gamma = 9 \text{ kN/m}^3$. Se dau: $h = 4 \text{ m}$; $R = 4 \text{ m}$. Să se facă verificarea după teoria a III-a de rezistență, dacă $\sigma_a = 1\,000 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\frac{\gamma R^2}{3h} \sin \theta \operatorname{tg}^2 \theta = \\ &= -312 \text{ daN/cm}^2, \\ \sigma_2 &= \frac{\gamma R^2}{3h} (3 + \operatorname{tg}^2 \theta) \sin \theta = \\ &= 623 \text{ daN/cm}^2, \\ \sigma_{ech} &= 935 \text{ daN/cm}^2.\end{aligned}$$

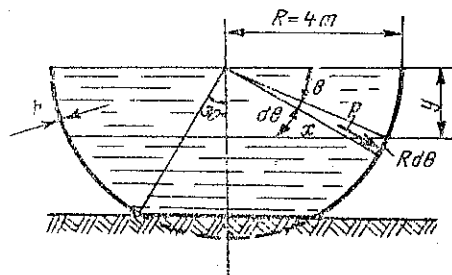


Fig. 16.19

Valorile eforturilor unitare au fost calculate pentru $\theta = 60^\circ$.

INCOVOIEREA ȘI RĂSUCIREA PROFILELOR SUBȚIRI

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Spre deosebire de barele ale căror secțiuni au toate dimensiunile de același ordin de mărime, barele ale căror secțiuni sînt profile subțiri au grosimea mică față de dimensiunile generale ale secțiunii transversale.

Ca axe de coordonate se consideră axa x în lungul barei, iar axele y și z în planul secțiunii transversale prin bară. Ca axe y și z se iau axele principale centrale ale secțiunii. Aceste condiții se pot scrie:

$$\int y dA = 0; \int z dA = 0; \int yz dA = 0. \quad (17.1)$$

2. În calculul eforturilor unitare intervin următoarele caracteristici ale secțiunii:

Suprafața sector, care este dublul suprafeței descrise de o rază vectorială care are originea într-un punct fix, iar vârful parcurge linia mediană a profilului. Suprafața sector se notează cu ω .

Momentul de inerție sectorial, definit de expresia:

$$I_\omega = \int \omega^2 dA. \quad (17.2)$$

Momentul static sectorial, definit de expresia:

$$S_\omega = \int \omega dA. \quad (17.3)$$

Momentul de inerție polar echivalent I_d , care reprezintă raportul dintre rigiditatea la răsucire a barei și modulul de elasticitate transversal G . Funcție de datele secțiunii, I_d se poate scrie:

$$I_d = \frac{1}{3} \sum b \delta^3. \quad (17.4)$$

Suma se extinde la toate suprafețele dreptunghiulare în care se poate descompune secțiunea. Lungimea unui astfel de element s-a notat cu b și lățimea lui cu δ .

3. Expresiile eforturilor unitare și ale deformațiilor se simplifică în cazul care :

a) polul față de care se calculează suprafața sector satisface relațiile

$$\int \omega z dA = 0, \quad (17.5)$$

$$\int \omega y dA = 0; \quad (17.6)$$

b) direcția razei vectoriale origine este astfel aleasă, încît pentru toată cîmpul să se obțină :

$$\int \omega dA = 0. \quad (17.7)$$

4. Polul determinat de condițiile (17.5) și (17.6) se numește centru de covoiere și are proprietatea că dacă o forță transversală care solicită ara este astfel dirijată, încît linia ei de acțiune trece prin acest punct, această forță produce numai o încovoiere a barei. În caz contrar, se produce și o răsucire.

Centrul de încovoiere se determină în modul următor.

Se alege pentru determinarea suprafețelor sector un polarbitrar B de coordonate b_z și b_y .

Coordonatele centrului de încovoiere vor fi date în acest caz de relațiile :

$$a_z = b_z + \frac{\int \omega_B y dA}{I_z}, \quad (17.8)$$

$$a_y = b_y - \frac{\int \omega_B z dA}{I_y}, \quad (17.9)$$

care ω_B reprezintă suprafața sector luată față de acest polarbitrar ales.

5. În cele ce urmează se presupun satisfăcute condițiile (17.1), (17.5), (17.6) și (17.7).

6. În cazul barelor libere cu secțiune deschisă, solicitate la răsucire, se produc numai eforturi unitare tangențiale. Determinarea acestora se face pe calea obișnuită, cunoscută de la răsucirea barelor de secțiune oarecare.

Secțiunea plană și perpendiculară pe axa barei înainte de deformare și mai rămîne plană și perpendiculară pe axa barei după deformare, iar deplasarea în direcția axei x față de secțiunea plană este dată de relația :

$$u = \varphi' \omega, \quad (17.10)$$

care : $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$, iar φ este unghiul de răsucire.

7. În cazul barelor avînd ca secțiune profile subțiri deschise la care deplanarea este împiedicată, se produc în urma solicitării la răsucire eforturi unitare normale și eforturi unitare tangențiale suplimentare.

În cazul unei solicitări oarecare, dacă condițiile de la punctul 5 sînt satisfăcute, expresiile eforturilor unitare sînt următoarele :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B}{I_\omega} \omega, \quad (17.11)$$

$$\tau = \frac{T_y S_z}{I_z \delta} + \frac{T_z S_y}{I_y \delta} + \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega \delta} + \frac{M_z \delta}{I_z} \cdot \frac{1}{\delta} \quad (17.12)$$

În aceste expresii, N , A , M_z ... au semnificațiile obișnuite în domeniul rezistenței materialelor; I_ω , S_ω , ω sînt, respectiv, momentul de inerție sectorial, momentul static sectorial și suprafața sectorială care au fost definite la paragraful 2, iar B este bimomentul de încovoiere-răsucire care introduce efectul eforturilor unitare normale suplimentare produse din cauza răsucirii. Expresia bimomentului este :

$$B = \int \sigma_x \omega dA. \quad (17.13)$$

Derivînd bimomentul în raport cu x , se obține momentul de încovoiere-răsucire :

$$M_\omega = \frac{dB}{dx}. \quad (17.14)$$

Expresia momentului de încovoiere-răsucire, funcție de eforturile unitare,

$$M_\omega = \int \tau \delta dA. \quad (17.15)$$

Acest moment se poate interpreta ca fiind momentul tuturor forțelor luat față de centrul de încovoiere al secțiunii.

Ultimul termen din expresia (17.11) scoate în evidență împiedicarea deplanării din cauza răsucirii barelor subțiri. Ultimii doi termeni din relația (17.12) sînt zero în cazul cînd toate forțele trec prin centrul de încovoiere al secțiunii barei.

Efortul unitar tangențial exprimat de ultimul termen din relația (17.12) se datorește răsucirii libere. Acesta variază liniar pe grosimea δ a profilului și expresia dată reprezintă valoarea lui maximă, în apropierea conturului. Ceilalți trei termeni din expresia (17.12) reprezintă eforturi unitare tangențiale, constante pe grosimea δ a profilului și se datoresc forfecării și efectului de împiedicare a deplanării produs de răsucirea împiedicată.

Momentul care se aplică asupra secțiunii este :

$$M_x = M_\omega + M_t. \quad (17.16)$$

3. Ecuația diferențială a răsucirii barelor cu pereți subțiri este :

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = -\frac{m}{EI_\omega}, \quad (17.17)$$

unde

$$k = \sqrt{\frac{GI_a}{EI_\omega}}, \quad (17.18)$$

iar $m = \frac{dM_x}{dx}$ reprezintă intensitatea momentului exterior de răsucire repartizat în lungul axei x .

Soluția ecuației (17.17) este :

$$\begin{aligned} \varphi_x = \varphi_0 + \varphi'_0 \frac{\text{sh } kx}{k} + \frac{B_0}{GI_a} (1 - \text{ch } kx) + \frac{M_{x0}}{kGI_a} (kx - \text{sh } kx) + \\ + \frac{1}{kGI_a} \int_0^x [k(x-t) - \text{sh } k(x-t)] m(t) dt. \end{aligned} \quad (17.19)$$

Derivata acestei relații este :

$$\begin{aligned} \varphi'_x = \varphi'_0 \text{ch } kx - \frac{B_0}{GI_a} k \text{sh } kx + \frac{M_{x0}}{GI_a} (1 - \text{ch } kx) + \\ + \frac{1}{GI_a} \int_0^x [1 - \text{ch } k(1-t)] m(t) dt. \end{aligned} \quad (17.20)$$

Între momentul total de răsucire și derivatele unghiului de răsucire, φ , există relația :

$$M_x = -EI_\omega \varphi''' + GI_a \varphi'. \quad (17.21)$$

Între bimoment și φ există relația :

$$B = -EI_\omega \varphi''. \quad (17.22)$$

Înlocuind în relațiile (17.21) și (17.22) expresia lui φ din (17.19) se obține :

$$\begin{aligned} B_x = -\frac{\varphi'_0 GI_a}{k} \text{sh } kx + B_0 \text{ch } kx + \frac{M_{x0}}{k} \text{sh } kx + \\ + \frac{1}{k} \int_0^x \text{sh } k(x-t) m(t) dt; \end{aligned} \quad (17.23)$$

$$M_x = \int_0^x m(t) dt. \quad (17.24)$$

Cunoscind parametrii φ_0 , φ'_0 , B_0 și M_0 într-un punct luat ca origine, se pot scrie, cu ajutorul relațiilor (17.23) și (17.24), expresiile bimomentului și momentului de încovoiere-răsucire în oricare secțiune a barei. Condițiile de deformare sînt suficiente pentru determinarea acestor parametri.

9. Deoarece în problemele barelor cu pereți subțiri intervin integrale din produse de două funcții, dintre care una liniară, respectiv intervin produse de diagrame, calculele se pot simplifica utilizînd regula lui Vereșcea-ghin de înmulțire a diagramelor.

Această regulă se poate enunța în felul următor : pentru a înmulți între ele două diagrame dintre care una liniară, se înmulțește suprafața primei diagrame cu ordonata diagramei liniare în dreptul centrului de greutate al primei diagrame.

10. Pentru secțiuni care au o axă de simetrie și se pot descompune în elemente pentru care se cunosc principalele caracteristici sectoriale, calculul centrului de încovoiere și calculul momentului de inerție sectorial se pot face direct, în modul următor :

Presupunînd că axa Oy este o axă de simetrie, se ia axa Oz în mod arbitrar, perpendicular pe aceasta. Se calculează momentele de inerție pentru fiecare element în parte, față de axa de simetrie, I_{y1} , I_{y2} ... Se calculează poziția centrului de încovoiere a_{y1} , a_{y2} ... al fiecărui element în parte, față de axa Oz arbitrar aleasă. Se calculează, de asemenea, momentele de inerție sectoriale ale fiecărui element în parte $I_{\omega 1}$, $I_{\omega 2}$... față de centrul lui de încovoiere.

Ordonata centrului de încovoiere al întregii secțiuni va fi :

$$a_y = \frac{\sum I_{yi} a_{yi}}{\sum I_{yi}}, \quad (17.25)$$

iar momentul de inerție sectorial al întregii secțiuni este :

$$I_\omega = \sum I_{\omega i} + \frac{\sum I_{yi} I_{yi} a_{yi}^2}{\sum I_{yi}}, \quad i \neq j. \quad (17.26)$$

Suma de la numărătorul ultimului termen este extinsă la toate combinațiile posibile de cîte două momente de inerție ale elementelor considerate, iar a_{yi} reprezintă distanța între centrele de încovoiere ale perechilor respective.

B. PROBLEME REZOLVATE

17.1. Să se calculeze suprafața sector pentru un profil I.

Aplicație numerică : se dă un profil I 20, schematizat ca în figura 17.1, a, la care : $b_1 = 90$ mm ; $b_2 = 177,4$ mm ; $\delta_1 = 11,3$ mm ; $\delta_2 = 7,5$ mm ; $h = b_2 + \delta_1 = 188,7$ mm.

Rezolvare. Profilul avînd două axe de simetrie, centrul de încovoiere se va găsi la intersecția lor.

Raza vectoare origine coincide cu axa Oy . Dacă se pleacă de la această rază vectoare origine și se rotește, avînd ca punct fix centrul de încovoiere, fiecărui punct al liniei mediane îi corespunde o suprafață sector.

Se construiește astfel diagrama suprafețelor sector din figura 17.1, *b*. Se observă că suprafața sector corespunzătoare inimii profilului are valoarea nulă.

Valoarea maximă a suprafeței sector este în punctul *B* și mărimea acesteia este dublul suprafeței triunghiului OAB , adică :

$$\omega = \frac{h}{2} \cdot \frac{b_1}{2} = \frac{hb_1}{4}$$

Valoarea numerică este :

$$\omega = 9,435 \cdot 4,5 = 42,4 \text{ cm}^2.$$

17.2. Să se construiască diagrama momentelor statice sectoriale pentru profilul din figura 17.1, *a*.

Rezolvare. Momentul static sectorial, necesar pentru a determina legea de variație a eforturilor unitare tangențiale suplimentare, produse ca urmare a împiedicării deplanării, va trebui să se refere la suprafața sector care satisface condițiile (17.5)–(17.7). Calculul se face pornind de la extremitățile profilului, unde, datorită condițiilor la limită, efortul unitar tangențial trebuie să fie nul. Diagrama obținută este o parabolă (Fig. 17.2), valoarea maximă fiind în punctul *A*, unde are ca mărime suprafața triunghiului diagramei ω înmulțită cu grosimea medie a tălpii profilului :

$$S_{\omega \max} = \delta_1 \frac{b_1}{2} = \frac{b_1 h}{4} \cdot \frac{1}{2} = \delta_1 \frac{hb_1^2}{16}$$

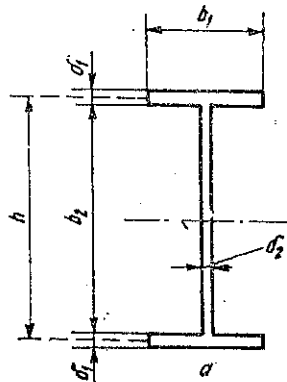


Fig. 17.1

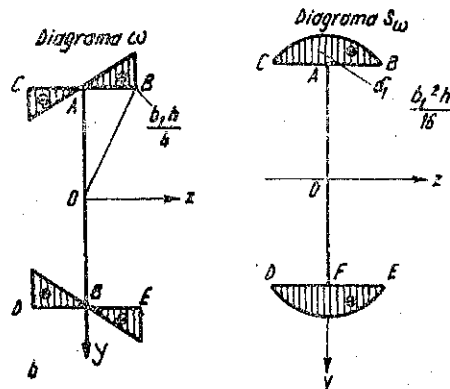


Fig. 17.2

Numeric :

$$S_{\omega \max} = 1,13 \frac{18,87 \cdot 9^2}{16} = 107,8 \text{ cm}^4.$$

17.3. Să se calculeze momentul de inerție sectorial pentru profilul din figura 17.1, *a*.

Rezolvare. Momentul de inerție sectorial este dat de expresia (17.2). Calculul se face pornind de la diagrama suprafeței sector trasată în figura 17.1, *b*. Se va aplica metoda lui *Veresceaghin* de integrare directă a unui produs de două diagrame, respectiv diagrama ω și diagrama ω înmulțită cu grosimea δ .

Se va obține astfel :

$$I_{\omega} = \int \omega^2 dA = 4\delta_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1}{2} \cdot \frac{b_1 h}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{b_1 h}{4} = \frac{\delta_1 h^2 b_1^3}{24}$$

sau numeric :

$$I_{\omega} = \frac{18,87^2 \cdot 9^3 \cdot 1,13}{24} = 12\,250 \text{ cm}^6.$$

Aplicînd regula dată de relația (17.26), se obține :

$$I_{\omega} = \frac{\left(\frac{\delta_1 b_1^3}{12}\right)^2 h^2}{2 \frac{\delta_1 b_1^3}{12}} = \frac{\delta_1 h^2 b_1^3}{24}$$

Se observă că rezultatele obținute prin cele două metode coincid.

17.4. Să se calculeze eforturile unitare normale maxime care se produc într-o bară de oțel rezemată la capete și încărcată cu o sarcină uniform repartizată excentric p , ca în figura 17.4. Secțiunea transversală este cea dată în figura 17.1, *a*.

Aplicație numerică. Sarcina uniform repartizată $p = 600 \text{ daN/m}$; excentricitatea $e = 4,5 \text{ cm}$; deschiderea barei $l = 5 \text{ m}$.

Rezolvare. Spre a se calcula expresia bimomentului în lungul barei se folosește relația (17.23). Rămîne să se determine parametrii φ_0 , φ_1 , B_0 și M_{x0} în funcție de condițiile la limită din cazul problemei.

Se observă că dacă se ia ca origine unul dintre reazeme, rotirea în planul $yo z$ este nulă, respectiv $\varphi_0 = 0$. Momentul de răsucire din reazem este $\frac{ple}{2} = M_{x0}$.

Deoarece secțiunea de pe reazem este liberă să se rotească în planul $zo x$, avem $B_0 = 0$. Singura necunoscută care a rămas este φ_1 . Pentru a se determina, se va pune condiția de pe celălalt reazem, $\varphi_1 = 0$.

Utilizând relațiile (17.19) în care se face $x = l$ și efectuând integrala se obține:

$$\varphi_l = \varphi_0' \frac{\text{sh } kl}{k} - \frac{pe l}{2} \frac{1}{kGI_d} (kl - \text{sh } kl) + \frac{pe}{k^2GI_d} \left[\frac{(kl)^2}{2} + 1 - \text{ch } kl \right] = 0,$$

de unde:

$$\varphi_0' = - \frac{pe}{k^3EI_\omega} \left(\frac{kl}{2} - \frac{\text{sh } \frac{kl}{2}}{\text{ch } \frac{kl}{2}} \right).$$

Odată cunoscute toate constantele, utilizând relația (17.23), se poate scrie expresia bimomentului:

$$B_x = \frac{peGI_d}{k^3EI_\omega k} \left(\frac{kl}{2} - \frac{\text{sh } \frac{kl}{2}}{\text{ch } \frac{kl}{2}} \right) \text{sh } kx - \frac{pe l}{2} \frac{\text{sh } kx}{k} + \frac{pe}{k^2} (\text{ch } kx - 1),$$

sau după simplificare:

$$B_x = \frac{pe}{k^2} (\text{ch } kx - 1) - \frac{p}{k^2} \text{sh } kx \frac{\text{sh } \frac{kl}{2}}{\text{ch } \frac{kl}{2}},$$

și deoarece:

$$\text{ch } kx \text{ch } \frac{kl}{2} - \text{sh } kx \text{sh } \frac{kl}{2} = \text{ch } k \left(\frac{l}{2} - x \right),$$

se obține:

$$B_x = - \frac{pe}{k^2} \left[1 - \frac{\text{ch } k \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\text{ch } \frac{kl}{2}} \right].$$

Valoarea maximă a acestei expresii este:

$$B_{x \max} = - \frac{pe}{k^2} \left[1 - \frac{1}{\text{ch } \frac{kl}{2}} \right] \text{ pentru } x = \frac{l}{2}$$

Momentul încovoietor este maxim la mijlocul barei și are expresia

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8}$$

Efortul unitar normal este maxim în secțiunea de la mijloc, în una din perechile de puncte CD sau BE (Fig. 17.1, b), după sensul bimomentului. Expresia lui este:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_x} y_{\max} + \frac{B_{\max}}{I_\omega} \omega_{\max}.$$

Valoarea momentului de inerție polar echivalent, cu notațiile din figura 17.1, b și valorile din problema 17.1 este:

$$I_d = \frac{1}{3} (2b_1\delta_1^3 + b_2\delta_2^3) = \frac{1}{3} (2 \cdot 9 \cdot 1,13^3 + 17,74 \cdot 0,75^3) = 11,15 \text{ cm}^4.$$

Valoarea lui k din expresia bimomentului B este:

$$k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}} = \sqrt{\frac{0,81 \cdot 10^6 \cdot 11,15}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,225 \cdot 10^4}} = 0,01875 \text{ cm}^{-1}.$$

Valoarea momentului de inerție sectorial a fost calculată la problema 17.3. Bimomentul maxim va fi deci:

$$B_{\max} = \frac{6 \cdot 4,5}{0,01875^2} \left(1 - \frac{1}{\text{ch } 4,68} \right) = \frac{6 \cdot 4,5}{0,01875^2} \left(1 - \frac{1}{53,88} \right) = 75\,500 \text{ daNcm}^2.$$

Momentul încovoietor maxim este:

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{6 \cdot 500^2}{8} = 187\,500 \text{ daN cm}.$$

Momentul de inerție este:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{\delta_2 b_2^3}{12} + 2 \left[\frac{b_1 \delta_1^3}{12} + b_1 \delta_1 \left(\frac{b_2}{2} + \frac{\delta_1}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{0,75 \cdot 17,74^3}{12} + 2 \left[\frac{9 \cdot 1,13^3}{12} + \right. \\ &\quad \left. + 9 \cdot 1,13 \cdot 9,43^2 \right] = 2\,166 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

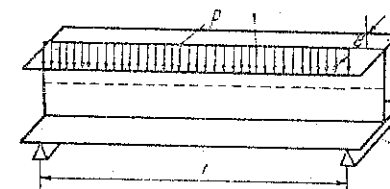


Fig. 17.4

iar modulul de rezistență :

$$W_z = \frac{2166}{10} = 216,6 \text{ cm}^3.$$

Suprafața sector maximă din punctul B (Fig. 17.1, b) este :

$$\omega_{max} = 42,4 \text{ cm}^2,$$

astfel încît efortul unitar normal maxim în punctul B va fi :

$$\sigma_{max} = \frac{187500}{216,6} + \frac{75500}{12250} 42,4 = 875 + 261 = 1136 \text{ daN/cm}^2.$$

17.5. Să se calculeze valoarea eforturilor unitare tangențiale maxime în cazul barei de la problema 17.4.

Rezolvare. Expresia momentului de încovoiere-răsucire M_ω se obține eu relația (17.14) și va fi :

$$M_\omega = \frac{dB}{dx} = -\frac{pe}{k} \frac{\text{sh} k \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\text{ch} \frac{kl}{2}}.$$

Valoarea lui maximă are loc pentru :

$$x = 0 \text{ și } x = l,$$

și este :

$$M_{\omega max} = \frac{pe}{k} \text{th} \frac{kl}{2}.$$

Expresia efortului unitar tangențial este dată de (17.12). Se observă că atît T_z cît și M_ω și M , sînt maxime în apropierea reazemelor.

Punctul în care efortul unitar tangențial rezultant are cea mai mare valoare este punctul A , F sau O (Fig. 17.1, b).

Pentru punctul A sau F se obține :

$$S_z = \frac{\delta_1 b_1}{2} \frac{b_2}{2} = \frac{1,13 \cdot 9}{2} \frac{18,87}{2} = 47,8 \text{ cm}^3,$$

$$S_{\omega max} = 1,13 \frac{18,87 \cdot 9^2}{16} = 107,8 \text{ cm}^4.$$

Lîngă reazeme :

$$T_z = \frac{pl}{2} = \frac{6 \cdot 500}{2} = 1500 \text{ daN},$$

$$M_\omega = \frac{pe}{k} \text{th} \frac{kl}{2} = \frac{6 \cdot 4,5}{0,01872} \text{th} 4,68 = 1440 \text{ daN cm},$$

$$M_z = \frac{pel}{2} - M_\omega = \frac{6 \cdot 4,5 \cdot 500}{2} - 1440 = 5310 \text{ daN cm}.$$

Efortul unitar tangențial total în punctul A este :

$$\tau_A = \frac{1500 \cdot 47,8}{2166 \cdot 1,13} + \frac{1440 \cdot 107,8}{12250 \cdot 1,13} + \frac{5310 \cdot 1,13}{11,15} =$$

$$= 29,3 + 11,2 + 538 = 578 \text{ daN/cm}^2.$$

Se observă că efortul unitar tangențial provine în cea mai mare parte din răsucirea simplă.

Pentru determinarea efortului unitar tangențial în O se calculează mai întîi

$$S_z = \frac{\delta_1 b_1 b_2}{2} + \delta_2 \frac{b_2}{2} \cdot \frac{b_3}{4} = 95,6 + 0,75 \frac{18,87^2}{8} = 129 \text{ cm}^3.$$

Efortul unitar tangențial total va fi în acest punct

$$\tau_o = 538 + \frac{1500 \cdot 129}{2166 \cdot 0,75} = 538 + 119 = 657 \text{ daN/cm}^2.$$

17.6. Să se calculeze poziția centrului de încovoiere, suprafața sector, momentul de inerție sectorial și momentul static sectorial pentru un profil confecționat din tablă de grosime δ dată, ca în figura 17.6, a .

Aplicație numerică: $b = 10 \text{ cm}$; $b_1 = 5 \text{ cm}$; $\delta = 0,5 \text{ cm}$;
 $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Centrul de încovoiere se găsește pe axa de simetrie z . Luînd ca pol arbitrar originea punctul B (intersecția axei z cu profilul), se vor construi diagramele ω_B și y (Fig. 17.6).

Valoarea maximă a lui ω este dublul suprafeței triunghiului BCD și are mărimea $\frac{b_1 b}{2}$.

Aplicind teorema de înmulțire a diagramelor (vezi: Definiții și formule, punctul 9) se obține:

$$\int \omega_B y dA = -\frac{b^2 b_1 \delta}{4}$$

Momentul de inerție are expresia:

$$I_z = \frac{b^3 \delta}{12} + \frac{b^2 b_1 \delta}{2}$$

Coordonata a_z a centrului de încovoiere este:

$$a_z = -\frac{b_1^2 \delta}{2b_1 \delta + \frac{b \delta}{3}}$$

respectiv:

$$a_z = -\frac{b_1^2}{2b_1 + \frac{b}{3}}$$

Se construiește, față de centrul de încovoiere, diagrama suprafeței sector principale, plecând de la axa z ca rază vectorială care trece prin punctul A (Fig. 17.6, c).

Suprafața sector are ca valoare în punctul C dublul suprafeței ABC , respectiv $\omega_c = -a_z \cdot \frac{b}{2}$. În punctul D se va scrie

$$\omega_D = \omega_C + 2 \cdot \text{aria } ACD = \omega_C + \frac{b_1 b}{2} = \frac{b}{2} (b_1 - a_z).$$

Momentul static sectorial are valoarea maximă în punctele F și B unde diagrama suprafețelor sector se anulează. Valoarea momentului static în punctul F este

$$S_{\omega F} = \frac{(b_1 - a_z)^2 b \delta}{4}$$

Fig. 17.6

Momentul static sectorial în punctul C este

$$\frac{b_1 b \delta (b_1 - 2a_z)}{4}$$

Momentul de inerție sectorial principal este:

$$I_{\omega} = \int \omega_A^2 dA = a_z^2 I_z + \frac{b_1 - 3a_z}{6} \delta b_1^2 b^2$$

Aplicație numerică: Momentul de inerție este:

$$I_z = \frac{10^3 \cdot 0,5}{12} + \frac{10^2 \cdot 5 \cdot 0,5}{2} = 166,7 \text{ cm}^4$$

Abscisa centrului de încovoiere este:

$$a_z = -\frac{5^2 \cdot 0,5}{2,5 \cdot 0,5 + \frac{10 \cdot 0,5}{3}} = -1,87 \text{ cm.}$$

Momentul static sectorial $S_{\omega F}$ este:

$$S_{\omega F} = \frac{(5 - 1,87)^2 \cdot 10 \cdot 0,5}{4} = 12,25 \text{ cm}^4.$$

Momentul de inerție sectorial principal:

$$I_{\omega} = 1,87^2 \cdot 166,7 + \frac{5 - 3 \cdot 1,87}{6} \cdot 0,5 \cdot 5^2 \cdot 10^2 = 457 \text{ cm}^6.$$

17.7. Să se calculeze valoarea eforturilor unitare normale maxime pentru bara cu pereți subțiri, în consolă, solicitată ca în figura 17.7. Secțiunea transversală a barei este cea din problema 17.6 (v. Fig. 17.6, a și Fig. 17.7).

Aplicație numerică: $l = 2 \text{ m}$; $p = 20 \text{ daN/m}$; $e_1 = 2 \text{ cm}$.

Rezolvare.

Spre a se calcula expresia bi-momentului în lungul barei se folosește relația (17.23).

Rămâne să se determine parametrii φ_0 , φ'_0 , B_0 și M_{x_0} în funcție de condițiile la limită.

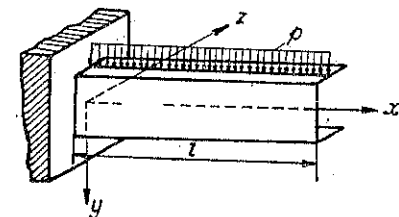


Fig. 17.7

Se observă că dacă se ia ca origine încastrarea, avem $\varphi_0 = 0$ și $\varphi'_0 = 0$. Conform relațiilor (17.24) și (17.23) se obține:

$$M_x = \int_0^x m(t) dt,$$

$$B_x = M_{x0} \frac{\text{sh } kx}{k} + B_0 \text{ch } kx + \frac{1}{k} \int_0^x \text{sh } k(x-t) m(t) dt.$$

Pentru a se determina constanta B_0 se va scrie că secțiunea de capăt este liberă să se deplaneze astfel încît $B_l = 0$.

Observînd că

$$M_{x0} = ple$$

se obține succesiv

$$B_l = ple \frac{\text{sh } kl}{k} + B_0 \text{ch } kl + \frac{1}{k} \int_0^l \text{sh } k(l-t) m(t) dt = 0,$$

$$B_l = ple \frac{\text{sh } kl}{k} + B_0 \text{ch } kl + \frac{pe}{k^2} (1 - \text{ch } kl) = 0,$$

$$B_0 = \frac{pe}{k^2} \left(1 - \frac{1}{\text{ch } kl} - kl \frac{\text{sh } kl}{\text{ch } kl} \right).$$

Bimomentul va avea expresia:

$$B_x = pel \frac{\text{sh } kx}{k} + \frac{pe}{k^2} \left(1 - \frac{1}{\text{ch } kl} - kl \frac{\text{sh } kl}{\text{ch } kl} \right) \text{ch } kx + \frac{pe}{k^2} (1 - \text{ch } kx),$$

și deoarece $\text{sh } kl \text{ch } kx - \text{sh } kx \text{ch } kl = \text{sh } k(l-x)$ se obține:

$$B_x = - \frac{pe}{k^2 \text{ch } kl} [kl \text{sh } k(l-x) - \text{ch } kl + \text{ch } kx]. \quad (a)$$

Valoarea maximă a lui B_x se obține pentru $x = 0$ și este

$$B_0 = \frac{pe}{k^2 \text{ch } kl} (\text{ch } kl - kl \text{sh } kl - 1).$$

Momentul încovoietor maxim este în încastrare și are valoarea:

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{2}.$$

Efortul unitar maxim este în secțiunea din încastrare în fibră extremă în punctul în care ω are valoarea maximă și are același semn ca și cel datorit momentului încovoietor:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_x} y_{\max} + \frac{B_{\max}}{I_{\omega}} \omega_{\max}.$$

Momentul de inerție I_a este:

$$I_a = \frac{1}{3} \sum b_i \delta_i^3 = \frac{1}{3} (2 \cdot 5 + 10) 0,5^3 = 0,833 \text{ cm}^4.$$

Expresia lui k este:

$$k = \sqrt{\frac{0,81 \cdot 10^6 \cdot 0,833}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 457}} = 0,0266 \text{ cm}^{-1}.$$

Valoarea maximă a suprafeței sector este în punctul D :

$$\omega_{\max} = \frac{b}{2} (b_1 - a_2) = \frac{10}{2} (5 - 1,87) = 15,65 \text{ cm}^2.$$

Valoarea maximă a bimomentului este:

$$B_0 = \frac{-0,2 \cdot 3,87}{0,0266^2 \cdot 102,2} (102,2 - 5,32 \cdot 102,2 - 1) = 4736 \text{ daN cm}^2,$$

unde

$$e = a_2 + e_1 = 1,87 + 2 = 3,87 \text{ cm}$$

(v. fig. 17.6, a).

Momentul încovoietor maxim este:

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{2} = \frac{0,2 \cdot 200^2}{2} = 4000 \text{ daN cm}.$$

Efortul unitar maxim se găsește în punctul D și are valoarea:

$$\sigma_{\max} = \frac{4000}{166,7} 5 + \frac{4736}{457} 15,65 = 120 + 162 = 282 \text{ daN/cm}^2.$$

17.8. Să se calculeze valoarea eforturilor unitare tangențiale maxime în cazul problemei 17.7.

Rezolvare.

Eforturile unitare tangențiale se determină cu relația (17.12).

Momentul total de răsucire este maxim în încastrare, unde are valoarea :

$$M_x = pel.$$

Acest moment însă reprezintă suma între momentul de încovoiere-răsucire și momentul de răsucire din secțiune.

Momentul de încovoiere-răsucire se obține prin derivarea relației (a) de la problema 17.7

$$M_{\omega x} = \frac{dB_x}{dx} = \frac{pe}{k \operatorname{ch} kl} [kl \operatorname{ch} k(l-x) - \operatorname{sh} kx].$$

După cum se observă, în încastrare se obține

$$M_{\omega max} = pel,$$

și deoarece

$$M_x = M_{\omega} + M_t,$$

rezultă că în încastrare momentul de răsucire propriu-zis este nul și momentul de răsucire al sarcinilor exterioare este preluat de momentul de încovoiere-răsucire.

Deoarece I_d este mic, rezultă că răsucirea este cea care produce cele mai mari eforturi unitare tangențiale. Pentru aceasta se va determina valoarea maximă a lui M_t .

Pentru o secțiune oarecare la distanța x de încastrare, momentul de răsucire pură este :

$$M_{tx} = M_x - M_{\omega x}.$$

Momentul de răsucire al forțelor exterioare aplicate M_x este :

$$M_x = pe(l-x).$$

Înlocuind pe M_x și $M_{\omega x}$ se obține :

$$M_{tx} = pe(l-x) - \frac{pe}{k \operatorname{ch} kl} [kl \operatorname{ch} k(l-x) - \operatorname{sh} kx].$$

Valoarea maximă a lui M_{tx} se obține anulând derivata :

$$\frac{dM_{tx}}{dx} = -pe - \frac{pe}{k \operatorname{ch} kl} [-k^2 l \operatorname{sh} k(l-x) - k \operatorname{ch} kx] = 0,$$

sau :

$$-pe + \frac{pe}{\operatorname{ch} kl} [kl \operatorname{sh} k(l-x) + \operatorname{ch} kx] = 0.$$

Deoarece :

$$\operatorname{sh} k(l-x) = \operatorname{sh} kl \operatorname{ch} kx - \operatorname{ch} kl \operatorname{sh} kx,$$

se obține :

$$-\operatorname{sh} kx + \frac{kl \operatorname{sh} kl + 1}{kl \operatorname{ch} kl} \operatorname{ch} kx = \frac{1}{kl}.$$

Trecind termenul $\operatorname{sh} kx$ în partea dreaptă, ridicând ecuația la pătrat și înlocuind cosinusul hiperbolic în funcție de sinusul hiperbolic din relația :

$$\operatorname{ch}^2 kx = 1 + \operatorname{sh}^2 kx,$$

se obține :

$$\left[1 - \frac{(kl \operatorname{sh} kl + 1)^2}{(kl \operatorname{ch} kl)^2} \right] \operatorname{sh}^2 kx + \frac{2}{kl} \operatorname{sh} kx + \frac{1}{k^2 l^2} - \frac{(kl \operatorname{sh} kl + 1)^2}{(kl \operatorname{ch} kl)^2} = 0,$$

$$\operatorname{sh}^2 kx + 2 \frac{1}{kl \left[1 - \frac{(kl \operatorname{sh} kl + 1)^2}{(kl \operatorname{ch} kl)^2} \right]} \operatorname{sh} kx + \frac{1}{k^2 l^2} - \frac{\left(\frac{kl \operatorname{sh} kl + 1}{kl \operatorname{ch} kl} \right)^2}{1 - \left(\frac{kl \operatorname{sh} kl + 1}{kl \operatorname{ch} kl} \right)^2} = 0.$$

Numeric, pentru cazul considerat, această ecuație devine :

$$\operatorname{sh}^2 kx - 2 \frac{1}{5,32 \left[1 - \left(\frac{5,32 \operatorname{sh} 5,32 + 1}{5,32 \operatorname{ch} 5,32} \right)^2 \right]} \operatorname{sh} kx - \frac{\frac{1}{5,32^2} - \left[\frac{5,32 \operatorname{sh} 5,32 + 1}{5,32 \operatorname{ch} 5,32} \right]^2}{1 - \left[\frac{5,32 \operatorname{sh} 5,32 + 1}{5,32 \operatorname{ch} 5,32} \right]^2} = 0,$$

unde :

$$kl = 0,0266 \cdot 200 = 5,32$$

sau, efectuând calculele :

$$\operatorname{sh}^2 kx + 2 \cdot 51 \operatorname{sh} kx - 315 = 0.$$

de unde :

$$\operatorname{sh} kx = -51 \pm \sqrt{51^2 + 315} = 3,$$

unde se va lua numai soluția pozitivă care este posibilă.

De aici rezultă :

$$kx' = 1,818.$$

Secțiunea în care momentul de răsucire este maxim se găsește la distanța :

$$x' = \frac{1,818}{0,0266} = 68,3 \text{ cm.}$$

Înlocuind valorile obținute, rezultă :

$$M_{t \max} = 0,2 \cdot 3,87 \cdot (200 - 68,3) - \frac{0,2 \cdot 3,87}{0,0266 \operatorname{ch} 5,32} [5,32 \operatorname{ch} 0,0266(200 - 68,3) - \operatorname{sh} 0,0266 \cdot 68,3].$$

Efectuând calculele, se obține :

$$M_{t \max} = 78 \text{ daN cm.}$$

Pentru aceeași secțiune, momentul de răsucire al sarcinilor exterioare este :

$$M_x = 0,2 \cdot 3,87(200 - 68,3) = 102 \text{ daN cm,}$$

iar momentul de încovoiere-răsucire este :

$$M_{\omega} = 102 - 78 = 24 \text{ daN cm.}$$

În secțiunea considerată, în punctul F , eforturile unitare tangențiale sînt :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{26,3 \cdot 7,825}{166,7 \cdot 0,5} + \frac{24 \cdot 12,25}{457 \cdot 0,5} + \frac{78 \cdot 0,5}{0,833} = \\ &= 2,5 + 1,29 + 46,8 = 50,6 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned}$$

În această relație, momentul static al porțiunii FD este :

$$S = 3,13 \cdot 5 \cdot 0,5 = 7,825 \text{ cm}^3.$$

Forța tăietoare în secțiune este :

$$T_z = p(l - x') = 0,2 \cdot 131,7 = 26,3 \text{ daN.}$$

17.9. Să se calculeze poziția centrului de forfecare pentru secțiunea din figura 17.9, a .

Aplicație numerică: $b_1 = 10 \text{ cm}$; $b_2 = 5 \text{ cm}$; $b_3 = 3 \text{ cm}$; $\delta = 0,2 \text{ cm}$.

Rezolvare. Se alege ca origine pentru raza polară punctul O de pe axa de simetrie, ca în figura 17.9, b . Față de acest punct se calculează suprafața sector ω_0 . Valorile care se obțin sînt trecute în diagrama ω_0 din figura 17.9, b .

Pentru calculul poziției centrului de forfecare se va utiliza relația (17.8). Diagrama y este dată de asemenea în figura 17.9, b . Integrala care intervine se va calcula cu ajutorul metodei lui Veresceaghin. Se va obține astfel :

$$\begin{aligned} \int \omega_0 y dA &= -2 \frac{b_1}{2} \frac{b_2}{2} \frac{b_1}{2} \frac{b_2}{2} \delta - \\ &- 2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{b_1}{2} b_2 + \frac{b_1}{2} b_2 - b_2 b_3 \right) b_3 \left(\frac{b_1}{2} + \frac{-2}{2} \frac{b_2}{2} - \frac{b_2 b_3}{2} b_3 \right) \right\}, \end{aligned}$$

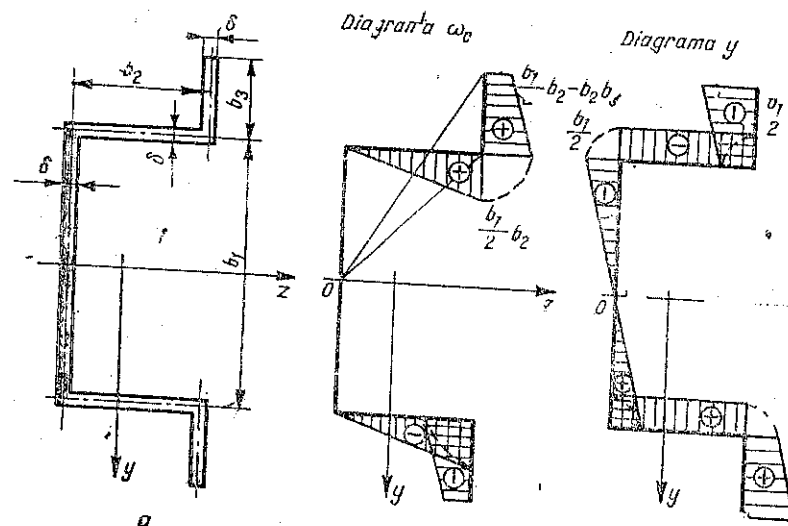


Fig. 17.9

sau după simplificări :

$$\int \omega_0 y dA = - \left[\frac{b_1^2 b_2^2}{4} \delta + b_2 b_3 \left(\frac{b_1^2}{2} - \frac{2}{3} b_3^2 \right) \delta \right].$$

Momentul de inerție va fi :

$$I_z = \frac{\delta b_1^3}{12} + 2b_2 \delta \left(\frac{b_1}{2} \right)^2 + 2 \left[\frac{\delta b_3^3}{12} + \delta b_3 \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_3}{2} \right)^2 \right],$$

sau, după câteva simplificări :

$$I_z = \frac{\delta b_1^3}{12} + \frac{b_1^2 b_2}{2} \delta + \frac{2}{3} b_3^3 \delta + \frac{b_1^2 b_3}{2} \delta + b_1 b_3^2 \delta,$$

astfel încît poziția centrului de incovoiere devine :

$$a_z = - \frac{\frac{b_1^2 b_2^2}{4} + b_2 b_3 \left(\frac{b_1^2}{2} - \frac{2}{3} b_3^2 \right)}{\frac{b_1^3}{12} + \frac{b_1^2 b_2}{2} + \frac{2}{3} b_3^3 + b_1 b_3 \left(\frac{b_1}{2} + b_3 \right)}$$

Numeric se obține :

$$a_z = - \frac{\frac{10^2 \cdot 5^2}{4} + 5 \cdot 3 \left(\frac{10^2}{2} - \frac{2}{3} 3^2 \right)}{\frac{10^3}{12} + \frac{10^2 \cdot 5}{2} + \frac{2}{3} 3^3 + 10 \cdot 3 \left(\frac{10}{2} + 3 \right)} = -2,17 \text{ cm.}$$

17.10. Să se calculeze repartitia eforturilor unitare normale suplimentare, produse datorită răsucirii impiedicate în cazul aplicației numerice de la problema 17.9, știind că :

$$\frac{B}{I_\omega} = 10 \text{ daN/cm}^4.$$

Rezolvare. Se trasează suprafața sector față de centrul de forfecare determinat la problema precedentă, după regula cunoscută. Se obține astfel suprafața sector din figura 17.10.

Efortul unitar normal suplimentar produs ca urmare a răsucirii impiedicate corespunde ultimului termen al expresiei (17.11) și se obține înmulțind valorile rezultate pentru suprafața sector determinată față de centrul

de forfecare, cu $\frac{B}{I_\omega}$. Se observă deci că valoarea maximă a acestui efort unitar suplimentar se găsește în punctele B și B' și are valoarea :

$$\sigma = 10 \cdot 14,15 = 141,5 \text{ daN/cm}^2.$$

17.11. Să se calculeze poziția centrului de incovoiere și momentul de inerție sectorial în cazul secțiunii din figura 17.11.

Aplicație numerică. Profilul I este cel din cazul problemei 17.1, iar profilul U este cel din cazul problemei 17.6.

Rezolvare. Pentru aflarea poziției centrului de incovoiere se face suma produselor momentelor de inerție față de axa de simetrie prin coordonata

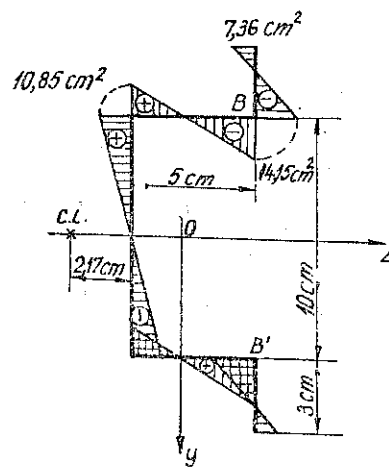


Fig. 17.10

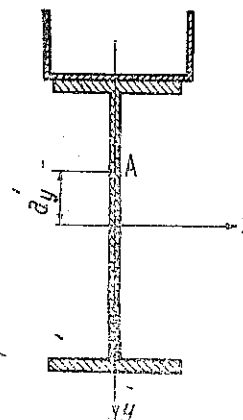


Fig. 17.11

centrului de incovoiere al fiecărui element în parte, luată față de cealaltă axă arbitrar aleasă.

Dacă se notează mărimile privitoare la profilul I cu indicele 1 și cele privitoare la profilul U cu indicele 2 se obține :

$$a_y = \frac{I_{y1} \cdot 0 + I_{y2} a_{y2}}{I_{y1} + I_{y2}} = \frac{166,7 \cdot (10 - 1,87)}{138 + 166,7} = 4,43 \text{ cm.}$$

Pentru a se afla momentul de inerție sectorial rezultat, se utilizează relația (17.26).

În cazul considerat se obține :

$$I_\omega = \frac{I_{y1} \cdot I_{y2} a_{y2}^2}{I_{y1} + I_{y2}} + I_{\omega 1} + I_{\omega 2} = \frac{138 \cdot 166,7 \cdot (10 - 1,87)^2}{138 + 166,7} + 12 \, 250 + 457 = 13 \, 321 \text{ cm}^6.$$

17.12. Să se calculeze poziția centrului de încovoiere și momentul de inerție sectorial în cazul secțiunii din figura 17.12.

Aplicație numerică. Profilul este I 24, iar platbanda are dimensiunile 120×10 .

Rezolvare. Deoarece nu există încă tabele cu momentele de inerție sectoriale proprii ale profilelor standardizate în țara noastră, calculul se va face aproximativ, presupunând atît grosimea inimii cît și aceea a tălpilor constante.

Pentru calculul momentului de inerție sectorial al profilului se va presupune profilul compus din trei dreptunghiuri. După metoda indicată de relația (17.26), avem :

$$I_{\omega} = \frac{I_{y1}I_{y2}a_{y12}^2 + I_{y1}I_{y3}a_{y13}^2 + I_{y2}I_{y3}a_{y23}^2}{I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}} + I_{\omega1} + I_{\omega2} + I_{\omega3}.$$

Cu datele profilului se obține :

$$I_{y1} = \frac{(b_1 - 2\delta_2)\delta_1^3}{12} = \frac{(24 - 2 \cdot 1,31) \cdot 0,87^3}{12} = 1,17 \text{ cm}^4;$$

$$I_{y2} = I_{y3} = \frac{\delta_2 b_2^3}{12} = \frac{1,31 \cdot 10,6^3}{12} = 130 \text{ cm}^4;$$

$$I_{\omega1} = I_{\omega2} = I_{\omega3} = 0,$$

iar momentul de inerție sectorial al profilului I este :

$$I_{\omega} = \frac{1,17 \cdot 130(12 - 1,3)^2 + 1,17 \cdot 130(12 - 1,3)^2 + 130^2(24 - 2,6)^2}{2 \cdot 130 + 1,17},$$

$$I_{\omega} = \frac{2 \cdot 17\,415 + 7\,740\,200}{261,17} = 29\,700 \text{ cm}^6.$$

Momentul de inerție al platbandei față de axa y este

$$I_{yp} = \frac{\delta b^3}{12} = \frac{1 \cdot 12^3}{12} = 144 \text{ cm}^4.$$

Ordonata centrului de încovoiere este :

$$a_y = -\frac{I_{yp}a_{yp}}{I_y + I_{yp}} = -\frac{144 \cdot 12,5}{221 + 144} = -4,93 \text{ cm},$$

unde $I_y = 221 \text{ cm}^4$, este valoare obținută din tabele.

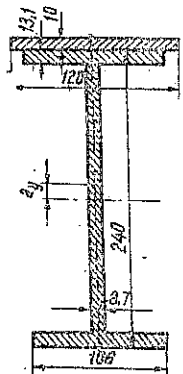


Fig. 17.12

Momentul de inerție sectorial al întregii secțiuni este :

$$I_{\omega t} = \frac{I_y I_{yp} a_{yp}^2}{I_y + I_{yp}} + I_{\omega} + I_{\omega p},$$

$$I_{\omega t} = \frac{221 \cdot 144(12 + 0,5)^2}{221 + 144} + 29\,700 + 0 = 13\,897 + 29\,700 + 0 = 43\,597 \text{ cm}^6.$$

17.13. Să se determine poziția centrului de forfecare și variația eforturilor unitare tangențiale pe secțiunea unei bare tubulare, tăiată după o generatoare. Secțiunea barei este inelară și grosimea peretelui δ este mică în comparație cu raza medie a acesteia. Bara este solicitată la încovoiere (Fig. 17.13).

Aplicație numerică. $T = 5\,000 \text{ daN}$; $\delta = 0,5 \text{ cm}$; $r = 10 \text{ cm}$.

Rezolvare. Ca axă de referință se va lua axa de simetrie z a secțiunii. Centrul de încovoiere se va găsi pe această axă.

Se va lua inițial ca centru de coordonate, centrul secțiunii. Poziția centrului de încovoiere se determină folosind relația (17.8). Suprafața sector corespunzătoare unui punct oarecare C definit prin unghiul φ este :

$$\omega_B = \int_0^{\varphi} r \cdot r d\psi = r^2 \varphi.$$

Momentul de inerție al secțiunii între punctele C și C' este :

$$\int_{-\varphi}^{+\varphi} \delta \cdot r d\psi r^2 \sin^2 \psi = 2 \frac{r^3 \delta}{2} \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]. \quad (1)$$

Numărătorul expresiei (17.8) este :

$$\int_{-\varphi}^{+\varphi} \omega_B y dA = \int_{-\varphi}^{+\varphi} r^2 \psi \cdot r \sin \psi \delta r d\psi.$$

Integrând se obține :

$$\int_{-\varphi}^{+\varphi} \omega_B y dA = 2r^4 \delta (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi).$$

Abscisa centrului de încovoiere devine :

$$a_z = \frac{\int \omega_B y dA}{I_z} = \frac{2r^4 \delta (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}{2 \frac{r^3 \delta}{2} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)}.$$

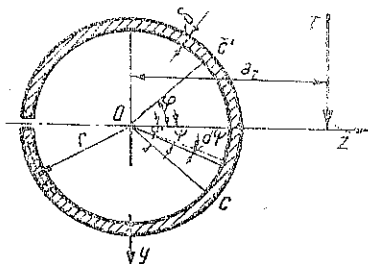


Fig. 17.13

Simplificând se obține :

$$a_z = 2r \frac{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}{\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}} \quad (2)$$

Deoarece forța trebuie să fie aplicată în centrul de încovoiere, spre a avea încovoiere pură, avem $M_o = 0$. Eforturile unitare tangențiale se calculează după relația

$$\tau = \frac{T_y S_z}{I_z \delta}$$

Momentul static este :

$$S_z = \int_{\varphi}^{\psi} y \, dA = \int_{\varphi}^{\psi} r \sin \psi \, r \delta \, d\psi,$$

$$S_z = r^2 \delta \int_{\varphi}^{\psi} \sin \psi \, d\psi = r^2 \delta (\cos \varphi - \cos \psi).$$

Eforturile unitare tangențiale în punctul determinat de ψ vor fi

$$\tau = \frac{T_y}{\delta} \frac{r^2 \delta (\cos \varphi - \cos \psi)}{2 \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)} = \frac{T_y}{r \delta} \frac{\cos \varphi - \cos \psi}{\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}}$$

Se observă că valoarea obținută τ este maximă dacă $\psi = 0$.

În cazul considerat $\varphi = \pi$ și se obține :

$$a_z = 2r.$$

Expresia eforturilor unitare tangențiale devine :

$$\tau = \frac{T_y}{r \delta \pi} (-1 - \cos \psi).$$

Valoarea maximă pentru τ este :

$$\tau_{max} = \frac{2T_y}{\pi r \delta}.$$

Aplicație numerică.

$$a_z = 20 \text{ cm.}$$

$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot 5000}{\pi \cdot 10 \cdot 0,5} = 637 \text{ daN/cm}^2.$$

17.14. Să se calculeze deplanarea secțiunilor de la capetele unei bare tubulare, tăiată după o generatoare, dacă aceste secțiuni sînt libere și se rotesc una față de alta cu un unghi φ' . Tubul are secțiunea circulară.

Aplicație numerică. $R = 20 \text{ cm}$, $\delta = 0,6 \text{ cm}$, $\varphi' = 4^\circ/\text{m}$.

Rezolvare. Din relația (17.10) se observă că deplanarea este proporțională cu suprafața sector și cu rotirea specifică a secțiunii.

Pentru cazul considerat, suprafața sector luată față de centrul de încovoiere este : $\omega_A = \int r_1 R d\varphi$, unde r_1 reprezintă distanța de la tangenta arcului $R d\psi$ pînă în centrul de încovoiere :

$$r_1 = R - a_z \cos \psi.$$

Suprafața sector într-un punct oarecare este :

$$\omega = \int_0^{\psi} (R^2 - R a_z \cos \psi) d\psi$$

sau integrînd :

$$\omega = R(R\psi - a_z \sin \psi).$$

Deplanarea este maximă pentru $\psi = \varphi$, respectiv la capetele profilului.

Deplasarea unei margini a profilului față de cealaltă se obține în cazul considerat luînd $\varphi = \pi$:

$$\Delta u_{max} = 2R^2 \pi \varphi'.$$

Aplicație numerică.

$$\Delta u_{max} = 2 \cdot 20^2 \pi \frac{4}{100 \cdot 57,3} = 1,76 \text{ cm, în care } 1 \text{ rad} = 57,3^\circ.$$

17.15. Să se determine eforturile unitare normale la bara de grosime δ constantă, avînd forma unui semicerc (Fig. 17.15, b). Bara este încastrată la un capăt și este solicitată cu o forță P așezată ca în figura 17.15, a la celălalt capăt.

Aplicație numerică : $l = 2 \text{ m}$, $P = 20 \text{ daN}$, $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$, $R = 10 \text{ cm}$, $\delta = 0,2 \text{ cm}$.

Rezolvare. Utilizînd relația (2) obținută la problema 17.13 centrul de încovoiere are abscisa :

$$a_z = 2R \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{\pi}.$$

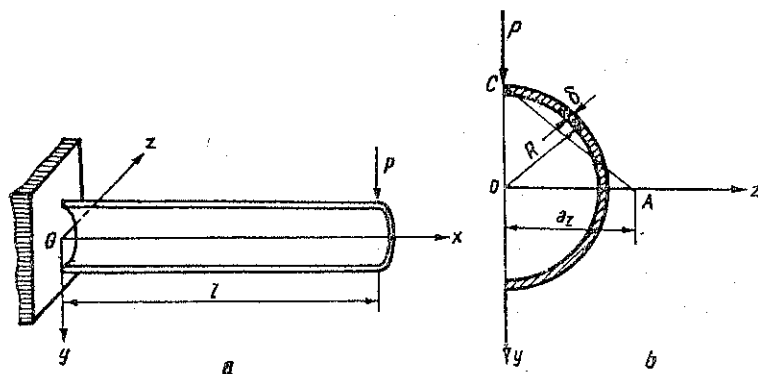


Fig. 17.14

Momentul de inerție se obține utilizând relația (1) de la problema 17.13 :

$$I_z = \frac{R^3 \delta \pi}{2}.$$

Pentru determinarea expresiei bimomentului se observă că $\varphi_0 = 0$, $\varphi'_0 = 0$, deoarece secțiunea este încastrată. Tot astfel, pentru $x = l$, $B_x = 0$ și $M_{x1} = Pa_z$, deoarece forța, nelucrând în centrul de încovoiere, produce și acest moment de răsucire.

Din ultima condiție se obține :

$$B_1 = M_{x0} \frac{\text{sh } kl}{k} + B_0 \text{ch } kl = 0.$$

Deoarece :

$$M_{x0} = M_{x1} = Pa_z$$

se obține :

$$B_0 = - \frac{Pa_z}{k} \frac{\text{sh } kl}{\text{ch } kl},$$

iar expresia bimomentului devine :

$$B_x = - Pa_z \frac{\text{sh } k(l-x)}{k \text{ch } kl}.$$

Valoarea maximă a lui B_x se obține pentru $x = 0$ și este :

$$B_{x \max} = - \frac{Pa_z}{k} \text{th } kl.$$

Momentul de inerție sectorial este :

$$I_\omega = \int \omega^2 dA = \int_{-\varphi}^{+\varphi} R^2 (R\psi - a_z \sin \psi)^2 R \delta d\psi,$$

$$I_\omega = R^3 \delta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^2 \psi^2 + a_z^2 \sin^2 \psi - 2Ra_z \psi \sin \psi) d\psi,$$

$$I_\omega = R^3 \delta \left[\frac{R^2 \pi^3}{8 \cdot 3} + \frac{R^2 \pi^3}{8 \cdot 3} + a_z^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - 2Ra_z \cdot 2 \right],$$

$$I_\omega = 2R^3 \delta \left[\frac{R^2 \pi^3}{24} + \frac{a_z^2 \pi}{4} - 2Ra_z \right].$$

Înlocuind pe a_z cu valoarea lui, se obține :

$$I_\omega = 2R^3 \delta \left[\frac{R^2 \pi^3}{24} + \frac{16R^2 \pi}{4\pi^2} - \frac{2R \cdot 4R}{\pi} \right],$$

de unde :

$$I_\omega = 2R^3 \delta \left(\frac{\pi^3}{24} - \frac{4}{\pi} \right).$$

Momentul de inerție I_a are valoarea :

$$I_a = \frac{\pi R \delta^3}{3}.$$

Cu datele numerice din cazul problemei se obține :

$$I_z = \frac{10^3 \cdot 0,2 \cdot \pi}{2} = 314 \text{ cm}^4,$$

$$I_a = \frac{\pi \cdot 10}{3} \cdot 0,2^3 = 0,0838 \text{ cm}^4,$$

$$k = \sqrt{\frac{GI_a}{EI_\omega}} = \sqrt{\frac{0,81 \cdot 10^6 \cdot 0,0838}{2,1 \cdot 745 \cdot 10^6}} = 0,00658 \text{ cm}^{-1},$$

unde

$$I_\omega = 2 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \left(\frac{\pi^3}{24} - \frac{4}{\pi} \right) = 745 \text{ cm}^6.$$

Poziția centrului de incovoiere

$$a_z = \frac{4R}{\pi} = \frac{40}{\pi} = 12,73 \text{ cm.}$$

Valoarea maximă a bimomentului este

$$B_{x \max} = - \frac{20 \cdot 12,73}{0,00658} \cdot 0,877 = - 33 \ 900 \text{ daN cm}^2,$$

deoarece $th \cdot kl = 0,877$.

Efortul unitar normal în punctul C este

$$\sigma = \frac{20 \cdot 200 \cdot 10}{314} + \frac{33 \ 900}{745} \cdot 29,8 = 127,5 + 1 \ 360 \cong 1 \ 490 \text{ daN/cm}^2,$$

unde

$$\omega = R \left(R\psi - \frac{4R}{\pi} \sin \psi \right),$$

$$\omega = 10 \left(10 \frac{\pi}{2} - \frac{40}{\pi} \right) = 29,8 \text{ cm}^2.$$

Urmează să se verifice și eforturile unitare tangențiale. Deoarece cele mai mari eforturi unitare tangențiale provin la barele deschise cu pereți subțiri, din cauza răsucirii, se va face calculul numai la răsucire:

$$\tau = \frac{M_t \delta}{I_d} = \frac{20 \cdot 12,73 \cdot 0,2}{0,0838} = 608 \text{ daN/cm}^2.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

17.16. Să se arate cum se pot deduce regulile de determinare a centrului de incovoiere și a momentelor de inerție sectoriale aflate în problema 17.11 din metodele generale date la punctele 4 și 9.

17.17. Să se calculeze poziția centrului de forfecare determinat în problema 17.9 prin metoda indicată la punctul 10.

SOLICITĂRI ÎN STADIUL PLASTIC

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Plasticitatea este proprietatea materialelor de a lua, sub acțiunea anumitor sarcini, deformații permanente. Calculul în domeniul de deformare plastică se bazează pe faptul că uneori pot apărea deformații permanente în secțiunea cea mai solicitată, fără ca piesa să fie, prin aceasta, distrusă sau inutilizabilă.

2. Dacă deformațiile plastice cresc foarte mult, se ajunge la o *sarcină limită*, a cărei depășire poate duce la distrugerea piesei. Sarcina admisibilă se află împărțind sarcina limită printr-un coeficient de siguranță. Trebuie remarcat că, deși calculele se efectuează în domeniul de deformare plastică, *sarcina admisibilă produce eforturi unitare care sînt, în general, sub limita de curgere*, piesa respectivă lucrînd, în realitate, în regim de deformare elastică.

Metoda de calcul prin care se determină sarcina admisibilă, pornind de la sarcina limită, se numește *metoda capacității portante* sau *metoda de calcul la rupere*.

3. Legătura dintre eforturile unitare și deformații, în stadiul plastic, la starea liniară de eforturi unitare, se exprimă prin schematizarea curbei caracteristice a materialelor la întindere sau compresiune simplă.

Diagramele schematizate cuprind două porțiuni:

— sub limita de curgere ($\varepsilon < \varepsilon_c$) diagrama este liniară, respectînd ecuația $\sigma = E\varepsilon$;

— peste limita de curgere ($\varepsilon > \varepsilon_c$), curba caracteristică se poate schematiza astfel:

a) O linie dreaptă (Fig. 18. a) înclinată, față de axa ε , cu unghiul β . Se definește $\tan \beta = E_p$, ca fiind *modulul de plasticitate al materialului*.

b) O linie orizontală (Fig. 18. b), $\sigma = \sigma_c$, la care se admite că zona de curgere este nelimitată, deci efortul unitar rămîne constant. Aceasta reprezintă un *material ideal plastic sau cu modul de plasticitate nul* ($E_p = 0$).

4. În cazul unei grinzi cu secțiunea avînd două axe de simetrie, făcută din material ideal plastic, dacă s-a depășit în

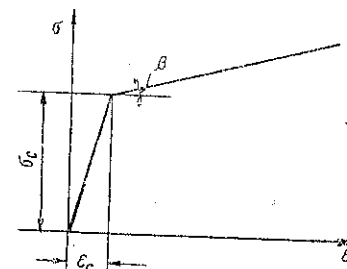


Fig. 18. a

porțiunile extreme limita de curgere, eforturile unitare variază pe secțiune ca în figura 18. c. Momentul încovoietor corespunzător acestei solicitări este dat de relația:

$$M = \sigma_c(W_e + S_p), \quad (18.1)$$

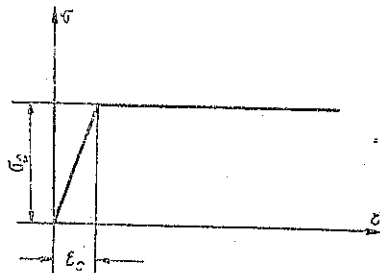


Fig. 18.b

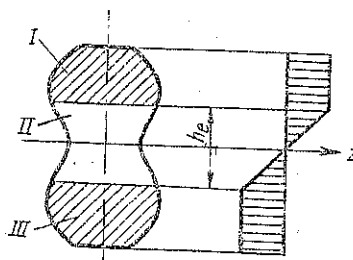


Fig. 18.c

unde

$$W_e = \frac{I_e}{\frac{h_e}{2}}, \quad (18.2)$$

I_e — este momentul de inerție al părții de secțiune solicitate elastic (porțiunea II în Fig. 18. c);

h_e — înălțimea acestei porțiuni;

S_p — dublul momentului static al uneia din cele două porțiuni identice (I și III) solicitate în stadiul plastic (Fig. 18. c).

5. Dacă M crește, se mărește partea din secțiune solicitată plastic și scade, corespunzător, cea solicitată elastic. Înălțimea părții solicitate elastic poate să scadă atât de mult încât să ajungă sub 1/200 din înălțimea secțiunii barei. În acest caz se poate neglija partea solicitată elastic, considerând $h_e = 0$, diagrama de eforturi unitare fiind cea din figura 18. d. Secțiunea barei aflate în această stare de solicitare limită se numește *articulație plastică*. Momentul încovoietor limită pe care îl poate suporta o bară cu articulație plastică este dat de relația (18.1), înlocuind $W_e = 0$:

$$M_{lim} = \sigma_c \cdot S_p, \quad (18.3)$$

S_p fiind aici dublul momentului static al unei jumătăți de secțiune, în raport cu axa z .

6. În cazul unei bare cu secțiune avînd o singură axă de simetrie (Fig. 18. e),

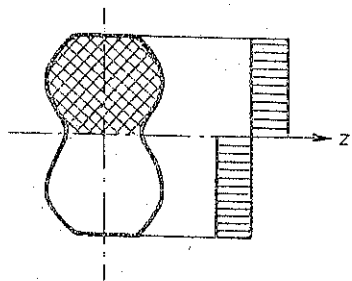


Fig. 18.d

solicitată elasto-plastic, axa neutră își schimbă poziția, deplasîndu-se — în funcție de mărimea solicitării — din centrul de greutate, pînă (la limită) în poziția în care împarte secțiunea în două arii egale

$$A_I = A_{II}. \quad (18.4)$$

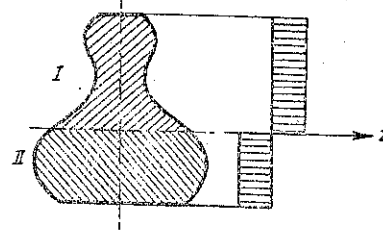


Fig. 18.e

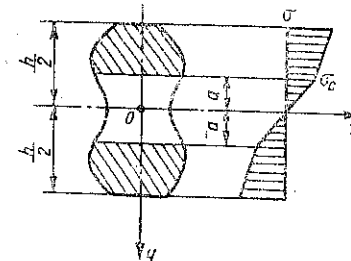


Fig. 18.f

Momentul încovoietor limită corespunzător articulației plastice (Fig. 18. e) este dat de relația

$$M_{lim} = \sigma_c(S_I + S_{II}), \quad (18.5)$$

unde S_I și S_{II} sînt valorile absolute ale momentelor statice ale ariilor I și II, față de axa neutră, a cărei poziție se determină cu relația (18.4).

7. Cînd schematizarea curbei caracteristice a unui material se face ca în figura 18. a ($E_p \neq 0$), pentru o grindă avînd secțiunea cu două axe de simetrie, dacă s-a depășit în porțiunile extreme limita de curgere, eforturile unitare variază pe secțiune ca în figura 18. f. Momentul încovoietor corespunzător acestei solicitări este dat de relația:

$$M = \sigma_c W_e + 2 \int_a^{\frac{h}{2}} \sigma_c \left[1 + \frac{E_p}{E} \left(\frac{y}{a} - 1 \right) \right] y dA, \quad (18.6)$$

unde W_e este definit prin relația (18.2), iar $a = \frac{h_e}{2}$.

8. Dacă se aplică asupra unei bare un cuplu M , care produce într-o secțiune o solicitare elasto-plastică și apoi se îndepărtează cuplul aplicat, zona elastică interioară nu se descarcă complet, fiind împiedată de fibrele exterioare ale barei, care au suferit deformații permanente. Prin interacțiunea zonelor elastică și plastică, apar în bară eforturi unitare remanente. Mărimea și sensul acestora se pot calcula, considerînd că asupra barei se aplică un cuplu de descărcare egal cu M , dar de sens invers, sub acțiunea căruia materialul se comportă perfect elastic. Însușind algebric, în fiecare punct, eforturile unitare datorite cuplului activ și celui de descărcare, se obțin eforturile unitare remanente.

9. În cazul unei bare cu secțiune circulară făcută din material ideal plastic (modulul de plasticitate transversal $G_p = 0$), eforturile unitare variază pe secțiune ca în figura 18. g. Momentul de răsucire corespunzător acestei solicitări este dat de relația:

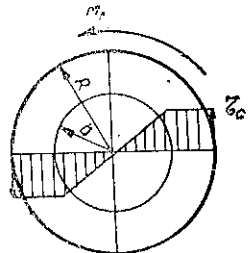


Fig. 18. g

$$M_t = 2\pi \cdot \tau_c \left(\frac{R^3}{3} - \frac{a^3}{12} \right), \quad (18.7)$$

unde

R este raza secțiunii circulare;

a — raza miezului secțiunii solicitată elastic.

B. PROBLEME REZOLVATE

13.1. Care este momentul încovoietor capabil al unei secțiuni circulare solicitată în întregime plastic? Să se compare rezultatul cu ceea ce s-ar fi obținut cu metoda rezistențelor admisibile (Fig. 18.1).

Rezolvare. Se aplică relația (18.3):

$$\begin{aligned} M_{lim} &= \sigma_c \cdot S_p = \sigma_c \cdot 2 \cdot \frac{\pi d^3}{8} \cdot \frac{2d}{3\pi} = \\ &= \frac{d^3 \sigma_c}{6} = 0,167 d^3 \sigma_c. \end{aligned}$$

Cu metoda rezistențelor admisibile s-ar fi obținut:

$$M_c = \sigma_c W = \sigma_c \frac{\pi d^3}{32} = 0,098 d^3 \sigma_c.$$

$$\frac{M_{lim}}{M_c} = \frac{0,167 d^3 \sigma_c}{0,098 d^3 \sigma_c} = 1,70.$$

Sporul de moment capabil obținut prin folosirea teoriei plasticității este de 70%.

13.2. Un sistem ca în figura 18.2, format din trei fire de oțel, având secțiunile egale, $A = 1 \text{ cm}^2$, este solicitat cu o sarcină P . Știind că limita de curgere a oțelului este $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$, iar coeficientul de siguranță

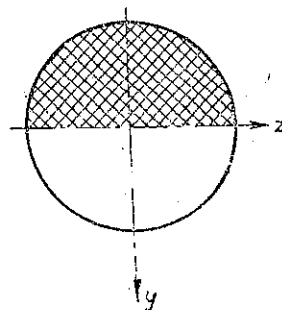


Fig. 18.1

față de limita de curgere $c = 2$, să se calculeze sarcina maximă prin metoda capacității portante. Se dă $\alpha = 30^\circ$.

Rezolvare. Calculul prin metoda capacității portante se face considerind că sarcina P crește, atingându-se limita de curgere întâi în firul 2 și apoi în firele 1 și 3. Forța care trebuie să apară în aceste fire pentru ca în ele să se atingă limita de curgere este:

$$T'_1 = T'_2 = T'_3 = \sigma_c \cdot A = 2400 \cdot 1 = 2400 \text{ daN}.$$

Sarcina care ar da naștere acestor forțe se obține scriind proiecția forțelor pe verticală:

$$T'_1 \cos \alpha + T_2 + T'_3 \cos \alpha = P_c,$$

$$\begin{aligned} P_c &= \sigma_c \cdot A (2 \cos \alpha + 1) = 2400 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 0,866 + 1) = \\ &= 6560 \text{ daN}. \end{aligned}$$

Sarcina maximă admisibilă este:

$$P''_a = \frac{P_c}{2} = \frac{6560}{2} = 3280 \text{ daN}.$$

13.3. Să se calculeze prin metoda rezistențelor admisibile sarcina maximă admisibilă P pentru firele din problema 1.30 (Fig. 18.3, a), știind că limita de curgere a oțelului din care sînt făcute firele este $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$ și coeficientul de siguranță față de limita de curgere este $c = 2$. Să se calculeze apoi sarcina maximă prin metoda capacității portante.

Rezolvare. La problema 1.30 eforturile în cele trei fire 1, 2, 3 avînd secțiunile A_1, A_2, A_3 sînt:

$$T_1 = T_3 = 0,242 P; T_2 = 0,516 P.$$

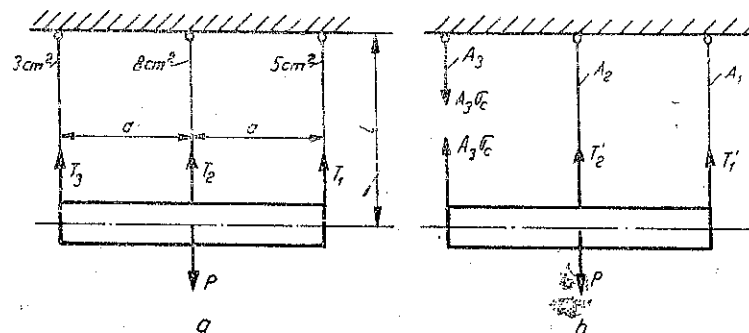


Fig. 18.3

Eforturile unitare ce apar în cele trei fire sînt:

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A_1} = \frac{0,242 P}{5} = 0,0484 P; \quad \sigma_2 = \frac{T_2}{A_2} = \frac{0,516 P}{8} = 0,0645 P;$$

$$\sigma_3 = \frac{T_3}{A_3} = \frac{0,242 P}{3} = 0,0806 P. \quad (1)$$

Firul cel mai solicitat este 3. Pentru acesta se calculează sarcina maximă prin metoda rezistențelor admisibile:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c} = \frac{2\,400}{2} = 1\,200 \text{ daN/cm}^2.$$

Din relația (1) se obține sarcina admisibilă:

$$P_a = \frac{\sigma_a}{0,0806} = \frac{1\,200}{0,0806} = 14\,900 \text{ daN}. \quad (2)$$

Pentru a calcula sarcina admisibilă prin metoda capacității portante, se consideră că sarcina P crește pînă ce în firul 3 se atinge limita de curgere ($\sigma_3 = \sigma_c$):

$$P'_c = \frac{\sigma}{0,0806} = 12,4 \sigma_c.$$

Forța care ia naștere în acest caz în firul 3 este:

$$P_3 = A_3 \cdot \sigma_c = 3 \sigma_c.$$

Înlocuind firul 3 prin forța astfel obținută, rezultă un sistem static determinat (Fig. 18.30, b). Ecuațiile din mecanică dau:

$$T'_1 + T'_2 + 3 \sigma_c - P'_c = 0; \quad 3 \sigma_c \cdot a = T'_1 a.$$

Se obțin eforturile în celelalte două fire:

$$T'_1 = 3 \sigma_c; \quad T'_2 = P'_c - 6 \sigma_c = 12,4 \sigma_c - 6 \sigma_c = 6,4 \sigma_c.$$

Eforturile unitare ce apar acum în aceste două fire sînt:

$$\sigma'_1 = \frac{T'_1}{A_1} = \frac{3 \sigma_c}{5} = 0,6 \sigma_c,$$

$$\sigma'_2 = \frac{T'_2}{A_2} = \frac{P'_c - 6 \sigma_c}{8} = \frac{6,4 \sigma_c}{8} = 0,8 \sigma_c. \quad (3)$$

Din relația (3) rezultă că atunci cînd P' crește, firul 2, fiind solicitat, va atinge mai repede limita de curgere, decît firul 1. Forța care face ca firul 2 să ajungă la limita de curgere se obține din relația (3), înlocuind:

$$\sigma'_2 = \sigma_c; \quad \sigma_c = \frac{P'_c - 6 \sigma_c}{8}; \quad P'_c = 14 \sigma_c.$$

După ce firul 2 ajunge la limita de curgere, sistemul își epuizează capacitatea portantă. Luînd coeficientul de siguranță $c = 2$, sarcina maximă admisibilă este:

$$P''_a = \frac{P'_c}{c} = \frac{14 \sigma_c}{2} = 7 \sigma_c = 7 \cdot 2\,400 = 16\,800 \text{ daN}. \quad (4)$$

Sarcina admisibilă crește astfel cu 12,75 % față de rezultatul obținut prin metoda rezistențelor admisibile.

18.4. Să se afle valoarea sarcinii capabile P la sistemul din figura 18.4. Bara BC se va considera perfect rigidă (nedeformabilă) la încovoire. Să se compare cu rezultatul obținut prin aplicarea metodei obișnuite de rezolvare a sistemelor static nedeterminate pentru cîteva cazuri particulare ale raportului $n = \frac{A_1}{A_2}$.

Rezolvare. a) Rezolvarea sistemului static nedeterminat (solicitarea în stadiul elastic).

Din ecuația de echilibru (momente în raport cu O) și de deformații (proporționalitatea lungirilor firelor cu distanțele la O), se obține sistemul de ecuații:

$$X_1 + 2X_2 = 3P; \quad A_1 X_2 = 2A_2 X_1 \quad (1)$$

ale cărui soluții sînt:

$$X_1 = 3P \frac{A_1}{A_1 + 4A_2};$$

$$X_2 = 6P \frac{A_2}{A_1 + 4A_2}. \quad (2)$$

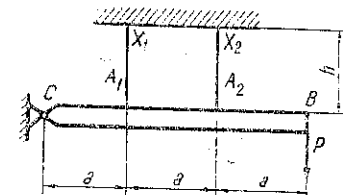


Fig. 18.4

Sarcina capabilă a sistemului va fi determinată de efortul unitar din firul 2 care este mai mare decît efortul unitar din firul 1. În firul 2 se va atinge rezistența admisibilă cînd $X_2 = A_2 \sigma_a = A_2 \frac{\sigma_c}{c}$. Din relația (2) se obține atunci:

$$P = \frac{X_2(A_1 + 4A_2)}{6A_2} = \frac{(A_1 + 4A_2)\sigma_c}{6c} = \frac{(4+n)A_2\sigma_c}{6c}; \quad \left(n = \frac{A_1}{A_2}\right).$$

b) *Metoda capacității portante.* Sarcina limită a sistemului apare cînd în ambele fire se atinge limita de curgere.

Deci: $X_1 = A_1 \sigma_c$; $X_2 = A_2 \sigma_c$.

Din ecuația de momente, se obține:

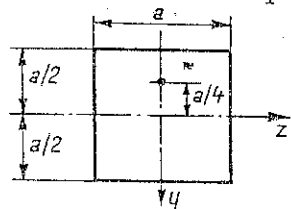
$$P_{lim} = \frac{(A_1 + 2A_2) \sigma_c}{3} \text{ și } P = \frac{P_{lim}}{c} = \frac{(A_1 + 2A_2) \sigma_c}{3c} = \frac{(2+n)A_2 \sigma_c}{3c}.$$

Pentru cîteva valori ale lui n rezultatele comparative sînt date în tabelul 18.4.

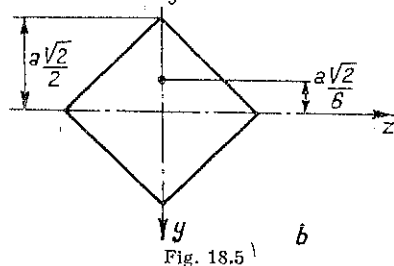
Tabelul 18.4

n	P prin metoda rezistențelor admisibile	P prin metoda capacității portante	Economie
1	$0,333 \frac{A_2 \sigma_c}{c}$	$\frac{A_2 \sigma_c}{c}$	20 %
2	$\frac{A_2 \sigma_c}{c}$	$1,33 \frac{A_2 \sigma_c}{c}$	33 %
5	$1,5 \frac{A_2 \sigma_c}{c}$	$2,33 \frac{A_2 \sigma_c}{c}$	55 %
10	$2,34 \frac{A_2 \sigma_c}{c}$	$4 \frac{A_2 \sigma_c}{c}$	71 %

18.5. În care din pozițiile a , b din figura 18.5 trebuie așezată o grindă de secțiune pătrată solicitată la încovoiere cu un moment dirijat după axa Oz , astfel ca momentul limită într-o solicitare total plastică să fie maxim? Materialul este ideal plastic.



a



b

Fig. 18.5

Rezolvare. Momentul încovoierii limită pentru o solicitare total plastică are expresia (18.3):

$$M_{lim} = \sigma_c \cdot S_p.$$

Pentru cazul a , momentul static are valoarea:

$$S_{pa} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^3}{4}.$$

Pentru cazul b , momentul static are valoarea:

$$S_{pb} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Deoarece momentele limită sînt proporționale cu momentele statice:

$$\frac{M_{lim a}}{M_{lim b}} = \frac{S_{pa}}{S_{pb}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1,18,$$

se constată că

$$M_{lim a} > M_{lim b}$$

deci poziția a permite o utilizare mai bună a materialului.

18.6. Care este momentul limită al unei secțiuni în formă de T (Fig. 18.6) cu grosimea minii și a tălpii egale?

Rezolvare. Din condiția de echilibru a eforturilor din secțiune, exprimată prin proiecția în lungul axei barei, rezultă că eforturile unitare fiind constante pe secțiune, aria zonei pe care acționează eforturi unitare de compresiune trebuie să fie egală cu aceea a zonei pe care acționează eforturi unitare de întindere. Deci axa neutră nu va trece prin centrul de greutate, ci va împărți secțiunea în două arii egale (v. relația 18.4).

Astfel, în cazul considerat, ariile zonelor comprimate și întinse vor fi jumătate din aria totală.

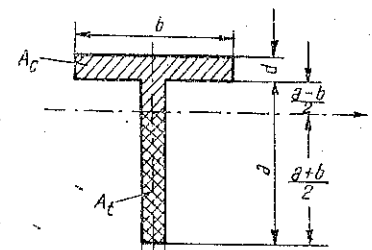


Fig. 18.6

$$A_c = A_t = \frac{d}{2} (a + b).$$

Poziția axei neutre este reprezentată în figura 18.6.

Momentele statice ale celor două zone în raport cu axa neutră z vor fi

$$S_t = d \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{4} = \frac{d}{8} (a+b)^2,$$

$$S_c = bd \left(\frac{a-b+d}{2} \right) + d \frac{a-b}{2} \frac{a-b}{4} = \frac{d}{8} (a^2 + 2ab - 3b^2 + 4bd).$$

Momentul încovoierii limită este dat de relația (18.5)

$$M_{lim} = \sigma_c (S_t + S_c) = \frac{d}{8} [(a+b)^2 + a^2 + 2ab - 3b^2 + 4bd] \sigma_c$$

$$M_{lim} = \frac{d}{4} (a^2 - b^2 + 2ab + 2bd) \sigma_c.$$

18.7. Un stîlp cu secțiunea dreptunghiulară, de grosime unitară, este acționat de o forță normală P , la distanța a de o muchie. Să se studieze variația forței P capabilă a stîlpului, cînd lățimea x a secțiunii este variabilă. Studiul se va face folosind atît calculul prin metoda rezistențelor admisibile, cît și metoda capacității portante.

Rezolvare. a) Calculul cu metoda rezistențelor admisibile.

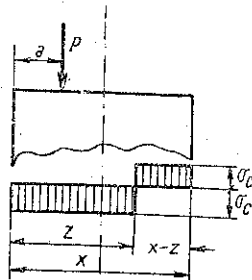


Fig. 18.7.a

$$\sigma = \frac{\sigma_c}{c} = \frac{P}{x} + \frac{6P \left(\frac{x}{2} - a \right)}{x^2},$$

de unde:

$$P = \frac{x^2 \sigma_c}{2(2x - 3a)c}.$$

b) Calculul prin metoda capacității portante (v. Fig. 18.7, a). Ecuațiile de echilibru sînt:

$$z \sigma_c = (x - z) \sigma_t + P_{lim}$$

$$P_{lim} \cdot a + (x - z) \sigma_c \frac{x + z}{2} = z \sigma_c \frac{z}{2}.$$

Calculînd z din prima ecuație și înlocuînd în a doua se obține

$$z = \frac{x \sigma_c + P_{lim}}{2 \sigma_c},$$

$$P_{lim} = \sigma_c [(2a - x) + \sqrt{4a(a - x) + 2x^2}];$$

de unde:

$$P = \frac{P_{lim}}{c} = \frac{\sigma_c}{c} [(2a - x) + \sqrt{4a(a - x) + 2x^2}].$$

În tabelul 18.7 s-au trecut forțele P cînd x ia cîteva valori particulare. Calculul cu rezistențe admisibile duce la rezultatul paradoxal că pentru intervalul $2a < x < 6a$, valoarea lui P este mai mică decît pentru $x = 2a$ (cazul compresiunii centrice), deși secțiunea este mai mare și mai înaltă. Calculul prin metoda capacității portante nu prezintă această anomalie. Rezultatele de mai sus s-au reprezentat pe diagrama alăturată (Fig. 18.7, b).

Tabelul 18.7

x	Calculul după metoda rezistențelor admisibile	Calculul prin metoda capacității portante
$x = 2a$	$P = 2a \frac{\sigma_c}{c}$	$P = 2a \frac{\sigma_c}{c}$
$x = 3a$	$P = 1,5a \frac{\sigma_c}{c}$	$P = 2,16a \frac{\sigma_c}{c}$
$x = 4a$	$P = 1,6a \frac{\sigma_c}{c}$	$P = 2,47a \frac{\sigma_c}{c}$
$x = 5a$	$P = 1,785a \frac{\sigma_c}{c}$	$P = 2,83a \frac{\sigma_c}{c}$
$x = 6a$	$P = 2a \frac{\sigma_c}{c}$	$P = 3,21a \frac{\sigma_c}{c}$
$x = 10a$	$P = 2,94a \frac{\sigma_c}{c}$	$P = 4,80a \frac{\sigma_c}{c}$
$x = 20a$	$P = 5,40a \frac{\sigma_c}{c}$	$P = 8,90a \frac{\sigma_c}{c}$

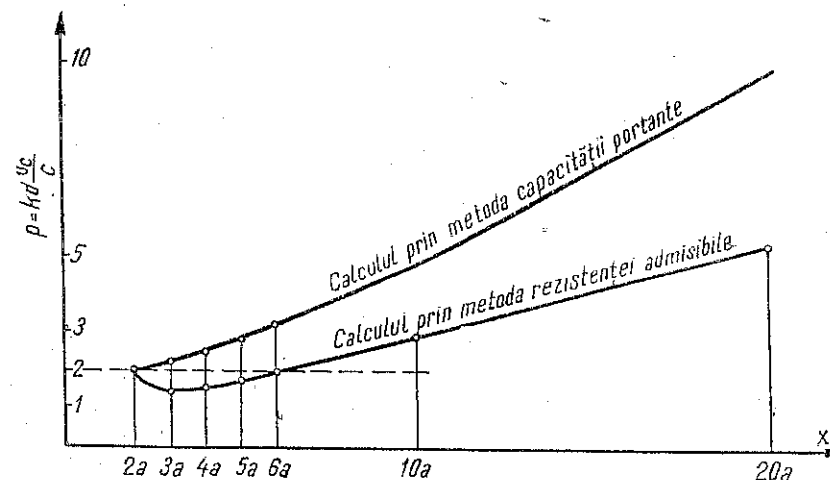


Fig. 18.7, b

18.8. O bară metalică de 2 m deschidere, cu secțiunea dreptunghiulară 3×10 cm, simplu rezemată la extremități, este încărcată la mijlocul său cu o forță $P = 3\,000$ daN. Se cere: 1. Să se determine porțiunea din grindă solicitată elastic și cea solicitată elasto-plastic. 2. Să se figureze zona plasticificată în lungul barei, sub acțiunea sarcinii. Se dă $\sigma_c = 2\,500$ daN/cm².

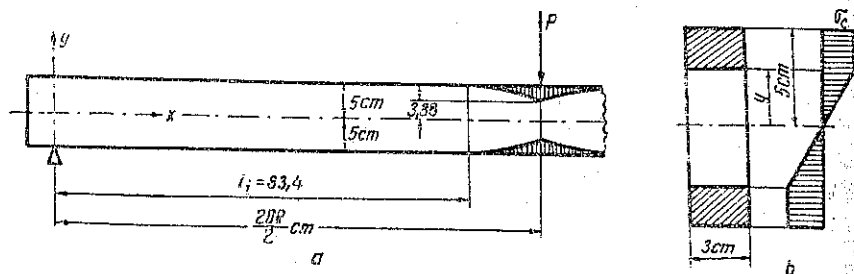


Fig. 18.8

Rezolvare. În porțiunea de bară solicitată elasto-plastic momentul încovoietor este (Fig. 18.8, b):

$$M = \sigma_c [3(5 - y)(5 + y) + 2y^2] = 2\,500 [75 - y^2] \text{ daNcm} = 25 [75 - y^2] \text{ daNm}$$

Într-o secțiune, la distanța x de reazemul grinzii, momentul este $M = 1\,500 x$.

Egalind valorile lui M , se obține:

$$25 [75 - y^2] = 1\,500 x$$

sau

$$y = \pm \sqrt{75 - 60 x}$$

Aceasta este ecuația curbei care separă zona elastică de cea plasticificată a grinzii (Fig. 18.8, a). Trebuie precizat că y nu poate varia decât între 0 și ± 5 .

18.9. O grindă metalică de 7,00 m, simplu rezemată la capete, are profilul din figura 18.9 și suportă la mijlocul deschiderii o forță concentrată de 400 kN. Care sînt eforturile unitare remanente după descărcarea grinzii? Se dă $\sigma_c = 2\,500$ daN/cm².

Rezolvare. Momentul de inerție și modulul de rezistență al secțiunii sînt:

$$I_z = \frac{1}{12} [20 \cdot 50^3 - 19 \cdot 45^3] \approx 64\,000 \text{ cm}^4; \quad W_z = \frac{64\,000}{25} = 2\,560 \text{ cm}^3$$

Momentul încovoietor maxim este:

$$M = \frac{400 \cdot 7}{4} = 700 \text{ kNm}$$

Se vede că secțiunea este solicitată în stadiul plastic, deoarece:

$$\sigma_{ef} = \frac{M}{W} = \frac{7\,000\,000}{2\,560} = 2\,735 > \sigma_c$$

Se consideră că dreptele care separă porțiunea elastică de cea solicitată în stadiul plastic se află la o distanță x de axa neutră. Pentru a determina valoarea lui x , se scrie condiția de echilibru:

$$\int_A \sigma y dA = M,$$

adică:

$$\left[20 \cdot 2,5 \cdot 47,5 + (22,5 - x)(22,5 + x) + \frac{1 \cdot (2x)^2}{6} \right] 2\,500 = 7\,000\,000,$$

de unde $x = 15,6$ cm.

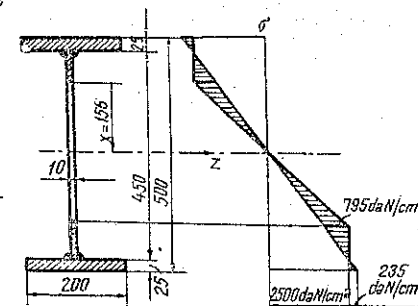


Fig. 18.9

Diagrama eforturilor unitare remanente are forma din figura 18.9.

La descărcare se aplică un cuplu egal cu M , sub acțiunea căruia se consideră că materialul se comportă elastic, deci diagrama eforturilor unitare are formă triunghiulară, cu valoarea maximă:

$$\sigma = \frac{7\,000\,000}{2\,560} = 2\,735 \text{ daN/cm}^2$$

Din suprapunerea celor două diagrame rezultă eforturile unitare remanente care au valorile:

$$\text{la fibra extremă, } \sigma = 2\,500 - 2\,735 = -235 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\text{la } x = 15,6 \text{ cm, } \sigma = 2\,500 - \frac{15,6}{25} \cdot 2\,735 \approx 795 \text{ daN/cm}^2$$

18.10. Să se afle săgeata maximă la o grindă simplu rezemată, încărcată la mijlocul său cu o sarcină concentrată, solicitată elasto-plastic.

Se dau: profilul grinzii I 20; materialul OL 48; $I_z = 2140 \text{ cm}^4$; $W_z = 214 \text{ cm}^3$; $P = 180 \text{ kN}$; $l = 2 \text{ m}$; $\sigma_c = 2\,600 \text{ daN/cm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$; $E_p = \text{const.} = 3 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Ecuația diferențială a fibrei medii deformate este:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_r}{EI}, \text{ unde } M_r = \frac{M}{k}$$

În zona elastică, $k = 1$, iar în cea plastică

$$k = \frac{E_p}{E} = \frac{3 \cdot 10^5}{2,1 \cdot 10^6} = 0,143.$$

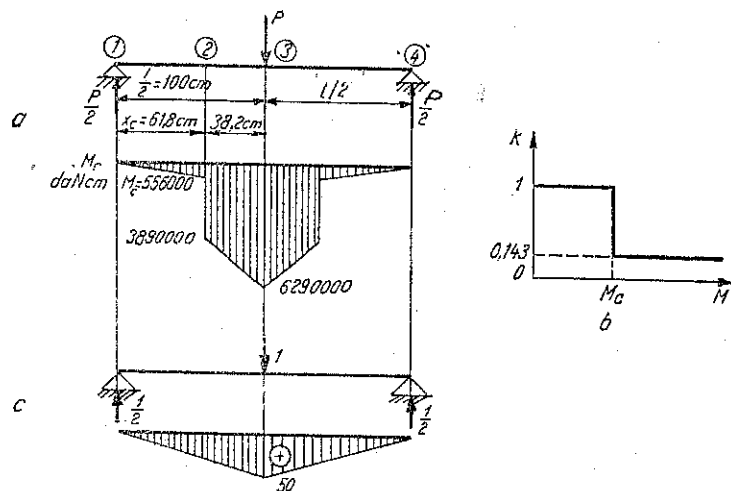


Fig. 18.10

Variația lui k în funcție de M este redată în figura 18.10, b. Valorile lui M_c și x_c rezultă din relațiile:

$$M_c = W \cdot \sigma_c = 214 \cdot 2600 = 5,56 \cdot 10^5 \text{ daNcm}$$

$$M_c = \frac{P x_c}{2}; \quad x_c = \frac{2 M_c}{P} = \frac{2 \cdot 5,56 \cdot 10^5}{18000} = 61,8 \text{ cm.}$$

Diagrama momentului redus M_r are forma din figura 18.10, a, cu următoarele valori importante:

$$M'_{r_s} = M_c = \frac{P x_c}{2} = \frac{18000}{2} \cdot 61,8 = 556000 \text{ daNcm};$$

$$M''_{r_s} = \frac{M_c}{k} = \frac{556000}{0,143} = 3890000 \text{ daNcm};$$

$$M_{r_s} = \frac{Pl}{4k} = \frac{18000 \cdot 200}{4 \cdot 0,143} = 6290000 \text{ daNcm.}$$

Săgeata maximă se va afla, din motive de simetrie, la mijlocul grinzii. Pentru determinarea acesteia se aplică regula lui Verescheghin folosind diagramele din figurile 18.10, a și c:

$$v = \frac{1}{EI_z} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} 556 \cdot 10^3 \cdot 61,8 \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{3} 61,8 + 3890 \cdot 10^3 \cdot 38,2 \cdot \frac{1}{2} \times \right. \\ \left. \times \left(61,8 + \frac{38,2}{2} \right) + \frac{1}{2} 2400 \cdot 10^3 \cdot 38,2 \cdot \frac{1}{2} \left(61,8 + \frac{2}{3} 38,2 \right) \right]$$

$$v = \frac{16729714,68 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2140} = 3,722 \text{ cm.}$$

Dacă profilul ar fi alcătuit dintr-un oțel special care să aibă:

$$\sigma_c > \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{Pl}{4W_z} = \frac{18000 \cdot 200}{4 \cdot 214} = 4200 \text{ daN/cm}^2,$$

s-ar putea aplica formula deformațiilor de la grinzile solicitate în întregime elastic, rezultînd:

$$f_{max} = \frac{Pl^3}{48EI_z} = \frac{18000 \cdot 200^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 2,14 \cdot 10^3} = 0,668 \text{ cm.}$$

18.11. Bara din figura 18.11, a este de secțiune dreptunghiulară, cu dimensiunile $b = 4 \text{ cm}$ și $h = 6 \text{ cm}$. Să se calculeze valoarea forțelor P care produc: 1) solicitarea total plastică a porțiunii 3-4; 2) solicitarea elasto-plastică a porțiunii 3-4, înălțimea zonei solicitată elastic fiind $\frac{h}{4}$. Materialul este oțel cu $\sigma_s = 2400 \text{ daN/cm}^2$.

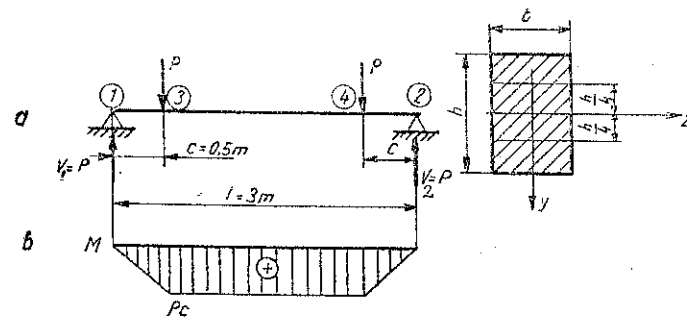


Fig. 18.11

Rezolvare. 1) Se aplică relația (18.3):

$$M_{lim} = \sigma_c \cdot S_p = \sigma_c \cdot 2 \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = 2 \cdot 400 \cdot \frac{4 \cdot 6^2}{4} = 86 \cdot 400 \text{ daNcm.}$$

Momentul maxim (Fig. 18.11, b) este:

$$M_{max} = Pc = M_{lim} = 86 \cdot 400 \text{ daNcm,}$$

$$P = \frac{86 \cdot 400}{50} = 1 \cdot 728 \text{ daN.}$$

2) Se aplică relația (18.1):

$$M_{lim} = \sigma_c (W_e + S_p) = \sigma_c \left[\frac{b \left(\frac{h}{2} \right)^2}{6} + 2b \cdot \frac{h}{4} \left(\frac{h}{8} + \frac{h}{4} \right) \right] =$$

$$= \sigma_c \cdot \frac{11}{48} b h^2 = \frac{11}{48} \cdot 2 \cdot 400 \cdot 4 \cdot 6^2 = 79 \cdot 200 \text{ daNcm,}$$

$$M_{max} = Pc = 79 \cdot 200 \text{ daNcm,}$$

$$P = \frac{79 \cdot 200}{50} = 1 \cdot 584 \text{ daN.}$$

18.12. Să se stabilească expresia momentului de răsucire capabil M_t al unei bare de secțiune inelară solicitată elasto-plastic, considerînd modulul de plasticitate transversal $G_p = 0$. Să se stabilească raportul dintre momentul capabil al secțiunii solicitate în întregime plastic și momentul capabil al aceleiași secțiuni solicitate pur elastic.

Rezolvare. Pentru $R_1 \leq r \leq a$ (Fig. 18.12)

$$\tau = \tau_c \frac{r}{a}$$

Pentru $a \leq r \leq R_2$

$$\tau = \tau_c.$$

Momentul de răsucire capabil este:

$$M_t = \int_A \tau r dA = \int_{R_1}^a \tau_c \frac{r}{a} \cdot r \cdot 2\pi r dr +$$

$$+ \int_a^{R_2} \tau_c r 2\pi r dr = \tau_c \left[\frac{\pi(a^4 - R_1^4)}{2a} + \frac{2}{3} \pi(R_2^3 - a^3) \right]$$

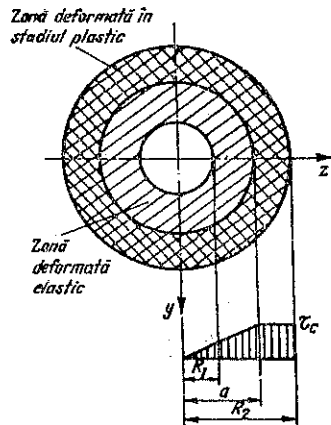


Fig. 18.12

Se notează $\frac{\pi(a^4 - R_1^4)}{2a} = W_{pe}$ modulul de rezistență polar al porțiunii din secțiune solicitată pur elastic. Atunci:

$$M_t = \tau_c \left[W_{pe} + \frac{2}{3} \pi(R_2^3 - a^3) \right]. \quad (1)$$

Cînd secțiunea este solicitată total plastic, $a = R_1$ și deci

$$M_{lim} = \frac{2}{3} \pi(R_2^3 - R_1^3) \tau_c. \quad (2)$$

Pentru solicitarea pur elastică a secțiunii, $a = R_2$ și deci:

$$M_c = \frac{\pi}{2} \frac{(R_2^4 - R_1^4)}{R_2} \tau_c;$$

$$\frac{M_{lim}}{M_c} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R_2(R_2^3 - R_1^3)}{R_2^4 - R_1^4}.$$

18.13. O bară de secțiunea circulară cu diametrul $D = 80$ mm este solicitată elasto-plastic de către un moment de răsucire $M_t = 265 \cdot 000$ daNcm. Să se determine raza miezului secțiunii solicitate elastic. Să se calculeze apoi eforturile unitare remanente după descărcare. Se dă: $\tau_c = 2 \cdot 100$ daN/cm², $G_p = 0$.

Rezolvare. Din relația (18.7):

$$M_t = 2\pi \tau_c \left(\frac{R^3}{3} - \frac{a^3}{12} \right),$$

rezultă:

$$a = \sqrt[3]{4R^3 - \frac{6M_t}{\pi \tau_c}} = \sqrt[3]{4 \cdot 4^3 - \frac{6 \cdot 265 \cdot 000}{\pi \cdot 2100}} = 2,47 \text{ cm.}$$

La descărcare se aplică un cuplu egal cu M_t sub acțiunea căruia se consideră că materialul se comportă elastic, deci diagrama eforturilor unitare are formă triunghiulară, cu valoarea maximă:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{265 \cdot 000}{\frac{\pi 8^3}{16}} = 2 \cdot 636 \text{ daN/cm}^2.$$

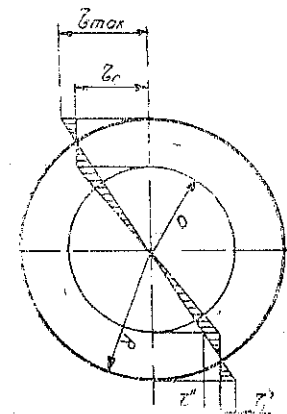


Fig. 18.13

Eforturile unitare remanente sînt.

— la periferie

$$\tau' = \tau_{max} - \tau_c = 2\,636 - 2\,100 = 536 \text{ daN/cm}^2,$$

— la distanța a de centru

$$\tau'' = \tau_c - \frac{a}{R} \tau_{max} = 2\,100 - \frac{2,47}{4} 2\,636 = 472 \text{ daN/cm}^2.$$

18.14. Bara de oțel din figura 18.14, a , cu diametrul $d = 6$ cm, este solicitată la răsucire de cuplurile M_0 și $2M_0$. Să se calculeze valoarea M_0 , pentru care se produce în secțiunea cea mai solicitată:

- 1) solicitarea total elastică;
- 2) solicitarea elasto-plastică, raza miezului solicitat elastic fiind $d/4$;
- 3) solicitarea total plastică.

Materialul are $\tau_c = 2\,400$ daN/cm².

Rezolvare. Se trasează diagrama de momente, procedînd ca la problema 6.10

În figura 18.14, b este dată diagrama M , în funcție de cuplul M_0 .

- 1) Se aplică relația (18.7), pentru $a = R$:

$$M_{t,max} = 2\pi\tau_c \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{12} \right) = \frac{\pi\tau_c R^3}{2} = \tau_c W_p = \frac{\pi \cdot 2\,400 \cdot 3^3}{2} = 101\,787 \text{ daNcm};$$

$$\frac{7}{4} M_0 = 101\,787; \quad M_0 = 58\,164 \text{ daNcm}.$$

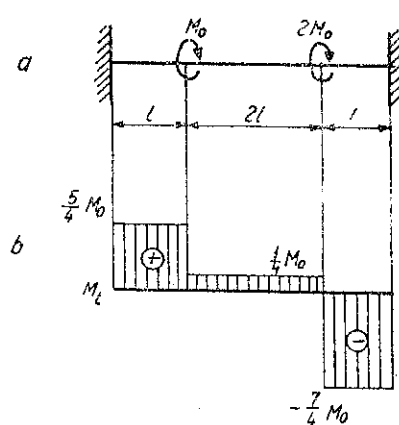


Fig. 18.14

$$2) M_t = 2\pi\tau_c \left[\frac{R^3}{3} - \frac{\left(\frac{2R}{4}\right)^3}{12} \right] = \frac{31}{48} \pi\tau_c R^3 = \frac{31}{48} \pi \cdot 2\,400 \cdot 3^3 = 131\,475 \text{ daNcm},$$

$$\frac{7}{4} M_0 = 131\,475; \quad M_0 = 75\,129 \text{ daNcm}.$$

- 3) Se aplică relația (18.7) pentru $a = 0$:

$$M_t = 2\pi\tau_c \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3} \pi \cdot 2\,400 \cdot 3^3 = 135\,717 \text{ daNcm},$$

$$\frac{7}{4} M_0 = 135\,717; \quad M_0 = 77\,552 \text{ daNcm}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

18.15. Să se calculeze momentul încovoietor limită al unei grinzi cu secțiunea triunghiulară cu baza de 8 cm și înălțimea de 9 cm. Să se facă comparație cu rezultatele obținute prin aplicarea metodei rezistențelor admisibile.

Răspuns. După metoda capacității portante: $M_{lim} = 63,1 \sigma_c$, după metoda rezistențelor admisibile: $M = 27 \sigma_c$; economia rezultată prin aplicarea primei metode: 144%.

18.16. Să se calculeze momentul încovoietor limită al unei grinzi cu secțiune inelară cu diametrul de 12 cm și grosimea peretelui de 1 cm. Se va lua $\sigma_c = 2\,500$ daN/cm² și $c = 1,8$.

Calculul se va face prin metoda capacității portante și după metoda rezistențelor admisibile, comparîndu-se rezultatele.

Răspuns. Calculul după rezistențe admisibile: $M_{cap} = 12,2$ kNm; calculul prin metoda capacității portante: $M_{cap} = 16,8$ kNm; economia rezultată: 38%.

18.17. Care este momentul încovoietor capabil al unei secțiuni dreptunghiulare, solicitată în întregime plastic? Să se compare rezultatul cu ceea ce s-ar fi obținut cu metoda rezistențelor admisibile.

$$\text{Răspuns: } M_{lim} = \frac{bh^2}{4} \sigma_c,$$

$$M_c = \frac{bh^2}{6} \sigma_c.$$

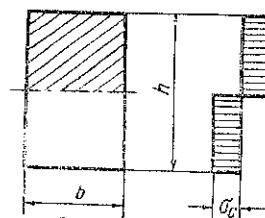


Fig. 18.17

18.18. O bară metalică solicitată la încovoiere are secțiunea în formă de pătrat așezat ca în figura 18.18 cu diagonala de 12 cm. Să se calculeze momentele capabile ale secțiunii folosind metoda rezistențelor admisibile și metoda capacității portante. Dacă muchiile pătratului se teșesc la partea superioară și la cea inferioară pe o înălțime de 1,2 cm, să se calculeze din nou momentele capabile după cele două metode. Se va lua $\sigma_c = 2\,500$ daN/cm² și $c = 1,8$ (coeficient de siguranță față de limita de curgere).

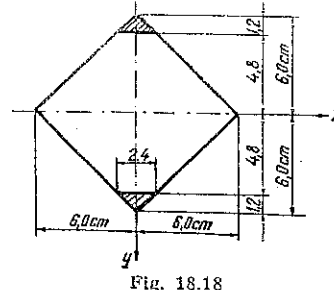


Fig. 18.18

Răspuns: Pătratul întreg:

$$a) M_{cap} = 10 \text{ kNm}; \quad b) M_{cap} = 20 \text{ kNm}.$$

Pătratul cu muchiile teșite:

$$a) M_{cap} = 10,3 \text{ kNm}; \quad b) M_{cap} = 17,9 \text{ kNm}.$$

13.19. Să se calculeze sarcina maximă pe care o poate suporta sistemul din figura 13.19, dacă firele sînt din oțel cu limita de curgere $\sigma_c = 2400 \text{ daN/cm}^2$, secțiunea $A_1 = A_2 = 5 \text{ cm}^2$, $l_1 = 3 \text{ m}$, $l_2 = 2 \text{ m}$, $b = 1,53 \text{ m}$, iar coeficientul de siguranță $c = 2$. Să se calculeze sarcina maximă și prin metoda capacității portante.

Răspuns: a) Metoda rezistențelor admisibile

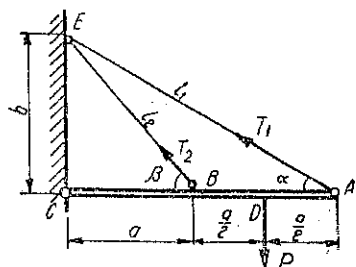


Fig. 13.19

$$T_1 = \frac{3P}{b} \frac{l_1 l_2}{l_1^3 + 4l_2^3} \approx 0,8P,$$

$$T_2 = \frac{3P}{2b} \frac{l_2 l_1}{l_1^3 + 4l_2^3} \approx 0,9P,$$

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{A} = 0,18P.$$

$$\begin{aligned} \text{Sarcina maximă admisibilă } P'_a &= \\ &= \frac{\sigma_c}{0,18c} = 6660 \text{ daN.} \end{aligned}$$

b) Metoda capacității portante

$$T'_1 = T'_2 = \sigma_c A = 12000 \text{ daN.}$$

Sarcina ce produce atingerea limitei de curgere

$$P_c = \frac{2}{3} b T'_1 \left(\frac{2}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = 14280 \text{ daN}$$

$$P'_a = 7140 \text{ daN.}$$

13.20. Grinda încadrată la ambele capete din figura 13.20, cu lungimea $l = 4 \text{ m}$, este încărcată cu o forță uniform distribuită $p = 40 \text{ daN/cm}$. Să se dimensioneze secțiunea, alegînd un profil I, după metoda stărilor limită, cunoscînd coeficientul de siguranță $c = 1,7$ și $\sigma_c = 2100 \text{ daN/cm}^2$.

Răspuns: Profil I 32.

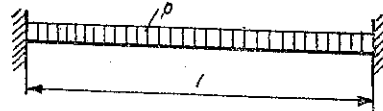


Fig. 13.20

TUBURI CU PEREȚI GROȘI

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Un element izolat dintr-un tub de rază interioară R_1 și de rază exterioară R_2 (Fig. 19. a), supus unei presiuni interioare p_i și exterioare p_e , este solicitat de eforturile unitare principale:

σ_r — efort unitar normal, îndreptat în direcția razei;

σ_t — efort unitar normal, îndreptat în direcția tangentei la element;

σ_x — efort unitar normal, paralel cu axa longitudinală a tubului.

2. Mărimile acestor eforturi unitare, la o distanță oarecare r de axul tubului, sînt date de relațiile:

$$\sigma_r = \frac{R_1^2 p_i - R_2^2 p_e}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{(p_i - p_e) R_1^2 R_2^2}{r^2 (R_2^2 - R_1^2)}; \quad (19.1)$$

$$\sigma_t = \frac{R_1^2 p_i - R_2^2 p_e}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(p_i - p_e) R_1^2 R_2^2}{r^2 (R_2^2 - R_1^2)}; \quad (19.2)$$

$$\sigma_x = \frac{p_i R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (19.3)$$

În cazul particular cînd nu există presiune exterioară, deci $p_e = 0$, formulele (19.1) și (19.2) devin:

$$\sigma_r = \frac{R_1^2 p_i}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right); \quad (19.4)$$

$$\sigma_t = \frac{R_1^2 p_i}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right). \quad (19.5)$$

Eforturile unitare la interiorul și exteriorul tubului se obțin din formulele (19.4) și (19.5) înlocuind pe rînd $r = R_1$ și $r = R_2$:

$$(\sigma_r)_{r=R_1} = -p_i; \quad (19.6)$$

$$(\sigma_r)_{r=R_2} = 0;$$

$$(\sigma_t)_{r=R_1} = \sigma_{t \max} = \frac{p_i (R_2^2 + R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2}; \quad (19.7)$$

$$(\sigma_t)_{r=R_2} = \frac{2p_i R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (19.8)$$

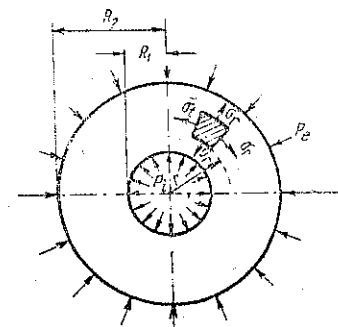


Fig. 19. a

Eforturile unitare maxime apar în punctele din interiorul tubului.

3. Calculul tuburilor cu pereți groși se face cu ajutorul uneia dintre ipotezele de rezistență.

Efortul unitar echivalent, după cele patru ipoteze de rezistență, este dat de relațiile:

— Ipoteza I (ipoteza efortului unitar normal maxim):

$$\sigma_{ech_1} = \sigma_1. \quad (19.9)$$

— Ipoteza II (ipoteza deformației maxime):

$$\sigma_{ech_2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (19.10)$$

— Ipoteza III (ipoteza efortului unitar tangențial maxim):

$$\sigma_{ech_3} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (19.11)$$

— Ipoteza IV (ipoteza energiei de deformație de schimbare a formei):

$$\sigma_{ech_4} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (19.12)$$

unde σ_1 , σ_2 și σ_3 sunt eforturile unitare principale ce respectă ordinea:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Pentru verificarea sau dimensionarea unui tub se pune condiția:

$$\sigma_{ech} \leq \sigma_a, \quad (19.13)$$

efortul unitar echivalent calculându-se pe baza uneia dintre aceste ipoteze.

4. Când presiunea într-un tub se apropie ca valoare de rezistența admisibilă, grosimea tubului determinată după ipoteza I de rezistență poate lua valori foarte mari. Pentru presiuni care depășesc ca valoare rezistența admisibilă, dimensionarea tubului devine imposibilă. În acest caz se folosește fretajul. Acesta constă din introducerea unui cilindru de rază exterioară R_2 în interiorul altui cilindru avînd o rază interioară mai mică. Deoarece montajul nu se poate face la rece, se încălzește cilindru exterior, care se dilată pînă cînd cilindru interior poate intra în el. Prin răcire, cilindru exterior strînge cilindru interior, realizînd un cilindru fretat, care poate rezista la presiuni interioare mult mai mari decît un cilindru nefretat.

Diferența la rece dintre cele două raze R_2 ale cilindrilor, interior și exterior, este grosimea de fretaj δ . În urma fretajului, între cei doi cilindri de lungime egală, apare o presiune de fretaj, care, dacă cilindrii sînt din același material, are expresia următoare:

$$p = \frac{\delta E (R_2^2 - R_1^2) (R_3^2 - R_2^2)}{2 R_3^2 (R_3^2 - R_1^2)}, \quad (19.14)$$

în care: R_1 , R_2 și R_3 sînt razele din figura 19.b.

Eforturile unitare în punctele din interiorul și exteriorul celor doi cilindri sînt (dacă nu există presiune exterioară p_e):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p_i, \\ \sigma_t &= p_i \frac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} - 2p \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_1^2}; \end{aligned} \right\} \quad (19.15)$$

— pe fața interioară a cilindru interior:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_r &= -p_i \frac{R_1^2 (R_3^2 - R_2^2)}{R_2^2 (R_3^2 - R_1^2)} - p, \\ \sigma'_t &= p_i \frac{R_1^2 (R_3^2 + R_2^2)}{R_2^2 (R_3^2 - R_1^2)} - p \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2}; \end{aligned} \right\} \quad (19.16)$$

— pe fața interioară a cilindru exterior:

$$\left. \begin{aligned} \sigma''_r &= \sigma'_{r1}, \\ \sigma''_t &= p_i \frac{R_1^2 (R_3^2 + R_2^2)}{R_2^2 (R_3^2 - R_1^2)} + p \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}; \end{aligned} \right\} \quad (19.17)$$

— pe fața exterioară a cilindru exterior:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 0, \\ \sigma_t &= \frac{2p_i R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} + \frac{2p R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}; \end{aligned} \right\} \quad (19.18)$$

În cazul cînd se execută fretajul unui cilindru exterior pe un cilindru interior plin, presiunea de fretaj se obține din formula (19.14), înlocuind $R_1 = 0$:

$$p = \frac{\delta E R_2^2 (R_3^2 - R_2^2)}{2 R_3^2 R_2^2} = \frac{\delta E (R_3^2 - R_2^2)}{2 R_2 R_3^2} \quad (19.19)$$

5. În cazul în care efortul unitar într-un tub supus la o presiune interioară depășește limita de curgere, o parte din tub sau întregul tub intră în stadiul de deformație plastică. Tubul ajunge în întregime în stadiul deformației plastice dacă:

$$p_i - p_e = 2k \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (19.20)$$

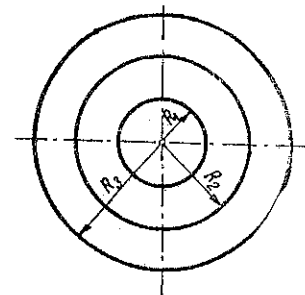


Fig. 19.b

considerind modulul de plasticitate $E_p = 0$.

În relația de mai sus :

p_i este presiunea interioară ;

p_e — presiunea exterioară,

iar k se poate lua :

$$k = 0,5 \sigma_c, \quad (19.21)$$

σ_c fiind limita de curgere a materialului.

B. PROBLEME REZOLVATE

19.1. Un cilindru cu pereți groși, de rază interioară $R_1 = 10$ cm și rază exterioară $R_2 = 13$ cm, este supus unei presiuni interioare $p_i = 500$ daN/cm².

Se cer :

- 1) eforturile unitare la raza interioară și la cea exterioară a cilindrului ;
- 2) diagramele de variație ale eforturilor unitare σ_r și σ_t .

Rezolvare. 1) Pentru determinarea eforturilor unitare la raza interioară și la cea exterioară a tubului, se aplică formulele (19.6), (19.7), (19.8) :

$$\sigma_{r_i} = -p_i = -500 \text{ daN/cm}^2, \\ \sigma_{r_e} = 0,$$

$$\sigma_{t_i} = \sigma_{t_{max}} = \frac{p_i(R_2^2 + R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{500(13^2 + 10^2)}{13^2 - 10^2} = 1\,950 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{t_e} = \frac{2p_i R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^2}{13^2 - 10^2} = 1\,450 \text{ daN/cm}^2.$$

Dacă cilindrul are fund, trebuie calculat și efortul unitar σ_x , care este constant pe grosimea tubului. Acesta, după formula (19.3), este :

$$\sigma_x = \frac{p_i R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{500 \cdot 10^2}{13^2 - 10^2} = 725 \text{ daN/cm}^2.$$

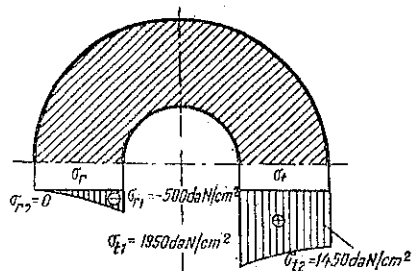


Fig. 19.1

2) Diagramele de variație a eforturilor unitare se trasează, ținând seamă de relațiile (19.1) și (19.2), care dau variația lui σ_r și σ_t , în funcție de rază, și de valorile determinate anterior (Fig. 19.1).

19.2. Să se dimensioneze un tub de oțel de lungime infinită, supus

unei presiuni interioare $p = 1\,000$ daN/cm², dacă rezistența admisibilă se ia $\sigma_a = 3\,000$ daN/cm², după toate ipotezele de rezistență¹. Se dau : raza interioară $R_1 = 1$ cm ; $\nu = 0,3$.

Rezolvare.

a) *Ipoteza I.* Efortul unitar maxim apare la interiorul tubului și are valoarea dată de relația (19.7).

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 = \sigma_{t_{max}} = p \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (1)$$

Introducând această valoare în relația (19.13) se obține :

$$R_2' = R_1 \sqrt{\frac{\sigma_a + p}{\sigma_a - p}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{3\,000 + 1\,000}{3\,000 - 1\,000}} = 1,41 \text{ cm.} \quad (2)$$

b) *Ipoteza a II-a.* Deoarece tubul se consideră de lungime infinită, nu se ține seamă de efortul unitar σ_x , care apare în lungul tubului și se consideră solicitarea ca o stare plană de eforturi unitare. În acest caz, efortul unitar echivalent conform celei de-a doua ipoteze de rezistență, potrivit relației (19.10) în care $\sigma_2 = 0$, este :

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \nu \sigma_3. \quad (3)$$

În cazul tubului din problemă, aplicind condiția (19.13) se obține :

$$\sigma_1 = \sigma_{t_{max}} = p \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}; \quad \sigma_3 = \sigma_{r_{max}} = -p;$$

$$p \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - (-\nu p) = \sigma_a.$$

De aici se obține :

$$R_2' = R_1 \sqrt{\frac{\sigma_a + (1-\nu)p}{\sigma_a - (1+\nu)p}} = R_1 \sqrt{\frac{\sigma_a + 0,7p}{\sigma_a - 1,3p}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{3\,000 + 0,7 \cdot 1\,000}{3\,000 - 1,3 \cdot 1\,000}} = 1,43 \text{ cm.} \quad (4)$$

c) *Ipoteza a III-a.* Conform ipotezei a III-a se aplică relațiile (19.11) și (19.13)

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_a; \quad p \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - (-p) = \sigma_a, \quad (5)$$

$$R_2'' = R_1 \sqrt{\frac{\sigma_a}{\sigma_a - 2p}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{3\,000}{3\,000 - 2 \cdot 1\,000}} = 1,73 \text{ cm.} \quad (6)$$

¹ Această aplicație are scop didactic ; în practică dimensionarea se face numai cu una din teoriile de rezistență (v. *Manualul inginerului mecanic*, Ed. tehnica, 1973, pag. 637).

d) *Ipoteza a IV-a.* Relația (19.12) devine, pentru $\sigma_2 = 0$

$$\sigma_{ech_4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3}. \quad (7)$$

Înlocuind pe σ_1 și σ_3 cu valorile determinate mai sus și utilizând și (19.13) se obține

$$\sigma_{ech_4} = \frac{p \sqrt{3R_2^4 + R_1^4}}{R_2^3 - R_1^3} \leq \sigma_a. \quad (8)$$

Rezolvând ecuația de gradul 2 ce se obține din (8), se determină raza R_2^{IV} din relația

$$R_2^{IV} = R_1 \sqrt{\frac{\eta + \sqrt{4\eta - 3}}{\eta - 3}}, \quad (9)$$

unde

$$\eta = \left(\frac{\sigma_a}{p} \right)^2. \quad (10)$$

Făcând înlocuirile numerice se găsește:

$$\eta = 9 \text{ și } R_2^{IV} = 1,57 \text{ cm.}$$

19.3. Un cilindru de presă avind raza interioară $R_1 = 20$ cm și raza exterioară $R_2 = 24$ cm, este supus unei presiuni interioare $p = 500$ daN/cm². Să se verifice cilindrul după a II-a, a III-a și a IV-a ipoteză de rezistență, ținând seamă de influența fundului cilindrului, dacă $\sigma_a = 3500$ daN/cm². Se va lua $\nu = 0,3$.

Rezolvare. Eforturile unitare maxime, care apar la raza interioară a cilindrului, au valorile date de formulele (19.7), (19.6), (19.3):

$$\sigma_{t,max} = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = 500 \cdot \frac{24^2 + 20^2}{24^2 - 20^2} \approx 2800 \text{ daN/cm}^2.$$

$$\sigma_{r,max} = -p = -500 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_z = \frac{p R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{500 \cdot 20^2}{24^2 - 20^2} = 1135 \text{ daN/cm}^2.$$

a) *Ipoteza a II-a.* După ipoteza a II-a, pentru starea spațială de eforturi unitare, se utilizează relațiile (19.10) și (19.13)

$$\sigma_{ech_2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_a,$$

unde $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. În cazul problemei: $\sigma_1 = \sigma_{t,max}$; $\sigma_2 = \sigma_r$; $\sigma_3 = \sigma_{r,max}$; $\sigma_a = 2800 - 0,3(-500 + 1135) = 2800 - 190 = 2610 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a$.

b) *Ipoteza a III-a.* După ipoteza a III-a se aplică relațiile (19.11) și (19.13)

$$\sigma_{ech_3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_a,$$

$$\sigma_{ech_3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2800 - (-500) = 3300 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

c) *Ipoteza a IV-a.* Efortul unitar echivalent are valoarea:

$$\begin{aligned} \sigma_{ech_4} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} [(2800 - 1135)^2 + (1135 + 500)^2 + (-500 - 2800)^2]} = \\ &= 2860 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned}$$

Se vede că:

$$\sigma_{ech_4} < \sigma_a.$$

Rezultă că după toate cele trei ipoteze de calcul cilindrul rezistă în bune condiții.

19.4. Un cilindru de oțel este supus unei presiuni interioare $p_i = 2000$ daN/cm². Cilindrul este fretat și se execută dintr-un tub interior de raze $R_1 = 5$ cm și $R_2 = 10$ cm și din unul exterior de raze $R_2 = 10$ cm și $R_3 = 15$ cm. Grosimea de fretaj este $\delta = 0,08$ mm. Se cere să se verifice cilindrul după cea de-a treia ipoteză, dacă $\sigma_a = 3500$ daN/cm², determinind:

1) variația eforturilor unitare dacă tubul s-ar executa dintr-o singură piesă de raze $R_1 = 5$ cm și $R_3 = 15$ cm;

2) presiunea de fretaj;

3) variația eforturilor unitare ținind seamă de efectul fretajului.

Rezolvare. 1) În cazul cînd tubul se execută dintr-o singură piesă, eforturile unitare maxime sînt date de relațiile (19.6) — (19.9):

$$\sigma_r = -2000 \text{ daN/cm}^2 = -p_i,$$

$$\sigma_t = p_i \frac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} = 2000 \frac{15^2 + 5^2}{15^2 - 5^2} = 2500 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{r_2} = 0; \quad \sigma_{t_2} = \frac{2p_i R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} = \frac{2 \cdot 2000 \cdot 5^2}{15^2 - 5^2} = 500 \text{ daN/cm}^2.$$

După cea de-a treia ipoteză se obține:

$$\sigma_{ech_3} = \sigma_t - \sigma_r = 2500 - (-2000) = 4500 \text{ daN/cm}^2 > \sigma_a.$$

Se vede că fretajul este necesar.

2) Presiunea de fretaj se obține din relația (19.14):

$$\begin{aligned} p &= \frac{\delta E (R_2^2 - R_1^2) (R_3^2 - R_2^2)}{2 R_2^2 (R_3^2 - R_1^2)} = \\ &= \frac{0,008 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot (10^2 - 5^2) (15^2 - 10^2)}{2 \cdot 10^3 \cdot (15^2 - 5^2)} = 394 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned}$$

3) Eforturile unitare când se ține seamă de fretaj sint date de relațiile (19.15) – (19.18).

– La raza interioară a cilindrului interior :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= -p_i = -2\,000 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma_t &= p_i \frac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} - 2p \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = 2\,000 \frac{15^2 + 5^2}{15^2 - 5^2} - 2 \cdot 394 \cdot \frac{10^2}{10^2 - 5^2} = \\ &= 2\,500 - 1\,051 = 1\,449 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned} \right.$$

– La raza exterioară a cilindrului interior :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma'_r &= -p_i \frac{R_1^2(R_3^2 - R_2^2)}{R_2^2(R_3^2 - R_1^2)} - p = -2\,000 \frac{5^2(15^2 - 10^2)}{10^2(15^2 - 5^2)} - 394 = \\ &= -312 - 394 = -706 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma'_t &= p_i \frac{R_1^2(R_2^2 + R_3^2)}{R_2^2(R_3^2 - R_1^2)} - p \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_2^2 - R_1^2} = 2\,000 \frac{5^2(10^2 + 15^2)}{10^2(15^2 - 5^2)} - \\ &- 394 \frac{5^2 + 10^2}{10^2 - 5^2} = 812 - 656 = 156 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned} \right.$$

– La raza interioară a cilindrului exterior :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma''_r &= \sigma'_r = -706 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma''_t &= p_i \frac{R_1^2(R_2^2 + R_3^2)}{R_2^2(R_3^2 - R_1^2)} + p \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} = 2\,000 \frac{5^2(10^2 + 15^2)}{10^2(15^2 - 5^2)} + \\ &+ 394 \frac{10^2 + 15^2}{15^2 - 10^2} = 812 + 1\,024 = 1\,836 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned} \right.$$

– La raza exterioară a cilindrului exterior :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= 0; \\ \sigma_t &= \frac{2p_i R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} + \frac{2p R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = \frac{2 \cdot 2\,000 \cdot 5^2}{15^2 - 5^2} + \frac{2 \cdot 394 \cdot 10^2}{15^2 - 10^2} = 500 + 630 = \\ &= 1\,130 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned} \right.$$

Se vede că punctele cele mai solicitate sint cele din interiorul ambilor cilindri. Utilizînd relația (19.11) se poate face verificarea pentru aceste puncte :

$$\begin{aligned} \sigma_t - \sigma_r &= 1\,448 - (-2\,000) = 3\,448 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a; \\ \sigma''_t - \sigma''_r &= 1\,836 - (-706) = 2\,542 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a. \end{aligned}$$

Se observă că prin fretaj valoarea eforturilor unitare maxime în cilindru scade. Diagramele eforturilor unitare pentru cele două cazuri sint reprezentate în figura 19.4.

În figura 19.4, *a* este trasată diagrama de variație a eforturilor unitare pentru cilindrul dintr-o singură bucată, în figura 19.4, *b* este trasată diagrama pentru cilindrul fretat, iar în figura 19.4, *c* sint suprapuse cele două diagrame pentru a putea fi comparate.

19.5. Să se determine mărimea razei R_2 și presiunea de fretaj, astfel încît, în vederea unei utilizări optime a materialului, efortul unitar echivalent $\sigma_{ech} = \sigma_t - \sigma_r$ la razele interioare a doi cilindri fretați să fie același și egal cu rezistența admisibilă a materialului.

Rezolvare. După cea de-a treia ipoteză de rezistență dacă se notează cu indicele 1 eforturile unitare la raza interioară a cilindrului interior și cu indicele 2 eforturile unitare la raza interioară a cilindrului exterior, se obține :

$$\sigma_{t_1} - \sigma_{r_1} \leq \sigma_a, \quad (1)$$

$$\sigma_{t_2} - \sigma_{r_2} \leq \sigma_a. \quad (2)$$

Pentru ca materialul să fie utilizat cît mai bine, conform enunțului rezultă :

$$\sigma_{ech} = \sigma_{t_1} - \sigma_{r_1} = \sigma_{t_2} - \sigma_{r_2} = \sigma_a. \quad (3)$$

Din formulele (19.15) și (19.17) se obține :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_i; \\ \sigma_{t_1} &= \frac{R_1^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_1^2} p_i - \frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} p; \\ \sigma_{r_1} &= -\frac{p_i R_1^2(R_3^2 - R_2^2)}{R_2^2(R_3^2 - R_1^2)} - p; \\ \sigma_{t_2} &= \frac{p_i R_1^2(R_2^2 + R_3^2)}{R_2^2(R_3^2 - R_1^2)} + p \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \end{aligned}$$

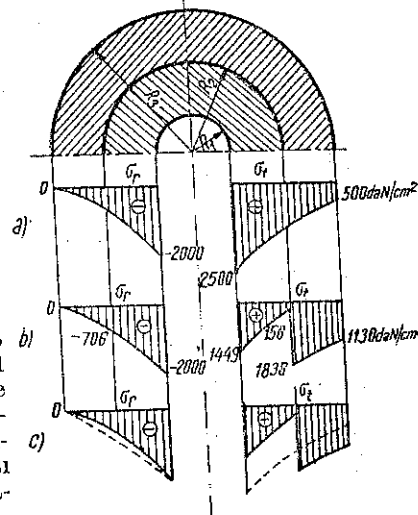


Fig. 19.4

Înlocuind aceste relații în (3) rezultă :

$$\left(\frac{R_1^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_1^2} + 1 \right) p_i - \frac{2R_2^2}{R_3^2 - R_1^2} p = p_i \frac{2R_1^2 R_3^2}{R_2^2 (R_3^2 - R_1^2)} + p \left(\frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} + 1 \right).$$

Din această relație, grupind termenii, se poate obține :

$$p \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} + \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_1^2} \right) = p_i \frac{R_2^2 (R_3^2 - R_1^2)}{(R_3^2 - R_1^2) \cdot R_2^2} \quad (4)$$

Din relația (4) se determină presiunea de fretaj p ; înlocuind valorile lui σ_i , σ_r și p în formula (3) se obține după unele reduceri :

$$\begin{aligned} \sigma_{ech.} = \sigma_i - \sigma_r &= \frac{R_1^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_1^2} p_i - \frac{2R_2^2}{R_3^2 - R_1^2} p + p_i = \\ &= \frac{2p_i R_3^2 R_2^2}{2R_2^2 R_3^2 - R_3^2 R_1^2 - R_2^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Dimensiunea R_2 optimă se determină punind condiția ca efortul unitar echivalent să fie minim; pentru aceasta se egalează cu zero derivata expresiei (5), considerând R_2 variabil

$$\frac{d\sigma_{ech.}}{dR_2} = \frac{2R_2(R_1^2 - R_3^2 R_2^2)}{(2R_2^2 R_3^2 - R_3^2 R_1^2 - R_2^2)^2} = 0. \quad (6)$$

Efortul unitar echivalent este minim pentru

$$R_2 = \sqrt{R_1 R_3}. \quad (7)$$

Efortul unitar echivalent minim se obține înlocuind relația (7) în relația (5) :

$$\sigma_{ech.} = \frac{p_i R_3}{R_3 - R_1} \quad (8)$$

Punind condiția $\sigma_{ech.} = \sigma_a$ se determină raza optimă :

$$R_3 = \frac{\sigma_a R_1}{\sigma_a - p_i} \quad (9)$$

Înlocuind valoarea (7) în (4) se obține :

$$p \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_1 R_3} + \frac{R_1 R_3}{R_1 R_3 - R_1^2} \right) = p_i \frac{R_3^2 (R_1 R_3 - R_1^2)}{(R_3^2 - R_1^2) R_1 R_3},$$

iar presiunea optimă de fretaj este

$$p = p_i \frac{R_3 - R_1}{2(R_3 + R_1)} \quad (10)$$

19.6. Să se dimensioneze un cilindru fretat, de rază interioară $R_1 = 15$ cm, supus unei presiuni $p_i = 1\,500$ daN/cm², dacă rezistența admisibilă este, $\sigma_a = 3\,000$ daN/cm². Să se determine presiunea și grosimea de fretaj optime, utilizând rezultatele din problema 19.5.

Rezolvare. Din relațiile (9) și (7) ale problemei 19.5 se obține

$$R_3 = \frac{\sigma_a R_1}{\sigma_a - p_i} = \frac{3\,000 \cdot 15}{3\,000 - 1\,500} = 30 \text{ cm};$$

$$R_2 = \sqrt{R_1 R_3} = \sqrt{15 \cdot 30} = 21,2 \text{ cm}.$$

Presiunea optimă de fretaj se determină din relația (10) (problema 19.5) :

$$p = p_i \frac{R_3 - R_1}{2(R_3 + R_1)} = \frac{1\,500(30 - 15)}{2(30 + 15)} = 250 \text{ daN/cm}^2.$$

Grosimea de fretaj se obține din relația (19.14), în funcție de R_2 , înlocuind celelalte raze și presiunea de fretaj p :

$$\delta = \frac{2p R_2^2 (R_3^2 - R_1^2)}{E(R_2^2 - R_1^2)(R_3^2 - R_2^2)} = \frac{2p_i R_2}{E} = \frac{2 \cdot 1\,500 \cdot 21,2}{2,1 \cdot 10^6} \approx 0,03 \text{ cm} = 0,3 \text{ mm}.$$

Verificarea cilindruului fretat se face aplicând formulele (19.15) și (19.17), pentru determinarea eforturilor unitare la razele interioare ale celor doi cilindri componenți :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= -p_i = -1\,500 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma_i &= p_i \frac{R_3^2 + R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} - 2p \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = 1\,500 \frac{30^2 + 15^2}{30^2 - 15^2} - \\ &\quad - 2 \cdot 250 \frac{21,2^2}{21,2^2 - 15^2} = 1\,500 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= -p_i \frac{R_1^2 (R_3^2 - R_2^2)}{R_3^2 (R_3^2 - R_1^2)} - p = -1\,500 \frac{15^2 (30^2 - 21,2^2)}{21,2^2 (30^2 - 15^2)} - 250 = \\ &= -500 - 250 = -750 \text{ daN/cm}^2; \\ \sigma_i &= p_i \frac{R_1^2 (R_3^2 + R_2^2)}{R_3^2 (R_3^2 - R_1^2)} + p \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} = 1\,500 \frac{15^2 (30^2 + 21,2^2)}{21,2^2 (30^2 - 15^2)} + \\ &\quad + 250 \frac{21,2^2 + 30^2}{30^2 - 21,2^2} = 1\,500 + 750 = 2\,250 \text{ daN/cm}^2. \end{aligned} \right.$$

$$\sigma_i - \sigma_r = 1\,500 - (-1\,500) = 3\,000 = \sigma_a,$$

$$\sigma_i - \sigma_r = 2\,250 - (-750) = 3\,000 = \sigma_a.$$

Cilindrul este bine dimensionat.

19.7. Să se calculeze presiunea de fretaj și eforturile unitare maxime care apar în butucul unui disc care se frează pe un arbore, dacă se dau : raza arborelui $R_2 = 10$ cm ; raza exterioară a butucului $R_3 = 20$ cm ; grosimea de fretaj $\delta = 0,1$ mm ; arborele și discul sînt executați din oțel (Fig. 19.7).

Rezolvare. Presiunea de fretaj se calculează cu ajutorul formulei (19.19) :

$$p = \frac{\delta E (R_3^2 - R_2^2)}{2 R_2 R_3^2} = \frac{0,01 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot (20^2 - 10^2)}{2 \cdot 10 \cdot 20^3} = 788 \text{ daN/cm}^2.$$

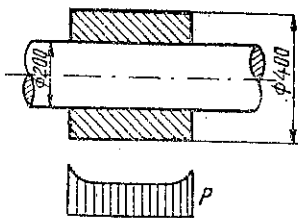


Fig. 19.7

Pentru determinarea eforturilor unitare se poate considera că discul este solicitat de o presiune interioară $p_i = p = 788 \text{ daN/cm}^2$. Eforturile unitare maxime apar la interior și se determină cu ajutorul formulelor (19.6) și (19.7), în care se înlocuiesc R_1 cu R_2 și R_2 cu R_3 :

$$\sigma_r = -p_i = -788 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_t = \frac{p_i (R_3^2 + R_2^2)}{R_3^2 - R_2^2} = \frac{788 (20^2 + 10^2)}{20^2 - 10^2} = 1310 \text{ daN/cm}^2.$$

Observație. În calculul efectuat, s-a presupus că presiunea de fretaj este constantă pe toată lungimea butucului. În realitate în regiunile de la capete presiunea este mai mare decît în regiunea de la mijloc (Fig. 19.7).

19.8. Să se găsească presiunea la care un tub de rază interioară $R_1 = 5$ cm și rază exterioară $R_2 = 8$ cm ajunge în întregime să se deformeze plastic. Se consideră limita de curgere a materialului din care este executat tubul $\sigma_c = 5000 \text{ daN/cm}^2$, iar moduli de plasticitate $E_p = 0$.

Rezolvare. După formula (19.21), constanta k are valoarea :

$$k = 0,5 \sigma_c = 0,5 \cdot 5000 = 2500 \text{ daN/cm}^2.$$

Se aplică formula (19.20), unde presiunea exterioară $p_e = 0$,

$$p_i = 2k \ln \frac{R_2}{R_1} = 2 \cdot 2500 \ln \frac{8}{5} = 2350 \text{ daN/cm}^2.$$

19.9. Un tub cu pereți groși este supus la o presiune interioară. Știind că tubul are o zonă de deformare elastică și o zonă de deformare plastică, se cere să se determine raza suprafeței limită dintre aceste două zone considerînd modulul de plasticitate $E_p = 0$ (Fig. 19.9).

Rezolvare. Dacă diferența de presiune $p_i - p_e$ este mai mică decît presiunea necesară pentru ca întregul tub să ajungă în stadiul plastic, dar suficient de mare pentru a se depăși în fibrele de la suprafața interioară a tubului limita de curgere, o parte din secțiune se va deforma plastic (partea interioară), iar partea exterioară rămîne în domeniul elastic. Pentru a se determina raza R_2 care delimitează zona aflată în stadiul plastic,

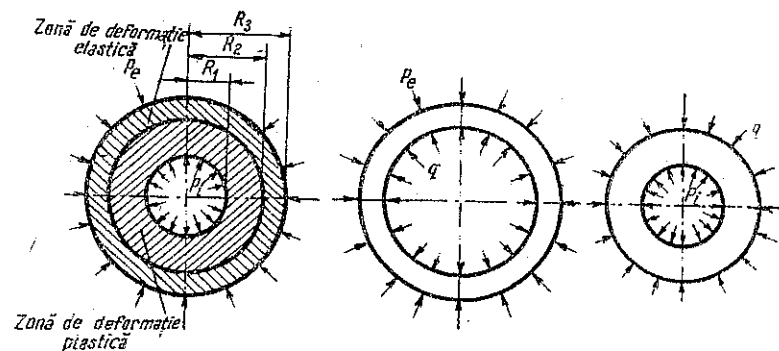


Fig. 19.9

se separă cele două zone ca în figura 19.9, înlocuind influența lor reciprocă printr-o presiune necunoscută q .

Pentru zona de plasticitate se poate aplica formula (19.20), în care se înlocuiește $k = 0,5 \sigma_c$ și $p_e = q$:

$$p_i - q = 2k \ln \frac{R_2}{R_1} = \sigma_c \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (1)$$

Se aplică pentru zona elastică relația ipotezei a III-a de rezistență la raza R_2 , unde apare efortul unitar de curgere :

$$\sigma_r = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (2)$$

Eforturile unitare σ_1 și σ_3 se determină din relațiile (19.1) și (19.2) în care R_1 se înlocuiește cu R_2 , R_2 cu R_3 și $p_i = q$, iar raza $r = R_2$:

$$\sigma_r = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{R_2^2 q - R_3^2 p_e}{R_3^2 - R_2^2} + \frac{(q - p_e) R_2^2 R_3^2}{R_2^2 (R_3^2 - R_2^2)} - \frac{R_2^2 q - R_3^2 p_e}{R_3^2 - R_2^2} + \frac{(q - p_e) R_2^2 R_3^2}{R_2^2 (R_3^2 - R_2^2)} = \frac{2(q - p_e) R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \quad (3)$$

Din relația (3) se obține :

$$q - p_e = \frac{(R_3^2 - R_2^2) \sigma_c}{2 R_3^2} \quad (4)$$

Adunînd relațiile (1) și (4) se găsește :

$$p_i - p_e = \sigma_c \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\sigma_c (R_3^2 - R_2^2)}{2 R_3^2} = \sigma_c \left[\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3^2 - R_2^2}{2 R_3^2} \right] \quad (5)$$

Prin încercări se poate obține valoarea lui R_2 , cunoscînd astfel porțiunea din tub solicitată în stadiul plastic.

19.10. Să se determine zona ce se deformează în stadiul plastic, la un cilindru supus unei presiuni interioare $p_i = 2000 \text{ daN/cm}^2$, știind că : $R_1 = 5$ cm ; $R_3 = 8$ cm ; $\sigma_c = 5000 \text{ daN/cm}^2$ și $E_p = 0$.

Rezolvare. Se verifică dacă tubul se deformează în stadiul plastic. Presiunea minimă la care tubul începe să se deformeze plastic se obține din relația (4) din problema 19.9, unde se consideră raza $R_2 = R_1$, iar $q = p_i$.

Înlocuind pe $p_e = 0$, se obține:

$$p_i = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2^2} \sigma_e = \frac{8^2 - 5^2}{2 \cdot 8^2} \cdot 5\,000 = 1\,523 \text{ daN/cm}^2 < p_i. \quad (1)$$

Tubul este, în acest caz, parțial plasticizat, deoarece presiunea $p_i = 2\,000 \text{ daN/cm}^2$ este cuprinsă între presiunea $p_i' = 1\,523 \text{ daN/cm}^2$, la care începe plasticizarea tubului, și presiunea $p_i = 2\,350 \text{ daN/cm}^2$, la care tubul este solicitat total plastic (v. problema 19.8). Cu datele numerice: $2\,000 = 5\,000 \left(\ln \frac{R_2}{5} + \frac{8^2 - R_2^2}{2 \cdot 8^2} \right)$ (relația 5, problema 19.9).

Prin încercări se obține $R_2 = 6 \text{ cm}$.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

19.11. Să se dimensioneze tubul din problema 19.2 după ipoteza a II-a de rezistență, dacă se ține seamă de efectul existenței fundului. Se dau: $p = 1\,000 \text{ daN/cm}^2$; $\sigma_a = 3\,000 \text{ daN/cm}^2$; $R_1 = 1 \text{ cm}$; $\nu = 0,3$. Să se compare rezultatul cu cel obținut în problema 19.2.

Răspuns. Se ia în considerare efectul existenței fundului, ținând seama în calcul de efortul unitar σ_r . În acest caz, pentru un punct de la raza interioară a tubului se poate scrie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_r &= p \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}; \\ \sigma_2 = \sigma_x &= p \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}; \\ \sigma_3 = \sigma_r &= -p. \end{aligned}$$

Înlocuind aceste valori în relația (19.11), corespunzătoare ipotezei a II-a de rezistență, se obține:

$$R_2 = R_1 \sqrt{\frac{\sigma_a + (1 - 2\nu)p}{\sigma_a - (1 + \nu)p}} = 1 \sqrt{\frac{3\,000 + (1 - 2 \cdot 0,3) \cdot 1\,000}{3\,000 - (1 + 0,3) \cdot 1\,000}} \approx 1,41 \text{ cm}.$$

Se observă că raza obținută este mai mică decât R_2' din problema 19.2 deci calculul efectuat în acea problemă este acoperitor.

19.12. Să se dimensioneze un cilindru fretat supus unei presiuni interioare $p_i = 2\,000 \text{ daN/cm}^2$, dacă rezistența admisibilă este $\sigma_a = 3\,500 \text{ daN/cm}^2$. Se dă raza interioară $R_1 = 5 \text{ cm}$. Să se compare rezultatul cu cel dat în problema 19.4.

Răspuns. Utilizând rezultatele din problema 19.4, se găsește:

$$R_3 = 11,7 \text{ cm}; \quad R_2 = 7,65 \text{ cm}.$$

Se vede că utilizând bine materialul, grosimea totală a celor doi cilindri fretați scade de la 10 cm la 6,7 cm.

PROBLEME RECAPITULATIVE

20.1. Elementul sensibil al unui termostat este constituit dintr-o lamelă bimetalică, încadrată la un capăt și avînd în capătul liber un contact C , ca în figura 20.1, *a*. Să se calculeze forța Q cu care lamela apasă asupra contactului la o creștere a temperaturii cu Δt° .

Se dau: $l = 10 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ mm}$, $h = 3 \text{ mm}$, $\Delta t = 50^\circ\text{C}$, $E_1 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$, $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}$ (oțel), $E_2 = 1,15 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$, $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}$ (cupru).

Rezolvare. Se aplică principiul suprapunerii efectelor, studiind separat solicitarea termică și cea de încovoiere, produsă de forța de contact Q .

1) Solicitarea lamelei datorată încălzirii. Se consideră o porțiune din lamelă de lungime c . Datorită valorilor diferite ale coeficienților de dilatare termică liniară, în urma încălzirii lamelei cu Δt° , cele două materiale fiind lipite între ele nu se pot dilata liber și ca urmare apar forțele axiale P_1 și P_2 . Deoarece acestea sînt excentrice față de axa neutră a lamelei,

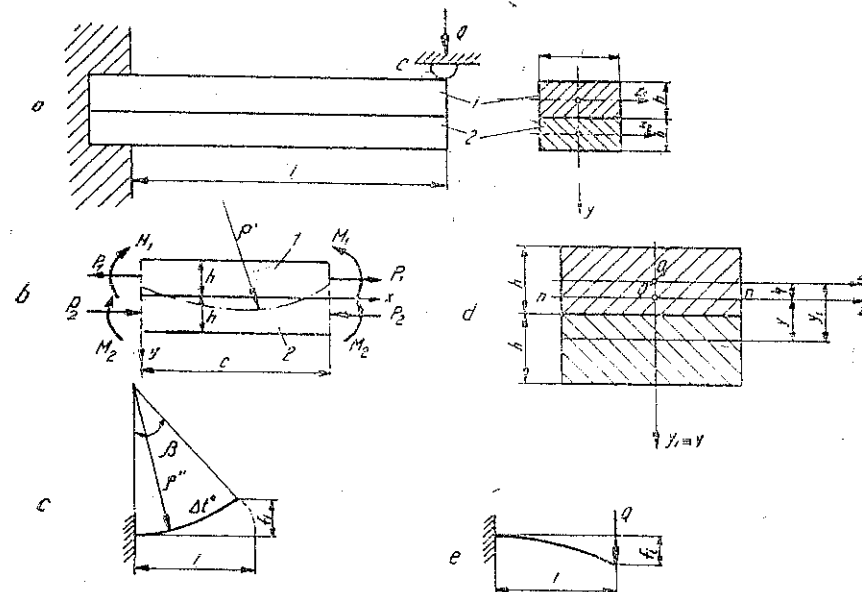


Fig. 20.1

apar și momentele M_1 și M_2 , ca în figura 20.1, *b*. Între eforturile P_1 , P_2 , M_1 și M_2 există relațiile

$$P_1 = P_2 = P \text{ și } Ph = M_1 + M_2 = \frac{E_1 I_1}{\rho' - \frac{h}{2}} + \frac{E_2 I_2}{\rho' + \frac{h}{2}}, \quad (1)$$

în care s-a notat cu ρ' raza de curbură a fibrei medii a lamelei în urma deformării și cu I_1 , I_2 —momentele de inerție ale secțiunilor fiecăruia din cele două materiale în raport cu axele z_1 , respectiv z_2 care trec prin centrele de greutate.

Pe suprafața de contact dintre cele două materiale trebuie ca lungirile să fie egale, adică

$$c \alpha_1 \Delta t + \frac{P_1 c}{E_1 h b} + \frac{h c}{2 \left(\rho' - \frac{h}{2} \right)} = c \alpha_2 \Delta t - \frac{P_2 c}{E_2 h b} - \frac{h c}{2 \left(\rho' + \frac{h}{2} \right)}, \quad (2)$$

în care: $c \alpha_1 \Delta t$, $c \alpha_2 \Delta t$ sînt lungirile termice;

$$\frac{P_1 c}{E_1 h b}, \frac{P_2 c}{E_2 h b} - \text{lungirile produse de solicitările axiale};$$

$$\frac{h c}{2 \left(\rho' - \frac{h}{2} \right)}, \frac{h c}{2 \left(\rho' + \frac{h}{2} \right)} - \text{lungirile produse de încovoiere.}$$

Se înlocuiesc condițiile (1) în relația (2), avînd în vedere că

$$I_1 = I_2 = \frac{b h^3}{12}.$$

În relațiile (1) și (2) se neglijează termenii $\frac{h}{2}$ în raport cu ρ' , ceea ce duce la

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t}{h \left[\frac{E_1 + E_2}{12} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) + 1 \right]}.$$

Săgeata f_t în capătul liber al lamelei este (Fig. 20.1, *c*)

$$f_t = \rho' (1 - \cos \beta), \text{ în care } \beta = \frac{l}{\rho'}.$$

2) Solicitarea la încovoiere datorită forței de contact Q . Ipoteza secțiunii plane fiind valabilă și pentru încovoierea unei bare cu secțiune neo-

mogenă, expresia efortului unitar normal într-un punct oarecare al secțiunii este

$$\sigma = \frac{E}{\rho''} y,$$

în care ρ'' este raza de curbură a fibrei medii deformate a lamelei.

Se consideră mai întîi sistemul de coordonate $z_1 O_1 y_1$, cu originea în centrul de greutate al secțiunii materialului 1, ca în figura 20.1, *d*. Deci

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{\rho''} (y_1 - \eta); \quad \sigma_2 = \frac{E_2}{\rho''} (y_1 - \eta),$$

în care η este ordonata axei neutre, pentru determinarea căreia se scrie condiția că rezultanta eforturilor unitare pentru întreaga secțiune a lamelei este nulă

$$\int_A \sigma dA = 0 = \frac{E_1}{\rho''} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (y_1 - \eta) b dy_1 + \frac{E_2}{\rho''} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{3h}{2}} (y_1 - \eta) b dy_1.$$

$$\text{Rezultă } \eta = \frac{h}{1 + \frac{E_1}{E_2}}.$$

Ecuatia de echivalență a momentului este:

$$M = \int_A \sigma y dA = \int_{-\left(\frac{h}{2} + \eta\right)}^{\frac{h}{2} - \eta} \frac{E_1}{\rho''} y^2 b dy + \int_{\frac{h}{2} - \eta}^{\frac{3h}{2} - \eta} \frac{E_2}{\rho''} y^2 b dy,$$

din care se obține:

$$\frac{1}{\rho''} = M \frac{12}{E_2 b h^3} \cdot \frac{1}{\frac{12}{1 + \frac{E_2}{E_1}} + 1 + \frac{E_1}{E_2}}.$$

Expresia rigidității la încovoiere a lamelei este:

$$EI_z = \frac{b h^3}{12} \cdot \frac{E_2}{\frac{12}{1 + \frac{E_2}{E_1}} + 1 + \frac{E_1}{E_2}}.$$

apar și momentele M_1 și M_2 , ca în figura 20.1, *b*. Între eforturile P_1 , P_2 , M_1 și M_2 există relațiile

$$P_1 = P_2 = P \text{ și } Ph = M_1 + M_2 = \frac{E_1 I_1}{\rho' - \frac{h}{2}} + \frac{E_2 I_2}{\rho' + \frac{h}{2}}, \quad (1)$$

în care s-a notat cu ρ' raza de curbură a fibrei medii a lamelei în urma deformării și cu I_1 , I_2 —momentele de inerție ale secțiunilor fiecăruia din cele două materiale în raport cu axele z_1 , respectiv z_2 care trec prin centrele de greutate.

Pe suprafața de contact dintre cele două materiale trebuie ca lungirile să fie egale, adică

$$c \alpha_1 \Delta t + \frac{P_1 c}{E_1 h b} + \frac{h c}{2 \left(\rho' - \frac{h}{2} \right)} = c \alpha_2 \Delta t - \frac{P_2 c}{E_2 h b} - \frac{h c}{2 \left(\rho' + \frac{h}{2} \right)}, \quad (2)$$

în care: $c \alpha_1 \Delta t$, $c \alpha_2 \Delta t$ sînt lungirile termice;

$$\frac{P_1 c}{E_1 h b}, \frac{P_2 c}{E_2 h b} - \text{lungirile produse de solicitările axiale};$$

$$\frac{h c}{2 \left(\rho' - \frac{h}{2} \right)}, \frac{h c}{2 \left(\rho' + \frac{h}{2} \right)} - \text{lungirile produse de încovoiere}.$$

Se înlocuiesc condițiile (1) în relația (2), avînd în vedere că

$$I_1 = I_2 = \frac{b h^3}{12}.$$

În relațiile (1) și (2) se neglijează termenii $\frac{h}{2}$ în raport cu ρ' , ceea ce duce la

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t}{h \left[\frac{E_1 + E_2}{12} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) + 1 \right]}.$$

Săgeata f , în capătul liber al lamelei este (Fig. 20.1, *c*)

$$f = \rho' (1 - \cos \beta), \text{ în care } \beta = \frac{l}{\rho'}.$$

2) Solicitarea la încovoiere datorită forței de contact Q . Ipoteza secțiunii plane fiind valabilă și pentru încovoierea unei bare cu secțiune neo-

mogenă, expresia efortului unitar normal într-un punct oarecare al secțiunii este

$$\sigma = \frac{E}{\rho''} y,$$

în care ρ'' este raza de curbură a fibrei medii deformate a lamelei.

Se consideră mai întîi sistemul de coordonate $z_1 y_1$, cu originea în centrul de greutate al secțiunii materialului 1, ca în figura 20.1, *d*. Deci

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{\rho''} (y_1 - \eta); \quad \sigma_2 = \frac{E_2}{\rho''} (y_1 - \eta),$$

în care η este ordonata axei neutre, pentru determinarea căreia se scrie condiția că rezultanta eforturilor unitare pentru întreaga secțiune a lamelei este nulă

$$\int_A \sigma dA = 0 = \frac{E_1}{\rho''} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (y_1 - \eta) b dy_1 + \frac{E_2}{\rho''} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{3h}{2}} (y_1 - \eta) b dy_1.$$

$$\text{Rezultă } \eta = \frac{h}{1 + \frac{E_1}{E_2}}.$$

Ecuatia de echivalență a momentului este:

$$M = \int_A \sigma y dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E_1}{\rho''} y^2 b dy + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{3h}{2}} \frac{E_2}{\rho''} y^2 b dy,$$

din care se obține:

$$\frac{1}{\rho''} = M \frac{12}{E_2 b h^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{E_2}{E_1} + 1 + \frac{E_1}{E_2}}.$$

Expresia rigidității la încovoiere a lamelei este:

$$EI_z = \frac{b h^3}{12} \cdot \frac{E_2}{1 + \frac{E_2}{E_1} + 1 + \frac{E_1}{E_2}}.$$

iar săgeata f_i , produsă de forța Q (Fig. 20.1, c):

$$f_i = \frac{Ql^3}{3EI_z}$$

Valoarea forței Q se determină din condiția $f_t = f_i$, rezultând:

$$Q = \frac{3EI_z \rho'}{l^3} (1 - \cos \beta).$$

Cu datele numerice se obține:

$$\rho' = \frac{h}{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t} \left[\frac{E_1 + E_2}{12} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) + 1 \right] =$$

$$= \frac{0,3}{(17 - 12) \cdot 10^{-6} \cdot 50} \left[\frac{2,1 + 1,15}{12} \left(\frac{1}{2,1} + \frac{1}{1,15} \right) + 1 \right] = 1637 \text{ cm},$$

$$EI_z = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{E_2}{1 + \frac{E_2}{E_1}} + 1 + \frac{E_1}{E_2} =$$

$$= \frac{0,8 \cdot 0,3^3}{12} \cdot \frac{1,15 \cdot 10^6}{1 + \frac{1,15}{2,1}} + 1 + \frac{2,1}{1,15} = 196 \text{ daN} \cdot \text{cm}^2,$$

$$Q = \frac{3EI_z}{l^3} \rho' (1 - \cos \beta) = \frac{3 \cdot 196 \cdot 1637}{10^3} \left(1 - \cos \frac{10}{1637} \right) = 0,018 \text{ daN}.$$

20.2. Se cere dimensionarea grinzii de rulare din figura 20.2, a, construită ca grindă cu inima plină. Din motive constructive, înălțimea grinzii este limitată la $h = 600 \text{ mm}$. Se vor studia două variante de realizare, a secțiunii: nituită, sudată. Rezistențele admisibile sînt: $\sigma_a = 1400 \text{ daN/cm}^2$, $\tau_a = 1120 \text{ daN/cm}^2$, $\tau_{as} = 910 \text{ daN/cm}^2$. Greutatea proprie pe unitatea de lungime se apreciază cu formula $g = k \cdot l$, unde $k = 15 \dots 30 \text{ daN/cm}^2$, iar l este deschiderea grinzii în m.

Rezolvare. Pentru greutatea proprie, luînd $k = 20$, se obține:

$$g = 20 \cdot 10 = 200 \text{ daN/m}.$$

Momentul maxim maximorum are loc pentru poziția convoiului, format din cele două forțe de 122 kN , la care mijlocul grinzii împarte în două părți egale distanța dintre rezultanta convoiului și forța în dreptul căreia se produce momentul maxim maximorum.

În cazul de față, avînd două forțe egale, $M_{\max \max}$ poate avea loc în dreptul oricăreia dintre ele. Se alege poziția din figura 20.2, b și se calculează $M_{\max \max}$ dat atît de convoiul mobil cît și de sarcina uniform distribuită:

$$V'_1 = \frac{122(3,5 + 5,5)}{10} = 110 \text{ kN}; V''_1 = \frac{gl}{2} = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10 \text{ kN};$$

$$V_1 = V'_1 + V''_1 = 120 \text{ kN}.$$

$$M_{\max \max} = 120 \cdot 4,5 - \frac{2 \cdot 4,5^2}{2} \approx 520 \text{ kNm}.$$

$$W_{\text{nec}} = \frac{M_{\max \max}}{\sigma_a} = \frac{520000}{1400} = 3714 \text{ cm}^3.$$

a) Secțiune nituită. Întrucît secțiunea este slăbită de găurile niturilor, pentru a calcula momentul de inerție brut al secțiunii, se consideră în calcul o slăbire de aproximativ 20%. $I_{\text{brut}} = 1,2 W_{\text{nec}} h/2$. Înălțimea fiind limitată și considerînd că se pun cîte două platbande de 10 mm sus și jos și că inima grinzii este (Fig. 20.2, c) de 550 mm înălțime, rezultă:

$$I_{\text{brut}} = 1,2 \cdot 3714 \cdot \frac{59}{2} \approx 131500 \text{ cm}^4.$$

Prin încercări se obține secțiunea din figura 20.2, c, avînd

$$I_{\text{brut}} = 131500 \text{ cm}^4; W_{\text{net}} = 4457 \text{ cm}^3; g = 182 \text{ daN/m}; d_{\text{nu}} = 23 \text{ mm}.$$

Se vede că, pentru greutatea proprie, valoarea obținută este foarte apropiată de cea luată inițial, deci se pot păstra valorile obținute pentru momente și reacțiuni.

Pentru calculul distanței dintre nituri trebuie aflată valoarea forței de lunecare care revine unui nit.

Forța de lunecare pe unitatea de lungime este $N_1 = TS/I_z$, în care T este forța tăietoare, S — momentul static al suprafeței care lunecă și I_z — momentul de inerție brut al secțiunii. Dacă niturile sînt așezate între ele la distanța e , trebuie ca un nit să fie capabil să preia forța de lunecare ce-i revine pe intervalul dintre două nituri, adică (4.13):

$$N_1 = \frac{eTS}{I_z}.$$

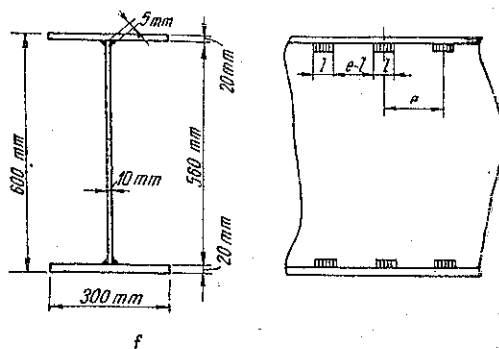
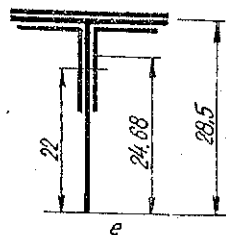
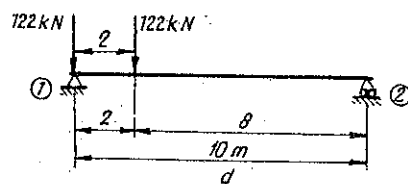
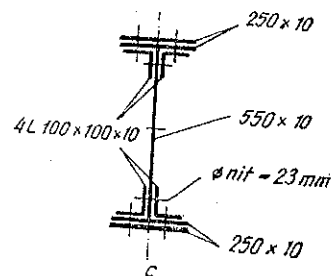
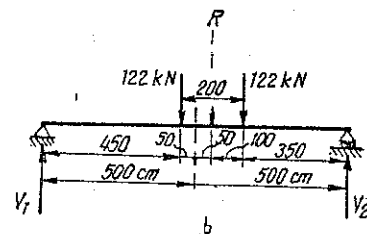
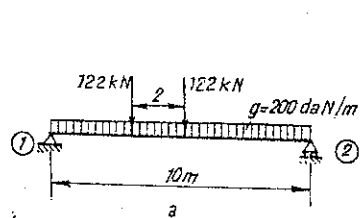


Fig. 20.2

Cunoscând efortul capabil al nitului, la presiune pe gaură sau la forfecare, se determină distanța dintre nituri:

$$e = \frac{N_1 I_z}{TS}$$

care se calculează pentru forța tăietoare maximă. Din motive constructive este bine ca distanța e să fie aceeași pentru întreaga grindă.

Forța tăietoare în reazem va fi maximă, pentru poziția în care convoiul se va găsi la marginea grinzii (Fig. 20.2, d):

$$V_1' = \frac{122 \cdot (10 + 8)}{10} \approx 220 \text{ kN}, \quad V_1'' = \frac{gl}{2} = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10 \text{ kN};$$

$$V_1 = T_{max} = 230 \text{ kN}.$$

Nitul având două secțiuni de forfecare, forța capabilă a acestuia este:

$$N_{2f} = \frac{2\pi d^2}{4} \tau_a = 2 \cdot 4,15 \cdot 1120 = 9300 \text{ daN};$$

$$N_{2g} = dt \sigma_{ag} = 2,3 \cdot 1,2800 = 6440 \text{ daN}.$$

În cazul niturilor pe inimă, pentru calculul lui S_1 , se consideră că lunecă pachetul de platbande și cele două corniere, iar pentru niturile pe talpă, la calculul lui S_2 se consideră că lunecă pachetul de platbande. Ca forță capabilă a niturii, se va lua cea mai mică dintre valorile de mai sus, adică N_{2g} .

Conform figurilor 20.2, c și 20.2, e rezultă:

$$S_1 = 2 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 28,5 + 2 \cdot 19,2 \cdot 24,68 - 2,3 \cdot 2 \cdot 22 \approx 2272 \text{ cm}^3.$$

$$S_2 = 2 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 28,5 - 2 \cdot 2 \cdot 2,3 \cdot 28,5 = 1163 \text{ cm}^3.$$

Distanțele dintre nituri pentru cele două nituri sînt:

$$e_1 = \frac{N_{2g} I_{brut}}{TS_1} = \frac{6440 \cdot 131500}{23000 \cdot 2272} = 16,2 \approx 16,5 \text{ cm},$$

$$e_2 = \frac{N_{2g} I_{brut}}{TS_2} = \frac{6440 \cdot 131500}{23000 \cdot 1163} = 31,7 \text{ cm}.$$

Se recomandă ca distanța dintre nituri să fie cuprinsă între $3d$ și $8d$. Se vede că e_1 satisface această condiție:

$$3d = 6,9 < 16,5 < 18,4 = 8d,$$

pe cind $e_2 > 8d$. Se vor așeza ambele feluri de nituri la aceeași distanță, $e = 16,5$ cm în mod alternat.

b) Secțiune sudată

Înălțimea grinzii fiind impusă prin enunțul problemei la $h = 60$ cm, rezultă momentul de inerție necesar al secțiunii:

$$I_{z\text{ nec}} = 3\,714 \cdot \frac{60}{2} = 111\,420 \text{ cm}^4.$$

Prin încercări se alcătuieste secțiunea cu dimensiunile din figura 20.2, f al cărei moment de inerție este:

$$I_z = \frac{1 \cdot 56^3}{12} + 2 \cdot \left[\frac{30 \cdot 2^3}{12} + 30 \cdot 2 \cdot 29^2 \right] = 115\,590 \text{ cm}^4 > I_{z\text{ nec}}.$$

Greutatea proprie a grinzii este:

$$g = [2 \cdot 2 \cdot 30 + 1 \cdot 56] \cdot 100 \cdot 7,85 \cdot 10^{-3} = 138 \text{ daN/m}.$$

Reacțiunea datorită greutății proprii este:

$$V_1'' = \frac{138 \cdot 10}{2} = 690 \text{ daN},$$

iar reacțiunea totală:

$$V_1 = V_1' + V_1'' = 110 + 6,9 = 116,9 \text{ kN},$$

de unde:

$$M_{\text{max max}} = 116,9 \cdot 4,5 - \frac{1,38 \cdot 4,5^2}{2} = 511 \text{ kNm}.$$

$$W_{\text{nec}} = \frac{5\,110\,000}{1\,400} = 3\,600 \text{ cm}^3; \quad I_{z\text{ nec}} = 3\,660 \cdot 30 = 110\,000 \text{ cm}^4.$$

Se vede că valoarea momentului de inerție este apropiată de cea a secțiunii alese, astfel încît nu este necesară modificarea secțiunii.

Pentru prinderea tălpilor de inimă se aleg cordoane de sudură cu grosimea de 5 mm și lungimea de 40 mm.

Efortul capabil a două cordoane de sudură așezate de o parte și de cealaltă a inimii este:

$$N_s = 2 \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 910 = 3\,640 \text{ daN}.$$

Pentru stabilirea distanței dintre cordoanele de sudură, aplicăm formula utilizată pentru calculul niturii, înlocuind efortul capabil al nitului cu cel al cordoanelor de sudură:

$$e = \frac{N_s I_z}{TS}$$

Întrucît, din motive constructive este bine ca distanța e să fie aceeași pentru întreaga grindă, se va calcula pentru valoarea maximă a forței tăietoare, corespunzătoare poziției din figura 20.2, d a convoiului. Rezultă

$$V_1' \approx 220 \text{ kN}.$$

Reacțiunea datorită greutății este $V_1'' = 6,9 \text{ kN}$.

Prin urmare: $T_{\text{max}} = 220 + 6,9 = 226,9 \text{ kN}$.

$$S = 30 \cdot 2 \cdot 29 = 1\,740 \text{ cm}^2$$

$$e = \frac{3\,640 \cdot 115\,590}{22\,690 \cdot 1\,740} = 10,7 \text{ cm} \approx 10 \text{ cm}.$$

20.3. Să se determine valoarea sarcinii uniform distribuite p pe care o poate suporta grinda din figură 20.3, a . Se dau: $b = 2$ cm, $\sigma_a = 1100 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Într-o secțiune oarecare, situată la distanța ξ de capătul liber al barei (Fig. 20.3, b) se consideră un element de lungime $d\xi$ din bară, asupra căruia acționează o forță

$$dP = p \frac{d\xi}{\cos \alpha}$$

în care $\alpha = \arctg \frac{1}{4} = 14^\circ 2' 10''$

În secțiunea x eforturile sînt

$$T_x = - \int_0^x dP = - \int_0^x p \frac{d\xi}{\cos \alpha} = - \frac{px}{\cos \alpha};$$

$$M_{tx} = - \int_0^x dP(x - \xi) = - \int_0^x p \frac{d\xi}{\cos \alpha} (x - \xi) = - \frac{px^2}{2 \cos \alpha};$$

$$M_x = \int_0^x dP(b - \xi \operatorname{tg} \alpha) = \int_0^x p \frac{d\xi}{\cos \alpha} (b - \xi \operatorname{tg} \alpha) = \frac{px}{\cos \alpha} \left(b - \frac{x}{2} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

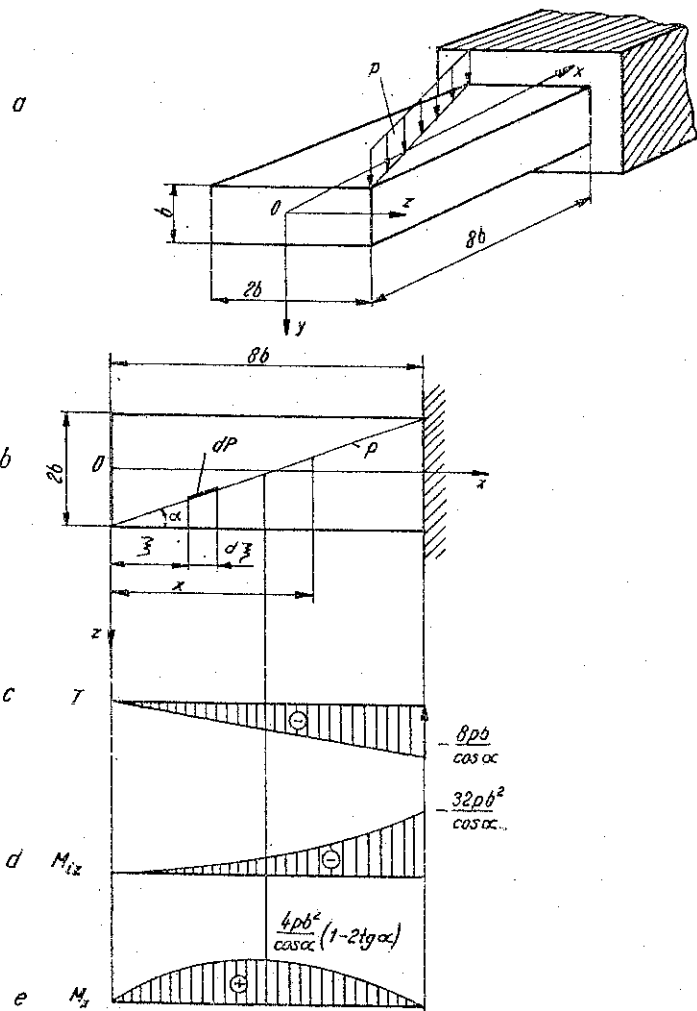


Fig. 20.3

Diagramele de eforturi corespunzătoare s-au trasat în figurile 20.3, c, d, e.

Calculul sarcinii capabile p se face pentru următoarele cazuri :

— secțiunea periculoasă este în încăstrare ($x = 8b$)

$$M_{iz_{max}} = -\frac{32pb^2}{\cos \alpha} ; M_x = 0 ;$$

Rezultă o primă valoare a sarcinii p :

$$p' = \frac{1}{96} \sigma_a b \cos \alpha ;$$

— secțiunea periculoasă este la mijlocul barei ($x = 4b$)

$$M_{iz} = -\frac{8pb^2}{\cos \alpha} ; M_{x_{max}} = \frac{4pb^2}{\cos \alpha} (1 - 2 \operatorname{tg} \alpha) ;$$

$$\sigma = \frac{M_{iz}}{W_z} = \frac{24p}{b \cos \alpha} ; \tau = \frac{M_t}{0,246 \cdot 2b \cdot b^2} = \frac{8,13p}{b \cos \alpha} (1 - 2 \operatorname{tg} \alpha).$$

Dacă se aplică teoria a treia de rezistență

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{p}{b \cos \alpha} \sqrt{24^2 + 4 \cdot 8,13^2 (1 - 2 \operatorname{tg} \alpha)^2} = \sigma_a$$

$$p'' = \frac{\sigma_a b \cos \alpha}{24 \sqrt{1 + 0,46 (1 - 2 \operatorname{tg} \alpha)^2}} ;$$

Sarcina capabilă este cea mai mică dintre valorile p' și p''

$$p_{cap} = p' = \frac{1}{96} \sigma_a b \cos \alpha = \frac{1}{96} \cdot 1100 \cdot 2 \cos 14^\circ 2' 10'' = 22 \text{ daN/cm}.$$

20.4. Să se verifice arborele cotit din figura 20.4, a, știind că : $P = 20 \text{ kN}$, $d = 7 \text{ cm}$, $a = 30 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 15 \text{ cm}$, $h = 7,5 \text{ cm}$, $r_0 = 20 \text{ cm}$, $\beta = 60^\circ$, $\sigma_a = 1400 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Forța P se descompune în componentele $P_1 = P \sin \beta = 20 \cdot \sin 60^\circ = 17,32 \text{ kN}$ și $P_2 = P \cos \beta = 20 \cos 60^\circ = 10 \text{ kN}$.

În vederea studiului eforturilor, în figura 20.4, b s-a reprezentat schema arborelui, pe care s-au figurat sarcinile, principalele cote și direcțiile axelor de coordonate considerate pe fiecare porțiune a arborelui.

Momentul încovoietor rezultat este :

$$M_x = \sqrt{M_{iy}^2 + M_{iz}^2} = 0,5(a + b + 0,5c) \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \\ = 0,5 P(a + b + 0,5c),$$

iar eforturile unitare

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{0,5 P(a + b + 0,5c) \cdot 32}{\pi \cdot d^3} = \\ = \frac{0,5 \cdot 32 \cdot 2000 (30 + 5 + 7,5)}{\pi \cdot 7^3} = 1262 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\tau = \frac{M_x}{W_p} = \frac{0,5 P_1 r_0 \cdot 16}{\pi \cdot d^3} = \frac{0,5 \cdot 1732 \cdot 20 \cdot 16}{\pi \cdot 7^3} = 257 \text{ daN/cm}^2,$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{1262^2 + 3 \cdot 257^2} = 1338 \text{ daN/cm}^2.$$

— Verificarea secțiunii 9, de formă dreptunghiulară, cu
 $b = 5 \text{ cm}$, $h = 7,5 \text{ cm}$ ($h/b = 1,5$):

$$N = 0,5 P_2, \quad M_{iy} = -P_1 r_0, \quad M_{iz} = 0,5 P_2(a + 0,5b), \\ M_x = 0,5 P_1(a + 0,5b).$$

a) Calculul eforturilor unitare în punctul B (Fig. 20.4, c)

$$\sigma_B = \frac{N}{A} - \frac{M_{iy}}{W_y} + \frac{M_{iz}}{W_z} = \frac{0,5 P_2}{bh} + \frac{P_1 r_0 \cdot 6}{bh^2} + \frac{0,5 P_2(a + 0,5b) \cdot 6}{hb^2} = \\ = \frac{0,5 \cdot 1000}{5 \cdot 7,5} + \frac{1732 \cdot 20 \cdot 6}{5 \cdot 7,5^2} + \frac{0,5 \cdot 1000(30 + 2,5) \cdot 6}{7,5 \cdot 5^2} = 1271 \text{ daN/cm}^2 \\ \tau_B = 0.$$

b) Calculul eforturilor unitare în punctul C (Fig. 20.4, c)

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{W_z} = \frac{0,5 P_2}{bh} + \frac{0,5 P_2(a + 0,5b) \cdot 6}{hb^2} = \frac{0,5 \cdot 1000}{5 \cdot 7,5} + \\ + \frac{0,5 \cdot 1000(30 + 2,5) \cdot 6}{7,5 \cdot 5^2} = 533 \text{ daN/cm}^2 \\ \tau_c = \frac{M_x}{0,231 hb^2} = \frac{0,5 P_1(a + 0,5b)}{0,231 hb^2} = \frac{0,5 \cdot 1732(30 + 2,5)}{0,231 \cdot 7,5 \cdot 5^2} = 649 \text{ daN/cm}^2 \\ \sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_c^2 + 3\tau_c^2} = \sqrt{533^2 + 3 \cdot 649^2} = 1244 \text{ daN/cm}^2.$$

c) Calculul eforturilor unitare în punctul D (Fig. 20.4, c)

$$\sigma_D = \frac{N}{A} - \frac{M_{iy}}{W_y} = \frac{0,5 P_2}{bh} + \frac{P_1 r_0 \cdot 6}{bh^2} = \frac{0,5 \cdot 1000}{5 \cdot 7,5} + \\ + \frac{1732 \cdot 20 \cdot 6}{5 \cdot 7,5^2} = 751 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_D = 0,859 \tau_c = \frac{0,859 M_x}{0,231 \cdot hb^2} = \frac{0,5 P_1(a + 0,5b) \cdot 0,859}{0,231 \cdot hb^2} = \\ = \frac{0,5 \cdot 1732(30 + 2,5) \cdot 0,859}{0,231 \cdot 7,5 \cdot 5^2} = 558 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_D^2 + 3\tau_D^2} = \sqrt{751^2 + 3 \cdot 558^2} = 1224 \text{ daN/cm}^2.$$

Solicitarea maximă are loc în secțiunea 6, unde

$$\sigma_{ech} = 1338 \text{ daN/cm}^2.$$

20.5. O grindă este solicitată de o forță axială de întindere N și de un cuplu M_2 aplicat pe reazemul 2, ca în figura 20.5. Se cere să se afle săgeata și momentul încovoietor la mijlocul grinzii.

Rezolvare. Reacțiunea în reazemul 1, ținând seama de sensul din figură, este

$$V_1 = \frac{M_2}{l}$$

Momentul încovoietor într-o secțiune oarecare are expresia :

$$M_x = -\frac{M_2}{l} x - Nv. \quad (1)$$

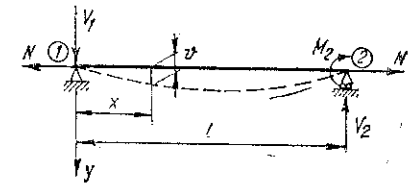


Fig. 20.5

Introducând expresia (1) în ecuația diferențială a fibrei medii deformate, se obține :

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_x = \frac{M_2}{l} x + Nv, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{N}{EI} v = \frac{M_2}{lEI} x.$$

Notind :

$$k^2 = \frac{N}{EI} \quad (3)$$

și înlocuind în ecuația (2), se obține :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - k^2 v = \frac{k^2 M_2}{LN} x. \quad (4)$$

Integrala generală a ecuației diferențiale (4) este de forma :

$$v = C_1 \operatorname{sh} kx + C_2 \operatorname{ch} kx + v_1, \quad (5)$$

unde v_1 este o integrală particulară a ecuației (4), care, în acest caz, este de forma :

$$v_1 = -\frac{M_2}{LN} x. \quad (6)$$

Integrala generală devine :

$$v = C_1 \operatorname{sh} kx + C_2 \operatorname{ch} kx - \frac{M_2}{LN} x. \quad (7)$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină punind în ecuația (7) condițiile la limită :

1) În reazemul 1, săgeata este nulă, deci pentru $x = 0$, $v = 0$. Ținând seamă că $\operatorname{sh} 0 = 0$ și $\operatorname{ch} 0 = 1$, se obține :

$$C_2 = 0.$$

2) În reazemul 2, săgeata este nulă, deci pentru $x = l$, $v = 0$:

$$0 = C_1 \operatorname{sh} kl - \frac{M_2 l}{LN}, \quad C_1 = \frac{M_2}{N} \frac{1}{\operatorname{sh} kl}.$$

Ecuația fibrei medii deformate devine :

$$v = \frac{M_2}{N} \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} kl} - \frac{M_2}{LN} x = \frac{M_2}{N} \left[\frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} kl} - \frac{x}{l} \right]. \quad (8)$$

Notind $kl = 2u$, se obține :

$$v = \frac{M_2 l^2}{EI(2u)^2} \left[\frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh}(2u)} - \frac{kx}{2u} \right]. \quad (9)$$

Săgeata la mijlocul grinzii se află înlocuind $x = l/2 = u/k$ în formula (9) :

$$v_{x=l/2} = \frac{M_2 l^2}{EI(2u)^2} \left[\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{sh}(2u)} - \frac{1}{2} \right] = \frac{M_2 l^2}{2EI(2u)^2} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} u} - 1 \right], \quad (10)$$

unde s-a avut în vedere că

$$\operatorname{sh}(2u) = 2 \operatorname{sh} u \cdot \operatorname{ch} u.$$

Pentru determinarea momentului încovoietor într-o secțiune oarecare, se înlocuiește expresia (8) în (1) :

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{M_2}{l} x - Nv = -\frac{M_2}{l} x - \frac{M_2}{N} \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} kl} N + \frac{M_2}{LN} xN = \\ &= -M_2 \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} kl} = -M_2 \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh}(2u)}. \end{aligned}$$

Momentul încovoietor în mijlocul grinzii se obține pentru $x = l/2 = u/k$:

$$M_{x=l/2} = -M_2 \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{sh}(2u)} = -\frac{M_2}{2 \operatorname{ch} u}.$$

20.6. Să se calculeze forța critică de flambaj pentru bara din figura 20.6, a, având articulații la capete.

Rezolvare. Ecuația diferențială a fibrei medii deformate a barei este (Fig. 20.6, b) :

— pentru intervalul 1—2

$$EI_{min} v_1'' = -P \frac{f}{l} x;$$

— pentru intervalul 2—3

$$EI_{min} v_2'' = -P \frac{f}{l} x + P(f - v_2).$$

Împărțind ambele ecuații cu EI_{min} și introducând notația

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI_{min}}$$

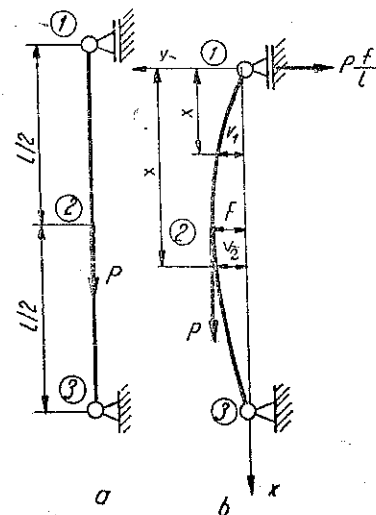


Fig. 20.6

se obțin ecuațiile diferențiale

$$v_1' = -\frac{\alpha^2 f}{l} x; \quad v_2'' + \alpha^2 v_2 = \alpha^2 f \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

ale căror soluții sînt

$$v_1 = -\frac{\alpha^2 f}{l} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2;$$

$$v_2 = C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x + f \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

în care C_1 , C_2 , C_3 și C_4 sînt constante de integrare.

Pentru determinarea constantelor de integrare se scriu următoarele condiții: pentru $x = 0$, $v_1 = 0$; pentru $x = \frac{l}{2}$, $v_1 = v_2 = f$ și $v_1' = v_2'$; pentru $x = l$, $v_2 = 0$, de unde rezultă ecuațiile

$$C_2 = 0$$

$$-\frac{\alpha^2 f}{l} \cdot \frac{l^3}{48} + C_1 \frac{l}{2} = f,$$

$$C_3 \sin \frac{\alpha l}{2} + C_4 \cos \frac{\alpha l}{2} + \frac{1}{2} f = f,$$

$$-\frac{\alpha^2 f l}{8} + C_1 = C_3 \alpha \cos \frac{\alpha l}{2} - C_4 \alpha \sin \frac{\alpha l}{2} - \frac{f}{l},$$

$$C_3 \sin \alpha l + C_4 \cos \alpha l = 0,$$

în care necunoscutele sînt C_1 , C_2 , C_3 și f . Sistemul fiind omogen, trebuie ca determinantul principal să fie nul:

$$\begin{vmatrix} \frac{l}{2} & 0 & 0 & -1 - \frac{\alpha^2 l^2}{48} \\ 0 & \sin \frac{\alpha l}{2} & \cos \frac{\alpha l}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\alpha \cos \frac{\alpha l}{2} & \alpha \sin \frac{\alpha l}{2} & \frac{1}{l} - \frac{\alpha^2 l}{8} \\ 0 & \sin \alpha l & \cos \alpha l & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă ecuația

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} = \frac{\frac{3}{2} \alpha l}{\left(\frac{\alpha l}{2}\right)^2 - 9},$$

care are rădăcina minimă

$$\frac{\alpha l}{2} = 2,16$$

din care se determină

$$P_{critic} = \frac{18,7 EI_{min}}{l^2}$$

20.7. Să se determine, pentru sistemul de bare din figura 20.7, *a*, valoarea forței critice de flambaj P .

Rezolvare. Se studiază mai întâi cazul unei bare orizontale, solicitată la încovoiere și compresiune, ca în figura 20.7, *b*. Ecuația diferențială a fibrei medii deformate a acestei bare este

$$EI v'' = M_0 - Rx - Nv$$

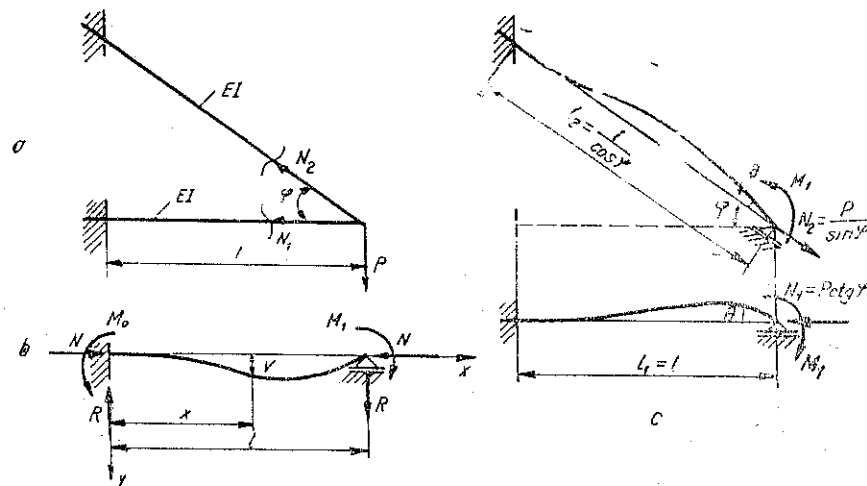


Fig. 20.7

sau

$$v'' + \frac{N}{EI} v = \frac{1}{EI} (M_0 - Rx),$$

iar soluția ei se scrie

$$v = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{1}{EI \alpha^2} (M_0 - Rx) \quad (1)$$

în care A și B sînt constante de integrare și $\alpha^2 = N/EI$.Din ecuația de echilibru a momentelor în raport cu O rezultă:

$$R = \frac{M_0 - M_1}{l}$$

Pentru determinarea momentului M_0 și a constantelor de integrare A și B se pun condițiile: pentru $x = 0$, $v = 0$ și $v' = 0$; pentru $x = l$, $v = 0$, astfel încît relația (1) devine

$$v = \frac{M_1}{EI \alpha^2} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha l)(\alpha l - \sin \alpha l)}{\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l} \left(\frac{1 - \cos \alpha x}{1 - \cos \alpha l} - \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{\alpha l - \sin \alpha l} \right).$$

Rotirea grinzii pe reazemul din dreapta este

$$\theta = v'_{x=l} = \frac{M_1}{EI \alpha} \cdot \frac{-2 + 2 \cos \alpha l + \alpha l \sin \alpha l}{\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l} \quad (2)$$

Dacă forța N este forță de întindere, în relațiile de mai sus α devine $i\alpha$, $\cos \alpha l$ devine $\operatorname{ch} \alpha l$ iar $\sin \alpha l$, $\operatorname{sh} \alpha l$ și relația (2) capătă forma

$$\theta = - \frac{M_1}{EI \alpha} \cdot \frac{-2 + 2 \operatorname{ch} \alpha l - \alpha l \operatorname{sh} \alpha l}{\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l} \quad (3)$$

Se aplică aceste rezultate sistemului de bare din figura 20.7, c, în care s-a descompus structura inițială. Valorile forțelor axiale N_1 și N_2 din cele două bare s-au obținut din ecuațiile de echilibru ale punctului de aplicare al forței P . În figura 20.7, c aceste forțe s-au reprezentat cu sensurile lor reale: N_1 de compresiune și N_2 de întindere.

Pentru cele două bare expresia αl capătă formele

$$\alpha_1 l_1 = l \sqrt{\frac{P \operatorname{ctg} \varphi}{EI}}; \quad \alpha_2 l_2 = \frac{l}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{P}{EI \sin \varphi}} \quad (4)$$

Avînd în vedere că pentru cele două bare momentul M_1 are semne diferite (Fig. 20.7, c), se pune condiția ca unghiul θ să fie același cînd se calculează cu relația (2) sau (3). Împărțind ecuația obținută cu l_1 și înlocuind $l_1 = l_2 \cos \varphi$, rezultă:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_1 l_1} \cdot \frac{-2 + 2 \cos \alpha_1 l_1 - \alpha_1 l_1 \sin \alpha_1 l_1}{\alpha_1 l_1 \cos \alpha_1 l_1 - \sin \alpha_1 l_1} = \\ & = \frac{1}{\alpha_2 l_2 \cos \varphi} \cdot \frac{-2 + 2 \operatorname{ch} \alpha_2 l_2 - \alpha_2 l_2 \operatorname{sh} \alpha_2 l_2}{\alpha_2 l_2 \operatorname{ch} \alpha_2 l_2 - \operatorname{sh} \alpha_2 l_2} \end{aligned} \quad (5)$$

La rezolvarea ecuației transcendente (5) se are în vedere că

$$\alpha_1 l_1 = \alpha_2 l_2 \sqrt{\cos^2 \varphi}.$$

Întrucît

$$\alpha_1 l_1 = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} \operatorname{ctg} \varphi,$$

se poate determina forța critică de flambaj pentru diverse valori ale unghiului φ , așa cum rezultă din tabelul 20.7.

Tabelul 20.7

φ°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\frac{P_{cr} l^2}{EI}$	0	5,55	11,46	18,21	26,57	38,08	56,18	91,37	196,9	∞

20.8. Să se calculeze deplasarea capătului liber al barei semicirculare de rază R din figura 20.8, a. Secțiunea barei este circulară, de diametru d .

Rezolvare. Într-o secțiune oarecare, definită de o variabilă φ , ca în figura 20.8, b, forța verticală P care acționează în secțiunea I , produce un moment

$$M = P \cdot 2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2},$$

care se descompune după direcția normalei și tangentei la axa barei curbe

$$M_{tn} = 2PR \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = PR \sin \varphi,$$

$$M_t = 2PR \sin^2 \frac{\varphi}{2} = PR(1 - \cos \varphi),$$

expresii care sînt valabile pentru $\varphi \in [0, \pi]$.

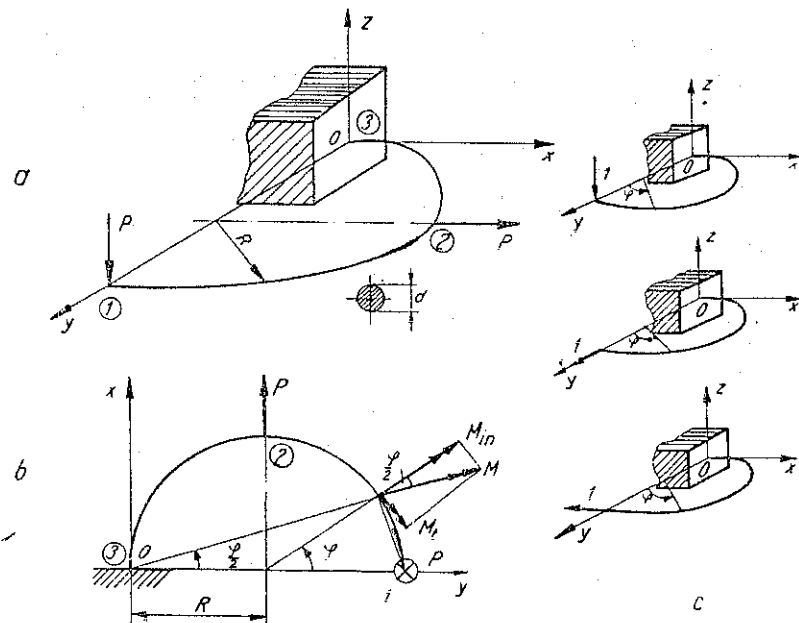


Fig. 20.8

Pe intervalul 2 — 3 forța P care acționează în secțiunea 2 produce momentul încovoietor

$$M_{iz} = PR \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = -PR \cos \varphi,$$

expresie care este valabilă pentru $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$.

Pentru determinarea deplasării capătului liber al barei s-au considerat forțele unitare ca în figura 20.8, c. Se obține

— pentru forța 1 aplicată pe direcția Oz

$$m_{iz} = R \sin \varphi; \quad m_{iy} = R(1 - \cos \varphi),$$

— pentru forța 1 aplicată pe direcția Oy

$$m'_{iz} = R \sin \varphi,$$

— pentru forța 1 aplicată pe direcția Ox

$$m''_{iz} = -R(1 - \cos \varphi),$$

toate aceste expresii fiind valabile pentru $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Componentele deplasării capătului barei sînt:

$$\begin{aligned} \delta_z &= \frac{1}{EI_z} \int_0^\pi M_{iz} m_{iz} R d\varphi + \frac{1}{GI_y} \int_0^\pi M_{iy} m_{iy} R d\varphi = \\ &= \frac{PR^3}{EI_z} \left[\int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi + (1 + \nu) \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi \right] = \frac{\pi(4 + 3\nu)}{2EI_z} PR^3; \\ \delta_y &= \frac{1}{EI_z} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi M_{iz} m'_{iz} R d\varphi = -\frac{PR^3}{EI_z} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{PR^3}{2EI_z}, \\ \delta_x &= \frac{1}{EI_z} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi M_{iz} m''_{iz} R d\varphi = \frac{PR^3}{EI_z} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi = -\frac{PR^3}{EI_z} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Deplasarea rezultantă este $\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2}$.

20.9. Să se verifice bara din figura 20.9, a, știind că are secțiunea circulară, din oțel, cu diametrul $d = 6$ cm; $P = 50$ daN; $R = 40$ cm; $\sigma_a = 1200$ daN/cm².

Să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii 3.

Rezolvare. Forța P aplicată în 3 produce într-o secțiune oarecare 6 a barei curbe 2—3 un moment $M = P \cdot 2R \sin \frac{\varphi}{2}$, avînd direcția 2—6 (Fig. 20.9, b). Componentele pe normală și tangentă la bara curbă duse în 6 sînt totemai momentul încovoietor, respectiv de răsucire, adică

$$M_n = M \cos \frac{\varphi}{2} = 2PR \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = PR \sin \varphi,$$

$$M_t = M \sin \frac{\varphi}{2} = 2PR \sin^2 \frac{\varphi}{2} = PR(1 - \cos \varphi).$$

Diagramele N , M_{iz} , M_{iy} , M_t sînt trasate în figura 20.9, c. Din analiza acestora rezultă că trebuie verificate secțiunile 1, pe bara dreaptă și 2 pe bara curbă.

Verificarea secțiunii 1.

În secțiunea 1

$$M_{iz} = -11PR; \quad M_{iy} = -4PR; \quad M_t = 3PR.$$

Momentul încovoietor total este

$$M_{tot} = \sqrt{M_{iz}^2 + M_{iy}^2}.$$

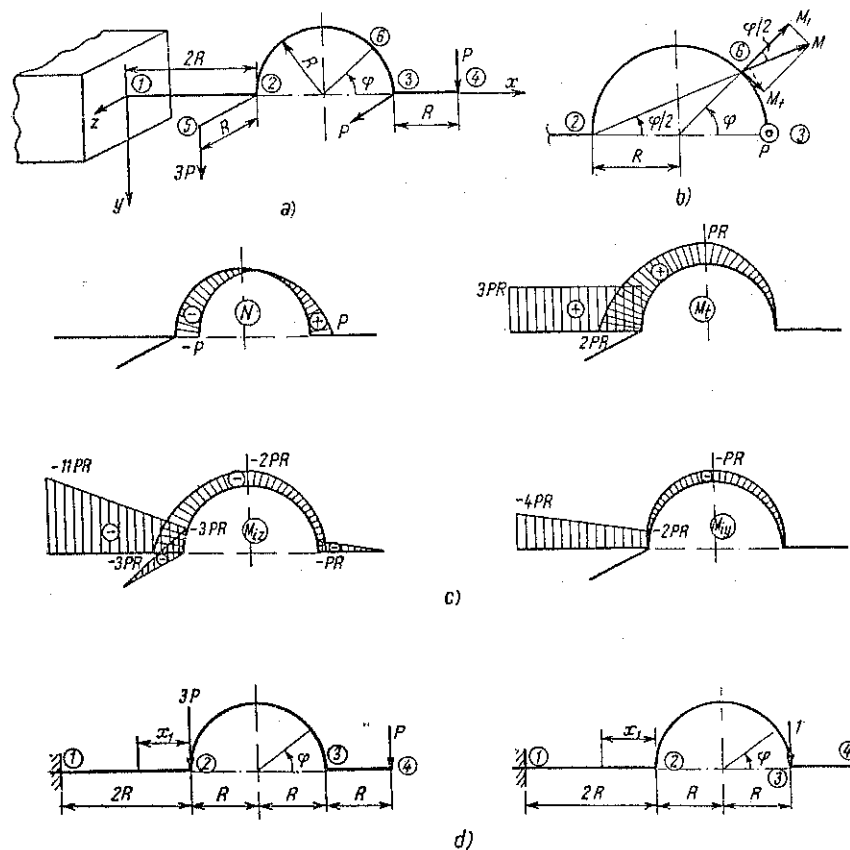


Fig. 20.9

După teoria a III-a de rezistență se obține

$$M_{tech} = \sqrt{M_{tot}^2 + M_t^2} = PR\sqrt{11^2 + 4^2 + 3^2} = 12,1 PR,$$

$$\sigma_{ech} = \frac{M_{tech}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{32 \cdot 12,1 PR}{\pi d^3} = 1140 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Verificarea secțiunii 2.

Bara curbă 2-3 are în secțiunea 2

$$N = -P; M_{tx} = -3PR; M_t = 2PR.$$

Efortul unitar σ se calculează considerind bara 2-3 cu curbura mare

$$e = \frac{I_a}{AR} = \frac{d^2}{16R} = 0,056 \text{ cm},$$

$$d_1 = \frac{d}{2} - e = 2,944 \text{ cm}; R_1 = R - \frac{d}{2} = 37 \text{ cm}.$$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{M_{tx} d_1}{A e R_1} = -1,77 - 302 \approx -304 \text{ daN/cm}^2.$$

Datorită răsucirii se produce efortul unitar

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{2PR}{\frac{\pi d^3}{16}} = 94,4 \text{ daN/cm}^2.$$

Efortul unitar echivalent este (după teoria a III-a de rezistență)

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 358 \text{ daN/cm}^2.$$

Pentru calculul deplasării pe verticală a secțiunii 3 se consideră toate sarcinile verticale, reduse în planul $x-y$ al barei 1-2-3-4 (v. Fig. 20.9, d).

Neglijînd efectul forțelor axiale și tăietoare, rezultă

$$M_{1-2} = -P(3R + x_1) - 3Px_1 = -P(4x_1 + 3R);$$

$$M_{2-3} = -P(R + R - R \cos \varphi) = -PR(2 - \cos \varphi).$$

Forța unitate aplicată în 3 produce momentele

$$m_{1-2} = -(2R + x_1); m_{2-3} = -R(1 - \cos \varphi).$$

Se obține

$$EI_z v_3 = P \int_0^{2R} (4x_1 + 3R)(2R + x_1) dx +$$

$$+ PR^3 \int_0^\pi (2 - \cos \varphi)(1 - \cos \varphi) d\varphi;$$

$$v_3 = \frac{52,51 PR^3}{EI_z} = 1,26 \text{ cm}.$$

20.10. Să se determine raza de curbură a axei unui arc elicoidal cilindric solicitat la încovoiere de către un cuplu M_0 .

Rezolvare. Se consideră proiecția unei spire pe un plan transversal. Într-o secțiune oarecare, definită de unghiul θ , (Fig. 20.10) cuplul M_0 se

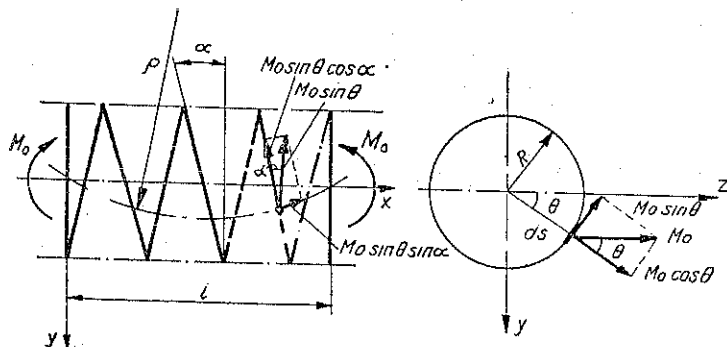


Fig. 20.10

descompune în $M_0 \cos \theta$, pe normala la spirală și $M_0 \sin \theta$, pe tangentă. Componenta $M_0 \sin \theta$ se descompune apoi după direcția spirei (care face unghiul α cu planul normal) și a normalei la aceasta, în $M_0 \sin \theta \cos \alpha$ și $M_0 \sin \theta \sin \alpha$.

Deci într-o secțiune oarecare a spirei momentul încovoietor este

$$M_x = \sqrt{M_0^2 \cos^2 \theta + M_0^2 \sin^2 \theta \sin^2 \alpha}$$

iar momentul de răsucire

$$M_t = M_0 \sin \theta \cos \alpha.$$

Energia de deformare a unui element de lungime ds a arcului este

$$dU_a = ds \left(\frac{M_x^2}{2EI_z} + \frac{M_t^2}{2GI_p} \right) = ds \left[\frac{M_0^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \alpha)}{2EI_z} + \frac{M_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \alpha}{2GI_p} \right].$$

Scriind că $ds = R d\theta / \cos \alpha$ și integrând expresia dU_a între 0 și $2\pi n$ unde n este numărul de spire al arcului, se obține

$$U_a = \frac{\pi n R}{2 \cos \alpha} M_0^2 \left(\frac{1 + \sin^2 \alpha}{EI_z} + \frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} \right).$$

În procesul de deformare momentul încovoietor M_0 se rotește cu unghiul $\varphi = \frac{l}{\rho}$ efectuind lucrul mecanic

$$U_e = \frac{M_0 \varphi}{2} = \frac{M_0}{2} \cdot \frac{l}{\rho},$$

în care lungimea arcului este

$$l = s \sin \alpha = \frac{2\pi R n}{\cos \alpha} \sin \alpha.$$

Din condiția $U_e = U_a$ se obține expresia curburii

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_0}{2 \sin \alpha} \left(\frac{1 + \sin^2 \alpha}{EI_z} + \frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} \right).$$

Raza de curbură a axei arcului este

$$\rho = \frac{2 \sin \alpha}{M_0} \cdot \frac{1}{\frac{1 + \sin^2 \alpha}{EI_z} + \frac{\cos^2 \alpha}{GI_p}}.$$

20.11. Pentru sistemul static nedeterminat din figura 20.11, a format dintr-o grindă dreaptă 1-4 de secțiune constantă, un stîlp 2-5 și un arc elicoidal 3-6, se cere:

1) să se dimensioneze grinda 1-4, din oțel, cu secțiunea circulară, știind că: $l = 2,2$ m, $P = 500$ daN, $\sigma_a = 1800$ daN/cm²;

2) să se dimensioneze arcu elicoidal cilindric 3-6, din oțel, cu $\tau_a = 5000$ daN/cm², $n = 3$ spire și $\frac{R}{d} = 4$.

3) să se dimensioneze stîlpul 2-5, din lemn, cu secțiune circulară, știind că $L = 1,5$ m, coeficientul de siguranță la flambaj $c = 4$, $\lambda_0 = 100$, considerînd stîlpul încastrat în 5 și simplu rezemat în 2.

Rezolvare. Se construiește diagrama M_s a momentelor static determinate (Fig. 20.11, b) din care rezultă:

$$A_2 = \frac{1}{l} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl}{8} \cdot l \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4Pl}{9} \cdot l \cdot \frac{l + \frac{l}{3}}{3} = Pl^2 \left(\frac{1}{24} + \frac{8}{81} \right) = \frac{91}{648} Pl^2;$$

$$A_3 = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4Pl}{9} \cdot l \cdot \frac{l + \frac{2}{3}l}{3} + \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{3} \left(l + \frac{l}{3} \right) \cdot \frac{l}{2} = Pl^2 \left(\frac{10}{81} + \frac{1}{9} \right) = \frac{19}{81} Pl^2.$$

Se notează cu f_2 și f_3 denivelările grinzii 1-4 pe reazemele 2, respectiv 3. Observind că $M_1 = M_4 = 0$, ecuația celor trei momente are forma (v. relația 11.4):

— pentru reazemele 1-2-3

$$2M_2(l+l) + M_3l + 6A_2 + 6E_{OL}I_z \left(-\frac{f_2}{l} + \frac{f_3 - f_2}{l} \right) = 0;$$

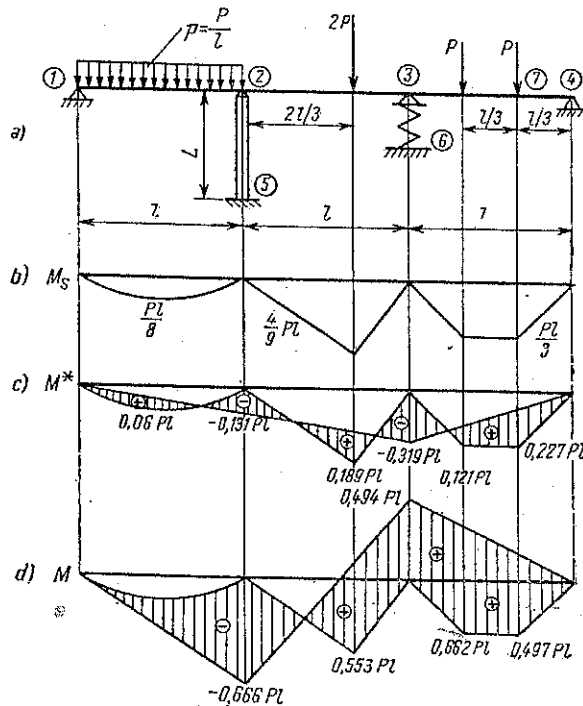


Fig. 20.11

— pentru reazemele 2-3-4

$$M_2l + 2M_3(l+l) + 6A_3 + 6E_{OL}I_z \left(\frac{f_2 - f_3}{l} + \frac{-f_3}{l} \right) = 0.$$

Sistemul de ecuații este

$$4M_2 + M_3 = -\frac{91}{108} Pl + \frac{6E_{OL}I_z}{l^2} (2f_2 - f_3);$$

$$M_2 + 4M_3 = -\frac{38}{27} Pl + \frac{6E_{OL}I_z}{l^2} (2f_3 - f_2),$$

(1)

din care se obține

$$M_2 = -\frac{53}{405} Pl + \frac{6}{5} \cdot \frac{E_{OL}I_z}{l^2} (3f_2 - 2f_3);$$

$$M_3 = -\frac{517}{1620} Pl + \frac{6}{5} \cdot \frac{E_{OL}I_z}{l^2} (3f_3 - 2f_2). \quad (2)$$

Reacțiunile grinzii pe reazemele 2 și 3 sînt (v. relația 11.13):

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{P}{2} + \frac{1}{3} 2P + \frac{1}{l} (-M_2 + M_3 - M_2) = \\ &= \frac{1797}{1620} P + \frac{6}{5} \cdot \frac{E_{OL}I_z}{l^3} (7f_3 - 8f_2); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{2}{3} 2P + P + \frac{1}{l} (M_2 - M_3 - M_3) = \\ &= \frac{767}{270} P + \frac{6}{5} \cdot \frac{E_{OL}I_z}{l^3} (7f_2 - 8f_3). \end{aligned}$$

Se face mai întâi predimensionarea grinzii 1-4, considerind că reazemele 2 și 3 nu au denivelări. Dacă $f_2 = f_3 = 0$, din relațiile (2) se obține

$$M_2^* = -\frac{53Pl}{405} = -0,131 Pl; \quad M_3^* = -\frac{517Pl}{1620} = -0,319 Pl.$$

În figura 20.11, s-a trasat diagrama de momente M^* a grinzii 1-4, considerind reazemele 2 și 3 fără denivelări.

Predimensionarea grinzii 1-4 se face în secțiunea 7, unde momentul încovoietor M^* este maxim și are valoarea

$$M_{max}^* = 0,227 Pl.$$

De asemenea, pentru ca eforturile unitare din grinda dată (care are reazemele 2 și 3 elastice) să nu depășească rezistența admisibilă prescrisă, predimensionarea se va face cu efortul unitar $\sigma_a^* = \frac{1}{3} \sigma_a$, astfel încît rezultă

$$d_{1nc} = \sqrt{\frac{32 M_{max}^*}{\pi \sigma_a^*}} = \sqrt{\frac{32 \cdot 0,227 \cdot 500 \cdot 220}{\pi \cdot 600}} = 7,5 \text{ cm.}$$

Se alege diametrul $d_1 = 7,5 \text{ cm}$.

Dimensionarea stîlpului 2-5 se face ținînd seama de flambaj

$$V_2 = \frac{\pi^2 E_{\text{lemn}}}{\alpha l_f^2} \cdot \frac{\pi D^4}{64}, \quad (4)$$

în care $l_f = 2L$.

Denivelarea reazemului 2 este

$$f_2 = \frac{V_2 L}{E_{\text{lemn}}} \frac{4}{\pi D^2} \quad (5)$$

Arcul elicoidal 3-6 se dimensionează cu relația

$$\frac{\pi d^3}{16} = \frac{V_3 R}{\tau_a} \quad (6)$$

iar denivelarea reazemului 3 este dată de relația

$$f_3 = \frac{64 V_3 n R^3}{G d^4} \quad (7)$$

Între relațiile (4) și (5) se elimină D iar între (6) și (7) se elimină d , expresiile obținute pentru f_2 și f_3 înlocuindu-se în relațiile (3). În acest mod se obține un sistem de ecuații neliniare avînd ca necunoscute pe V_2 și V_3 . Sistemul se rezolvă numeric, prin încercări, obținîndu-se

$$V_2 = 1\,517 \text{ daN} \quad \text{și} \quad V_3 = 316 \text{ daN}.$$

Din (4) rezultă diametrul stîlpului

$$D = 10,6 \text{ cm} \text{ și se alege } D = 11 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\text{min}}} = \frac{2L}{D} = \frac{8L}{D} = \frac{8 \cdot 150}{11} = 109 > \lambda_0$$

deci dimensionarea făcută cu relația (4) este corectă.

Din (6) rezultă $d = 1,26 \text{ cm}$ și se alege $d = 1,3 \text{ cm}$. De asemenea $R = 4d = 5,2 \text{ cm}$.

Avînd precizate dimensiunile stîlpului și arcului elicoidal, se pot calcula denivelările f_2 și f_3 ale reazemelor 2 și 3 și apoi momentele pe reazeme, relațiile (1)

$$M_2 = -73\,400 \text{ daN cm} = -0,666 Pl,$$

$$M_3 = 54\,400 \text{ daN cm} = 0,494 Pl.$$

Diagrama de momente a grinzii este trasată în figura 20.11, d .

Verificarea grinzii 1-4 se face în secțiunea 2, unde

$$|M|_{\text{max}} = 0,666 Pl.$$

Rezultă

$$\sigma_{ef/\text{max}} = \frac{0,666 Pl}{\frac{\pi d_1^3}{32}} = \frac{32 \cdot 0,666 \cdot 500 \cdot 220}{\pi \cdot 7,5^3} = 1\,770 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

Deoarece diametrul secțiunii stîlpului și al șirinei arcului s-au rotunjit, este necesar să se calculeze, cu diametrele efective, reacțiunile V'_2 și V'_3 ale sistemului. Se utilizează relațiile (3)

$$V'_2 = \frac{P}{2} + \frac{1}{3} 2P + \frac{1}{l} (M_3 - 2M_2) =$$

$$= \frac{7}{6} P + \frac{Pl}{l} (0,494 + 2 \cdot 0,666) = 1\,497 \text{ daN};$$

$$V'_3 = \frac{2}{3} \cdot 2P + P + \frac{1}{l} (M_2 - 2M_3) =$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{Pl}{l} (-0,666 - 2 \cdot 0,494) = 338 \text{ daN}.$$

Valorile obținute sînt destul de apropiate de cele calculate anterior.

Cu forța V'_3 se verifică și efortul unitar tangențial maxim efectiv din arcul elicoidal, relația (6)):

$$\tau_{\text{max ef}} = \frac{V'_3 R}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{338 \cdot 5,2 \cdot 16}{\pi \cdot 1,3^3} = 4\,060 < \tau_a.$$

20.12. Să se dimensioneze barele grinzii cu zăbrele din figura 20.12, a din oțel cu $\sigma_a = 1\,200 \text{ daN/cm}^2$. Să se calculeze apoi deplasarea pe verticală a nodului 3 și deplasarea pe orizontală a nodului 4. Se dau: $h = 3 \text{ m}$, $a = 8 \text{ m}$, $\alpha = 1,4 \text{ rad}$, $\beta = 0,7 \text{ rad}$, $V_3 = 400 \text{ daN}$, $H_1 = 200 \text{ daN}$, $H_2 = 300 \text{ daN}$.

Rezolvare. Se determină mai întîi unghiurile γ și δ care definesc direcțiile barelor 1-4 și 2-3

$$\text{tg } \gamma = \frac{h}{a - h \cotg \beta} = 0,676; \quad \gamma = 34^\circ 6';$$

$$\text{tg } \delta = \frac{h}{a - h \cotg \alpha} = 0,401; \quad \delta = 21^\circ 51'.$$

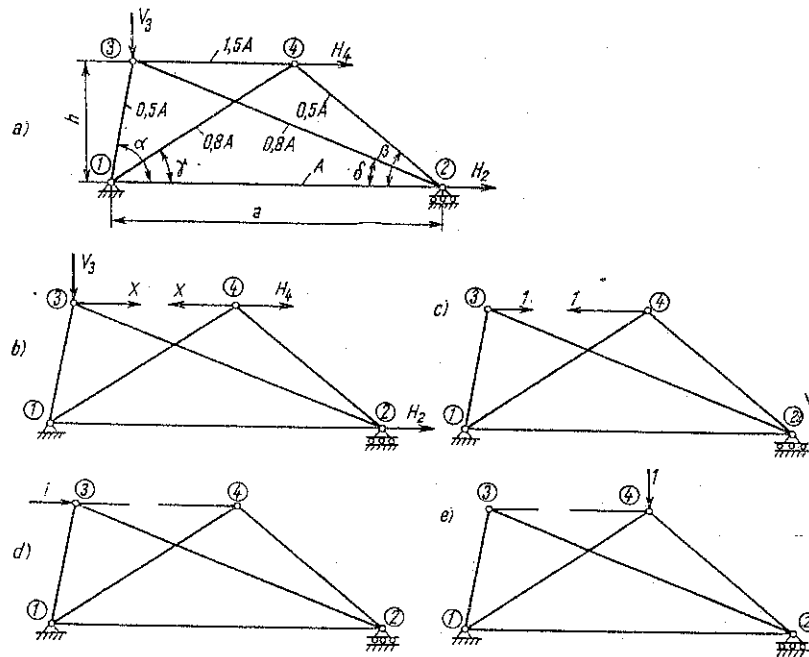


Fig. 20.12

În tabelul 20.12 se dau lungimile barelor. S-a notat cu k factorul de proporționalitate dintre ariile secțiunilor barelor și cea a barei 1-2 (Fig. 20.12, a).

Grinda este simplu static nedeterminată. Se alege ca sistem de bază cel din figura 20.12, b. Eforturile N^0 în sistemul de bază datorită sarcinilor, sînt date în coloana a 4-a a tabelului 20.12. În coloana a 5-a a aceluiași tabel se dau valorile eforturilor n din bare, datorite sarcinii unitare aplicată în bara 3-4 (Fig. 20.12, c).

Necunoscuta static nedeterminată X este

$$X = N_{34} = -\frac{\delta_0}{\delta_1} \text{ în care}$$

$$\delta_0 = \frac{1}{EA} \sum \frac{N_0 n l}{k} \quad \text{și} \quad \delta_1 = \frac{1}{EA} \sum \frac{n^2 l}{k}.$$

Se obține $X = -16,5 \text{ daN}$.

Eforturile axiale în bare s-au calculat cu relația $N = N^0 + nX$.

Tabelul 20.12

Bara	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1-3	304	0.5	-381	0.382	-88 500	88.7	-6.30	-387	774	0.382	-80 000	0	0	0
2-4	486	0.5	-117	0.584	-63 600	318.0	-9.64	-127	254	0	0	0	-0.86	102 000
1-4	536	0.8	135	-0.670	-60 600	300.0	11.09	146	183	0	0	0	-0.794	-77 700
2-3	805	0.8	-69.8	-1.010	70 900	1030.6	16.50	-53.3	66.6	-1.01	54 100	0	0	0
1-2	800	1	454.2	0.490	178 000	192.0	-8.10	446	446	0.936	335 000	0.657	235 000	0
3-4	391	1.5	0	1.000	0	260.0	-16.50	-16.5	11	0	0	0	0	0

Pentru dimensionarea barelor s-au calculat rapoartele $|N|/k$, valoarea maximă obținându-se pentru bara 1-3. Cu această valoare se face dimensionarea și se obține

$$A_{nec} = \frac{|N_{1-3}|}{0,5 \sigma_a} = 0,645 \text{ cm}^2.$$

Încărcind succesiv sistemul de bază cu cite o sarcină unitară aplicată pe direcția deplasărilor h_3 și v_4 care trebuie calculate (Fig. 20.12, d respectiv 20.12, e), se determină în bare eforturile n' respectiv n'' (v. tab. 20.12). Se obține

$$h_3 = \frac{1}{EA} \sum \frac{N \cdot n' l}{k} = 0,221 \text{ cm},$$

$$v_3 = \frac{1}{EA} \sum \frac{N n'' l}{k} = 0,191 \text{ cm}.$$

20.13. Să se traseze diagramele de eforturi pentru sistemul de bare din figura 20.13, a.

Rezolvare. Torsorul de reducere al forței P în punctul 2 este momentul PR și forța P (Fig. 20.13, b). Într-o secțiune oarecare a intervalului 2-3, definită de unghiul φ , momentul PR se descompune după direcția normalei și tangentei la bara curbă în componentele M_{in} , respectiv M_t :

$$M_{in} = PR \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = PR \sin \varphi;$$

$$M_t = PR \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = -PR \cos \varphi,$$

expresii valabile numai pentru $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$.

Bara curbă este simplu static nedeterminată în planul său. Se consideră X_1 , reacțiunea static nedeterminată (Fig. 20.13, c); rezultă

$$M_{iv}^0 = -PR \left[1 - \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] = -PR(1 - \sin \varphi), \text{ pentru } \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right],$$

$$m_1 = R(1 - \cos \varphi) \text{ pentru } \varphi \in [0, \pi],$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_y} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} M_{iv}^0 m_1 R d\varphi = -\frac{PR^3}{EI_y} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \sin \varphi)(1 - \cos \varphi) d\varphi =$$

$$= -\frac{(\pi - 1) PR^3}{2EI_y}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_y} \int_0^{\pi} m_1^2 R d\varphi = \frac{R^3}{EI_y} \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{2} \frac{R^3}{EI_y};$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\pi - 1}{3\pi} P.$$

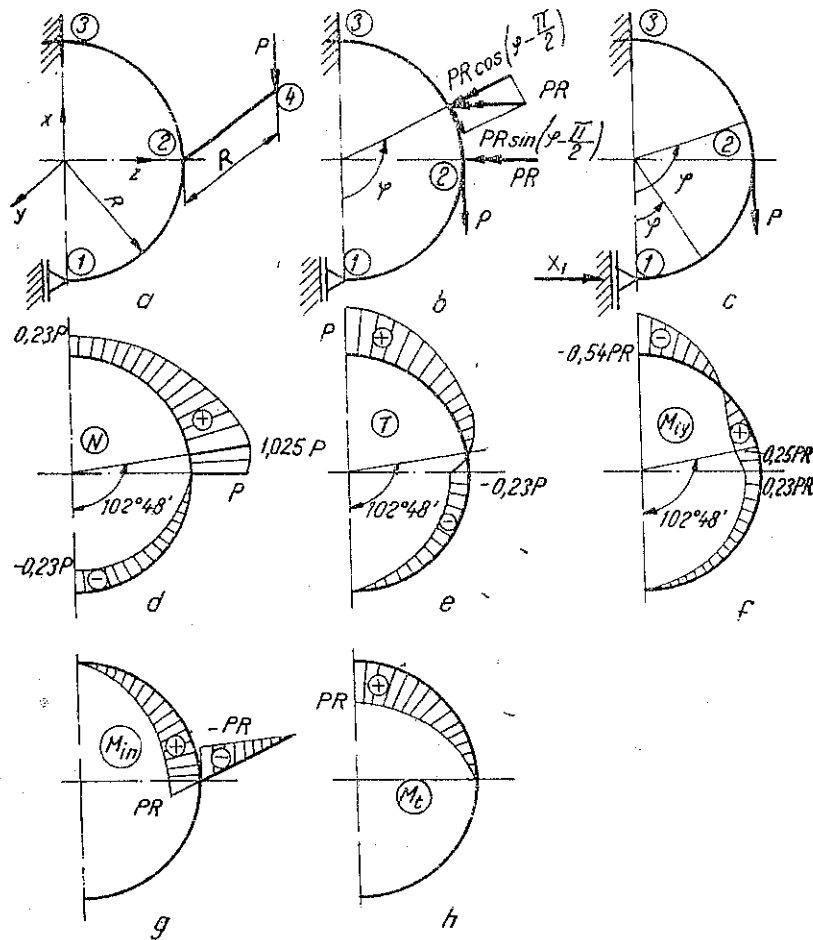


Fig. 20.13

Expresiile eforturilor sînt

— pentru intervalul 1-2 $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$,

$$N = -\frac{\pi - 1}{3\pi} P \cos \varphi; \quad T = -\frac{\pi - 1}{3\pi} P \sin \varphi;$$

$$M_{iv} = \frac{\pi - 1}{3\pi} PR(1 - \cos \varphi);$$

— pentru intervalul 2—3 $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

$$N = P \left(\sin \varphi - \frac{\pi-1}{3\pi} \cos \varphi \right); \quad T = -P \left(\cos \varphi + \frac{\pi-1}{3\pi} \sin \varphi \right);$$

$$M_{ty} = PR \left(\sin \varphi - \frac{\pi-1}{3\pi} \cos \varphi - \frac{2\pi+1}{3\pi} \right);$$

$$M_{tn} = PR \sin \varphi; \quad M_u = -PR \cos \varphi.$$

În vederea trasării diagramelor s-a întocmit tabelul 20.13, cu valorile eforturilor din bara curbă.

Tabelul 20.13

φ	0	$\frac{\pi}{2} - \varepsilon$	$\frac{\pi}{2} + \varepsilon$	102°48'	π
Eforturi					
N	-0,23P	0	P	1,025P	0,23P
T	0	-0,23P	-0,23P	0	P
M_{ty}	0	0,23PR	0,23PR	0,25PR	-0,54PR
M_{tn}	—	—	PR	0,97PR	0
M_u	—	—	0	0,22PR	PR

Diagramele corespunzătoare s-au trasat în figurile 20.13, d...h.

20.14. Să se traseze diagrama momentelor încovoietoare și să se calculeze variația diametrului vertical pentru inelul din figura 20.14, a, solicitat de greutatea proprie p .

Rezolvare. Inelul fiind simetric, în planul de simetrie forța tăietoare este nulă. Se consideră drept necunoscute static nedeterminate forța axială și momentul încovoietor în secțiunea superioară (Fig. 20.14, b).

Momentul încovoietor elementar produs de sarcina dP care acționează pe un element $ds = R d\alpha$ din inel este (Fig. 20.14, c) într-o secțiune φ

$$dM^0 = -p \cdot R d\alpha \cdot R (\sin \varphi - \sin \alpha).$$

Rezultă

$$M^0 = \int_0^\varphi dM^0 = -pR^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1).$$

Pentru sarcinile unitare ca în figurile 20.14, d și e se obține

$$m_1 = -1; \quad m_2 = -R(1 - \cos \varphi),$$

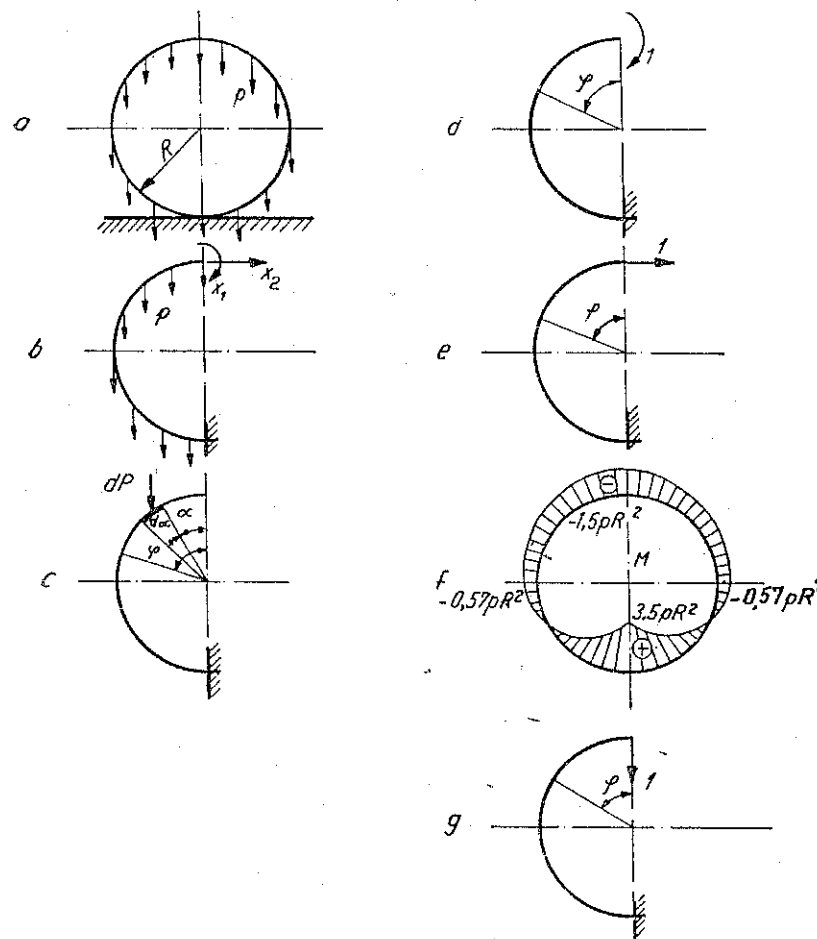


Fig. 20.14

iar deplasările sînt

$$EI \delta_{10} = \int_0^\pi M^0 m_1 R d\varphi = pR^3 \int_0^\pi (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi - 1) d\varphi = 0;$$

$$EI \delta_{20} = \int_0^\pi M^0 m_2 R d\varphi = pR^4 \int_0^\pi (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi - 1)(1 - \cos \varphi) d\varphi = \frac{3\pi}{4} pR^4;$$

$$EI \delta_{11} = \int_0^\pi m_1^2 R d\varphi = R \int_0^\pi d\varphi = \pi R;$$

$$EI\delta_{22} = \int_0^\pi m_2^2 R d\varphi = R^3 \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi^3}{2} R^3;$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^\pi m_1 m_2 R d\varphi = R^2 \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) d\varphi = \pi R^2.$$

Sistemul ecuațiilor de condiții este

$$X_1 + R X_2 = 0$$

$$X_1 + \frac{3}{2} R X_2 = -\frac{3}{4} p R^2.$$

Se obține

$$X_1 = \frac{3 p R^2}{2}, \quad X_2 = -\frac{3 p R}{2}.$$

Momentul încovoietor într-o secțiune oarecare are expresia

$$M = -p R^2 \left(\varphi \sin \varphi + \frac{5}{2} \cos \varphi - 1 \right).$$

Diagrama de momente încovoietoare s-a reprezentat în figura 20.14, f. Pentru calculul variației diametrului vertical al inelului, se aplică o forță unitară, ca în figura 20.14, g, momentul pe care îl produce fiind

$$m_v = -R \sin \varphi.$$

Rezultă

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^\pi M m_v R d\varphi = \frac{p R^4}{EI} \int_0^\pi \left(\varphi \sin \varphi + \frac{5}{2} \cos \varphi - 1 \right) \sin \varphi d\varphi = \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right) \frac{p R^4}{EI}.$$

20.15. Să se traseze diagrama momentelor încovoietoare pentru cadrul de oțel, cu secțiune circulară, din figura 20.15, a, știind că în reazemul 2 a existat, la montaj — pentru starea nesolicitată a cadrului — un joc δ ; cadrul se încălzește uniform cu Δt° . Se dau: $l = 1$ m, $d = 7$ cm, $P = 4$ kN, $\delta = 2$ mm, $\Delta t = 80^\circ\text{C}$, $E = 2,1 \cdot 10^6$ daN/cm², $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$.

Rezolvare. Se alege sistemul de bază ca în figura 20.15, b, reacțiunea static nedeterminată fiind X_2 . Ecuația de condiție este

$$\delta_{22} X_2 + \delta_{20} + \delta = 0$$

din care rezultă

$$X_2 = -\frac{\delta_{20} + \delta}{\delta_{22}}.$$

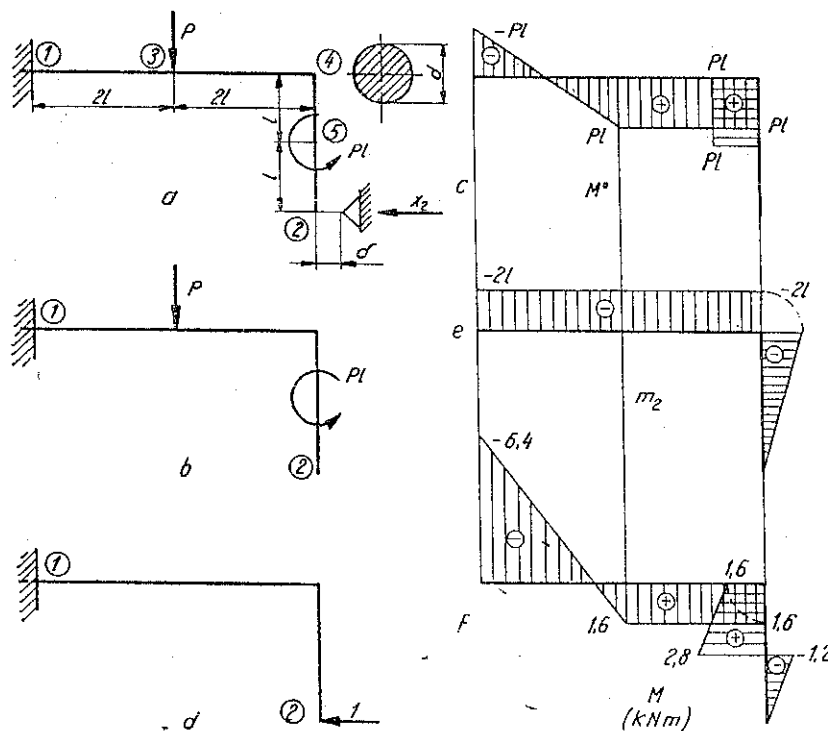


Fig. 20.15

Cu ajutorul diagramelor M° și m_2 trasate în figurile 20.15, c și e se obține

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left[Pl \cdot l \left(-\frac{3l}{2} \right) + Pl \cdot 2l(-2l) + \frac{Pl \cdot l}{2}(-2l) - \frac{Pl \cdot l}{2}(-2l) \right] -$$

$$-4l \alpha \Delta t = -\frac{11}{2} \cdot \frac{Pl^3}{EI_z} - 4l \alpha \Delta t;$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left[\frac{2l \cdot 2l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l + 2l \cdot 4l \cdot 2l \right] = \frac{56}{3} \cdot \frac{l^3}{EI_z}.$$

Reacțiunea X_2 este

$$X_2 = \frac{3EI_z}{56l^3} (4l \alpha \Delta t - \delta) + \frac{33}{112} P = \frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 7^4}{56 \cdot 10^6 \cdot 64} (4 \cdot 100 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 80 - 0,2) + \frac{33}{112} \cdot 400 = 120 \text{ daN}.$$

Diagrama de momente M s-a trasat în figura 20.15, f.

20.16. Să se determine poziția punctului de aplicație al forței P pe bara 4-2 a cadrului din figura 20.16, *a*, astfel încât valorile absolute ale momentelor încovoietoare din încastrare și din secțiunea în care se aplică forța P , să fie egale.

Rezolvare. S-a considerat sistemul de bază ca în figura 20.16, *b*. Diagramele de momente M^0 și m_2 s-au reprezentat în figurile 20.16, *c* și *e*. Rezultă:

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3l \cdot Px \left(1 - \frac{x}{3l}\right) \cdot \frac{x+3l}{9} + \frac{1}{3EI_z} \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{Px}{3}\right) l \cdot \frac{2l}{3} \cdot \frac{l}{3} =$$

$$= \frac{Px}{162 EI_z} (79 l^2 - 9 x^2);$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{2 EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \frac{2}{3} l +$$

$$+ \frac{1}{3EI_z} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{3} = \frac{191}{162} \cdot \frac{l^3}{EI_z}.$$

Din ecuația de condiție

$$\delta_2 = 0 = \delta_{20} + \delta_{22} X_2,$$

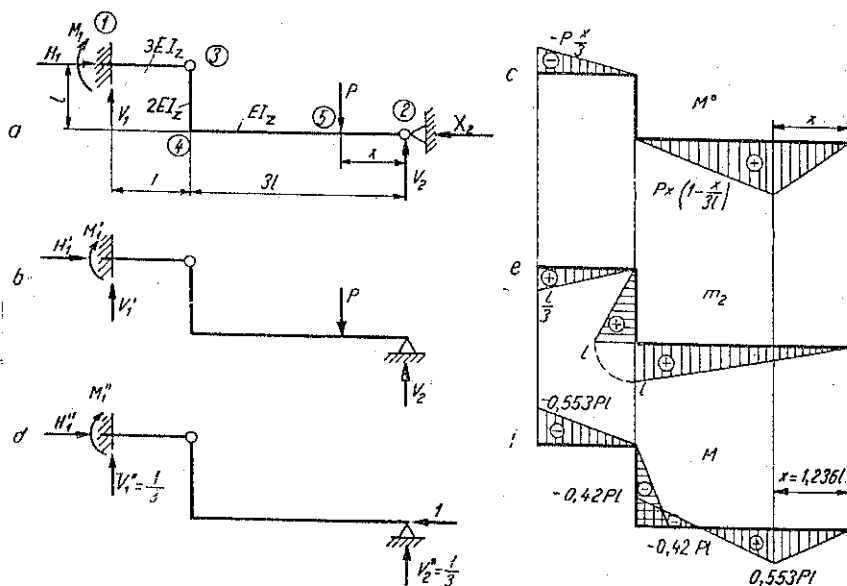


Fig. 20.16

se obține:

$$X_2 = -\frac{Px}{191 l^3} (79 l^2 - 9 x^2).$$

Momentele încovoietoare au expresiile:

$$M_1 = -\frac{Px}{573} \left(270 - 9 \frac{x^2}{l^2}\right); M_4 = -\frac{Px}{573} \left(237 - 27 \frac{x^2}{l^2}\right);$$

$$M_5 = \frac{Px}{573} \left(573 - 270 \frac{x}{l} + 9 \frac{x^3}{l^3}\right).$$

Din condiția $|M_1| = M_5$ rezultă ecuația:

$$\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^2}{l^2} - 30 \frac{x}{l} + 33,67 = 0,$$

a cărei soluție reală și pozitivă este $x = 1,236 l$.

Diagrama de momente încovoietoare obținută pentru $x = 1,236 l$ s-a trasat în figura 20.16, *f*.

20.17. Să se verifice sistemul de bare din figura 20.17, *a* știind că masa $M = 20$ kg lovește capătul barei verticale cu viteza $v = 0,1$ m/s. Se dau: $d_1 = 6$ cm; $d_2 = 5$ cm; $l = 1$ m; $E = 2,1 \cdot 10^8$ daN/cm²; $\nu = 0,3$; $\sigma_a = 1 650$ daN/cm².

Rezolvare. Se notează cu P forța statică ce acționând asupra sistemului de bare produce aceeași energie de deformare ca și corpul care lovește.

Sistemul de bare 1-4 este static nedeterminat. Se consideră sistemul de bază ca în figura 20.17, *b*, în care necunoscute static nedeterminate sînt X_1, X_2, X_3 . Celelalte reacțiuni sînt nule, deoarece nu există sarcini care să acționeze pe direcțiile x și y . La scrierea sistemului de ecuații de condiții trebuie avut în vedere că X_3 este moment de răsucire și deci $\delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{32} = \delta_{23} = 0$, astfel încît se obține

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0;$$

$$\delta_{33} X_3 + \delta_{30} = 0.$$

Se remarcă faptul că cea de a treia ecuație este independentă în raport cu primele două.

În figura 20.17, *c* s-au trasat diagramele M_{iy}^0 și M_x^0 , iar în figura 20.17, *d* diagramele m_1, m_2, m_3 , cu ajutorul cărora s-au calculat deplasările

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_{y_1}} \cdot 2l \cdot 1 + \frac{1}{EI_{y_2}} \cdot l = \frac{4,07 l}{EI_{y_1}};$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_{y_1}} \cdot \frac{4l}{2} \cdot 2l \cdot 1 + \frac{1}{EI_{y_2}} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot 1 = \frac{5,035 l^2}{EI_{y_1}};$$

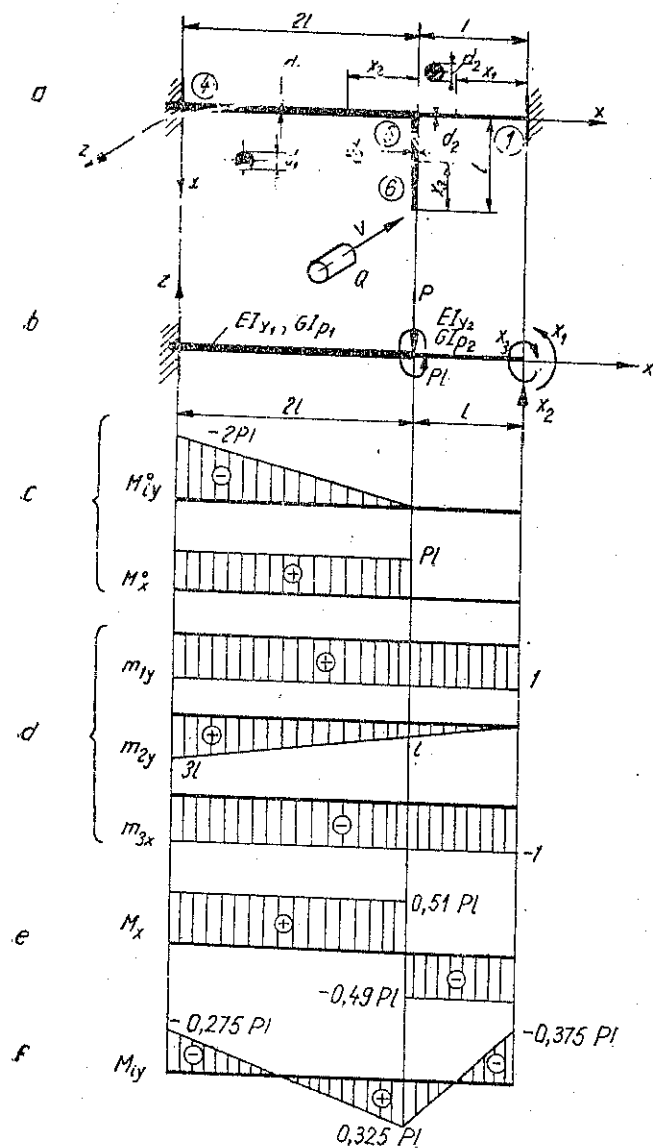


Fig. 20.17

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_{y_1}} \left[l \cdot 2l \cdot 2l + \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \left(l + \frac{2}{3} 2l \right) \right] + \frac{1}{EI_{y_2}} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = 9,36 \frac{l^3}{EI_{y_1}};$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_{y_1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l (-2Pl) = -\frac{2Pl^2}{EI_{y_1}};$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI_{y_1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l (-2Pl) \left(l + \frac{2}{3} 2l \right) = -\frac{14}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI_{y_1}};$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{GI_{p_1}} \cdot 1 \cdot 2l \cdot 1 + \frac{1}{GI_{p_2}} \cdot 1 \cdot l \cdot 1 = \frac{4,07l}{GI_{p_1}};$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{GI_{p_1}} \cdot Pl \cdot 2l (-1) = -2 \frac{Pl^2}{GI_{p_1}},$$

în care s-a avut în vedere că

$$\frac{EI_{y_1}}{EI_{y_2}} = \frac{GI_{p_1}}{GI_{p_2}} = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 = \left(\frac{6}{5} \right)^4 = 2,07.$$

Rezolvind sistemul de ecuații :

$$4,07 X_1 + 5,035 X_2 l = 2 Pl;$$

$$5,035 X_1 + 9,36 X_2 l = \frac{14}{3} Pl;$$

$$4,07 X_3 = 2 Pl,$$

se obține :

$$X_1 = -0,375 Pl; X_2 = 0,7 P; X_3 = 0,49 Pl.$$

În figura 20.17, e s-a reprezentat diagrama M_x , iar în figura 20.17, f diagrama M_{xy} .

Pentru determinarea forței P se egalează energia cinetică a corpului care lovește

$$E_c = M \frac{v^2}{2}$$

cu energia de deformare a sistemului de bare

$$\begin{aligned} U_d = & \int_0^l \frac{M_{xy}^2(x_1)}{2 EI_{y_1}} dx_1 + \int_0^l \frac{M_x^2(x_1)}{2 GI_{p_1}} dx_1 + \int_0^{2l} \frac{M_{xy}^2(x_2)}{2 EI_{y_2}} dx_2 + \\ & + \int_0^{2l} \frac{M_x^2(x_2)}{2 GI_{p_2}} dx_2 + \int_0^l \frac{M_{xy}^2(x_3)}{2 EI_{y_1}} dx_3 = \frac{P^2}{2} \left[\int_0^l \frac{(0,7x_1 - 0,375l)^2}{EI_{y_2}} dx_1 + \right. \\ & + \int_0^l \frac{(0,49l)^2}{GI_{p_2}} dx_1 + \int_0^{2l} \frac{(0,325l - 0,3x_2)^2}{EI_{y_1}} dx_2 + \int_0^{2l} \frac{(-0,51l)^2}{GI_{p_1}} dx_2 + \\ & \left. + \int_0^l \frac{(-x_3)^2}{EI_{y_1}} dx_3 \right] = \frac{P^2 l^3}{2} \left(\frac{0,837}{EI_{y_1}} + \frac{1,017}{GI_{p_1}} \right) = 1,079 \frac{P^2 l^3}{EI_{y_1}}, \end{aligned}$$

în care s-a considerat

$$\frac{EI_{y_1}}{GI_{p_1}} = 1 + \nu = 1,3.$$

Din condiția $U_a = E_c$ rezultă valoarea forței P

$$P = \sqrt{\frac{M_{\varphi}^2 EI_{y_1}}{2 \cdot 1,255 l^3}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 6^4}{2 \cdot 1,255 \cdot 64 \cdot 10^6}} = 352 \text{ daN}.$$

Calculul de verificare al barei 1-4 se face în secțiunea 1, în care

$$\sigma_1 = \frac{|M_x^{(1)}|}{W_{y_1}} = \frac{0,375 Pl \cdot 32}{\pi \cdot d_2^3} = \frac{0,375 \cdot 352 \cdot 100 \cdot 32}{\pi \cdot 5^3} = 1\,076 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\tau_1 = \frac{M_x^{(1)}}{W_{p_1}} = \frac{0,49 Pl \cdot 16}{\pi d_2^3} = \frac{0,49 \cdot 352 \cdot 100 \cdot 16}{\pi \cdot 5^3} = 703 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\sigma_{ech.} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_1^2} = \sqrt{1076^2 + 3 \cdot 703^2} = 1\,625 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a.$$

În secțiunea 5 a barei verticale 5-6

$$\sigma_5 = \frac{M_x^{(5)}}{W_{y_1}} = \frac{Pl \cdot 32}{\pi d_2^3} = \frac{352 \cdot 100 \cdot 32}{\pi \cdot 5^3} = 2\,868 \text{ daN/cm}^2$$

valoare care depășește σ_a , deci diametrul barei trebuie mărit.

20.18. Un cadru este format din doi stâlpi și o bară curbă semicirculară, ca în figura 20.18, a. Se cere:

1) să se calculeze forța capabilă P_{cap} , dacă $\sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2$, $R = 0,8 \text{ m}$, $a = 2,5 \text{ cm}$. Calculul la flambaj al stîlpilor se va face considerîndu-i articulați la ambele capete. Se dau: $\lambda_0 = 105$ și coeficientul de siguranță la flambaj $c = 6$;

2) cit de mare poate fi o greutate Q , care cade în secțiunea 4 (în absența forței P) de la înălțimea $h = 3 \text{ cm}$, astfel încît efortul unitar dinamic maxim să nu depășească rezistența admisibilă $\sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2$;

3) să se recalculeze forța capabilă a cadrului, în ipoteza că secțiunea periculoasă este solicitată elastoplastic și anume tălpile plastic și inima elastic. Se dau $E_p = 0$, $\sigma_c = 2\,300 \text{ daN/cm}^2$.

Rezolvare. Cadrul este simplu static nedeterminat. Se alege sistemul de bază ca în figura 20.18, b. Momentele încovoietoare sînt:

— datorită sarcinii P

$$M^0: M_{1-3}^0 = 0; M_{3-4}^0 = -\frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi),$$

— datorită sarcinii unitate (Fig. 20.18, c)

$$m_2: m_{1-3} = -x; m_{3-4} = R(5 - \sin \varphi).$$

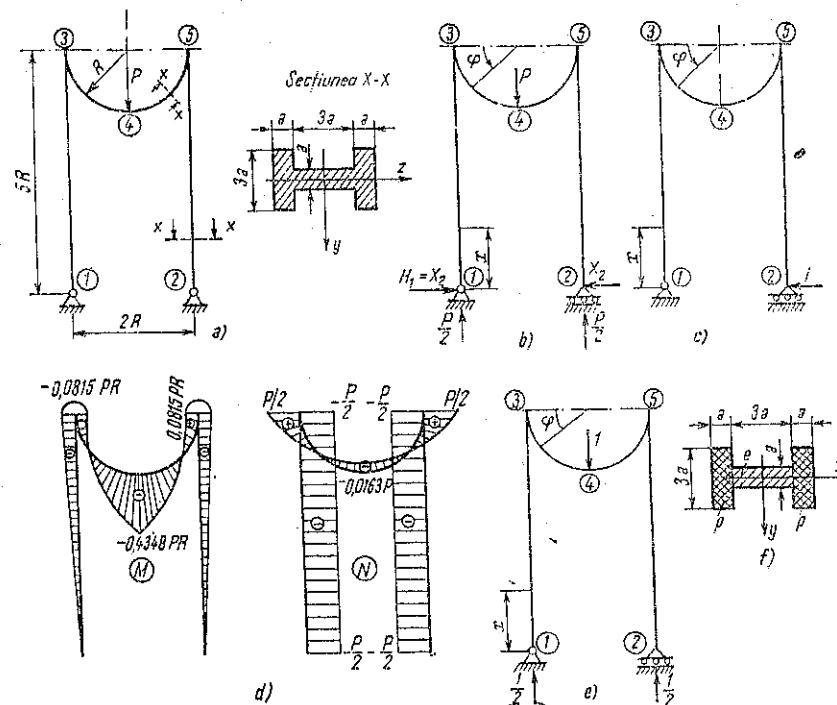


Fig. 20.18

Avînd în vedere că sistemul este simetric,

$$EI_y \delta_{20} = 2 \int_0^{\pi/2} -\frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) R (5 - \sin \varphi) R d\varphi = -\frac{PR^3}{2} (5\pi - 11),$$

$$EI_y \delta_{22} = 2 \left[\int_0^{5R} x^2 dx + \int_0^{\pi/2} R^2 (5 - \sin \varphi)^2 R d\varphi \right] = \frac{R^3}{6} (380 + 153\pi).$$

Rezultă

$$X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} = \frac{15\pi - 33}{153 + 380} P = 0,0163 P.$$

În figura 20.18, d s-au trasat diagramele N și M , ale cadrului static nedeterminat.

Observație: În secțiunile 3 și 5, momentul încovoietor are valoarea $-0,0815 PR$ pentru stâlpi și $+0,0815 PR$ pentru bara curbă. Acestea nu corespund unor salturi efective ale momentului, ci sînt doar consecințe ale convențiilor de semne utilizate pentru momentele încovoietoare la bare drepte și la bare curbe.

Secțiunea periculoasă este 4, în care

$$|M_t|_{max} = 0,4348PR \text{ și } N = -0,0163P.$$

$$I_y = \frac{(5a)^3 3a}{12} - \frac{(3a)^3 2a}{12} = \frac{107}{4} a^4; \quad W_y = 10,7 a^3$$

$$A = 2 \cdot 3a^2 + 3a^2 = 9a^2.$$

Pentru bara curbă 3-4-5 (v. cap. 9)

$$e = \frac{I_G}{AR} = 0,232 \text{ cm};$$

$$d_1 = \frac{5a}{2} - e = 6,018 \text{ cm}; \quad R_1 = R - \frac{5a}{2} = 73,75 \text{ cm}.$$

Se aplică formula (9.7)

$$\sigma_{max} = -\frac{N}{A} - \frac{M}{Ae} \cdot \frac{d_1}{R_1} = \sigma_a \text{ din care rezultă}$$

$$P' = \frac{A \sigma_a}{0,0163 + \frac{0,4348R d_1}{eR_1}} = 6428 \text{ daN}.$$

Pentru calculul la flambaj

$$I_{min} = I_z = 2 \frac{(3a)^3 a}{12} + \frac{a^3 \cdot 3a}{12} = \frac{19}{4} a^4;$$

$$i_{min} = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 0,726a; \quad l_f = l = 5R;$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{5R}{0,726a} = 220 > \lambda_0.$$

Flambajul are loc în domeniul elastic. Pentru un stîlp

$$P_{cup(1st)} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{cl_f^2} = 4000 \text{ daN, iar pentru întregul cadru (v. relațiile 12.5 și 12.9)}$$

$$P'' = 2 \cdot P_{cup(1st)} = 8000 > P'.$$

Cadrul poate suporta sarcina $P_{cup} = P' = 6428 \text{ daN}$ fără a exista pericolul de flambaj al stîlpilor.

Pentru calculul la solicitarea prin șoc trebuie determinată săgeata în punctul 4. Momentele încovoietoare în cadrul dat sînt (Fig. 20.18, b)

$$M_{1-3} = -0,0163 Px;$$

$$M_{3-4} = -\frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi) + 0,0163PR(5 - \sin \varphi).$$

Aplicînd sistemului de bază o forță unitate în 4, rezultă (v. Fig. 20.18, c)

$$m_{1-3} = 0; \quad m_{3-4} = -\frac{R}{2}(1 - \cos \varphi).$$

Se obține

$$EI_y v_4 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{PR}{2}(1 - \cos \varphi) + 0,0163PR(5 - \sin \varphi) \right] \left[-\frac{R}{2}(1 - \cos \varphi) \right] \times \\ \times R d\varphi = 0,14 PR^3.$$

Efortul unitar dinamic maxim trebuie să fie mai mic sau cel mult egal cu rezistența admisibilă, adică (v. relațiile (13.11) și (13.13))

$$\sigma_{dmax} = \sigma_{stmax} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} \right) \leq \sigma_a$$

în care P devine Q și $\delta_{st} = v_4$.

Se face mai întâi un calcul aproximativ al lui Q considerînd bara curbă cu curbura mică (pentru calculul lui σ_{stmax}) și formula simplificată a multiplicatorului de impact ψ . Rezultă $Q = 247 \text{ daN}$. Făcînd verificarea, de această dată cu formulele exacte ale lui σ_{stmax} și ψ , se obține un efort unitar σ_{dmax} mai mare decît rezistența admisibilă σ_a . Prin încercări, se găsește că pentru o valoare $Q = 210 \text{ daN}$,

$$\sigma_{stmax} = \frac{Q}{A} \left(0,0163 + \frac{0,4348 R d_1}{eR_1} \right) = 45,7 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{dmax} = \sigma_{stmax} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hEI_y}{0,14 PR^3}} \right) = 1398 \text{ daN/cm}^2 \approx \sigma_a.$$

Pentru solicitarea elasto-plastică a secțiunii periculoase se va considera numai încovoierea barei curbe, presupusă cu curbura mică.

Momentul capabil al secțiunii este (v. Fig. 20.18, f)

$$M_{cap} = \sigma_e(W_e + S_p), \text{ în care}$$

$$W_e = \frac{a(3a)^2}{6} = 1,5a^3; S_p = 2 \cdot 3a^2 \cdot 2a = 12a^3.$$

Forța P^* pe care o poate prelua cadrul este

$$P^* = \frac{\sigma_e(1,5a^3 + 12a^3)}{0,4348R} = 13\,950 \text{ daN}.$$

ANEXE

Anexa 1

Terminologie și simboluri în rezistența materialelor

Nr. crt.	Denumirea mărimilor	Simbolul	Unitățile de măsură
1	acceleerație	a	$\frac{m}{s^2}; \frac{cm}{s^2}$
2	acceleerația căderii libere (terestră)	g	$m/s^2; cm/s^2$
3	coeficient de dilatare lineară	α	—
4	coeficient de contracție transversală	ν	—
5	coeficient dinamic	ψ	—
6	coeficient de siguranță	c	—
7	coeficient de subțirime (coeficient de zveltețe)	λ	—
8	deformație volumică specifică	ε_v	—
9	efort unitar total	p	daN/cm ²
10	efort unitar normal	σ	daN/cm ²
11	efort unitar tangențial	τ	daN/cm ²
12	efort unitar de întindere (tracțiune)	σ_t	daN/cm ²
13	efort unitar de compresie	σ_c	daN/cm ²
14	efort unitar de încovoiere	σ_i	daN/cm ²
15	efort unitar de forfecare	τ_f	daN/cm ²
16	efort unitar de răsucire	τ_r	daN/cm ²
17	efort unitar critic de flambaj	σ_f	daN/cm ²

* Anexa 1 (continuare)

Nr. crt.	Denumirea mărimilor	Simbolul	Unitățile de măsură
18	efort unitar echivalent	σ_{ech}	daN/cm ²
19	efort unitar normal principal	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	daN/cm ²
20	energie sau lucru mecanic de deformare	U, L	daN·cm
21	forță axială sau normală	N	daN
22	forță tăietoare	T	daN
23	forță (sarcină) critică de flambaj	P_f	daN
24	greutate	G	kN, daN
25	greutate specifică	γ	daN/cm ³ , kN/m ³
26	limita de curgere	σ_c	daN/cm ²
27	limita de elasticitate	σ_e	daN/cm ²
28	limita de proporționalitate	σ_p	daN/cm ²
29	înnecare specifică (deformație unghiulară specifică)	γ	—
30	lungime de flambaj	l_f	cm
31	înnegre (sau scurtare)	Δl	cm
32	alungire	ϵ	—
33	alungire la rupere	δ, ϵ_r	—
34	masă	m	kg
35	modul de elasticitate (longitudinal)	E	daN/cm ²
36	modul de elasticitate transversal	G	daN/cm ²
37	modul de rezistență la încovoiere (axial)	W, W_x, W_y	cm ³
38	modul de rezistență polar	W_p	cm ³
39	moment încovoietor	M, M_t, M_y, M_z	daN·cm
40	moment încovoietor maxim	M_{max}	daN·cm
41	moment maxim maximorum	$M_{max max}$	daN·cm
42	moment de inerție față de axe	I_y, I_z	cm ⁴

Anexa 1 (continuare)

Nr. crt.	Denumirea mărimilor	Simbolul	Unitățile de măsură
43	moment de inerție centrifugal	I_{zy}	cm ⁴
44	moment de inerție minim	I_{min}	cm ⁴
45	moment de inerție polar	I_p	cm ⁴
46	momente de inerție principale	I_1, I_2	cm ⁴
47	moment de răsucire (torsiune)	M_t	daN·cm
48	moment de inerție față de axa ce trece prin centrul de greutate	I_C	cm ⁴
49	moment static al unei secțiuni	S, S_y, S_z	cm ³
50	multiplicator de flambaj	φ	—
51	putere	P	kW
52	rază de curbură	ρ	cm
53	rază de inerție	i, i_y, i_z	cm
54	reacțiune static nedeterminată (componente)	X, Y, Z	daN
55	rezistență admisibilă normală	σ_a	daN/cm ²
56	rezistență admisibilă tangentială	τ_a	daN/cm ²
57	rezistență la rupere	σ_r, τ_r	daN/cm ²
58	rotire specifică (la încovoiere)	ω	rad/cm
59	suprafața secțiunii (secțiunea)	A	cm ²
60	secțiune netă	A_n	cm ²
61	secțiune brută	A_b	cm ²
62	tensiune în fir (forță)	T, S	daN
63	tensiune orizontală în fir (forță)	H	daN
64	unghi de încovoiere	φ	rad, grad
65	unghi de răsucire	$\varphi, \Delta\varphi$	rad, grad

Dimensiuni liniare normale

În STAS 75-72 se dau șirurile de dimensiuni liniare normale de uz general (diametre lungimi, înălțimi etc.) în intervalul 0,1...10 000 mm, folosite în construcția de mașini. Șirul R_{20} în intervalul 1—10 000 este următorul:

1,0	11	112	1 120
1,1	12	125	1 250
1,2	14	140	1 400
1,4	16	160	1 600
1,6	18	180	1 800
1,8	20	200	2 000
2,0	22	224	2 240
2,2	25	250	2 500
2,5	28	280	2 800
2,8	32	315	3 150
3,0	36	355	3 550
3,5	40	400	4 000
4,0	45	450	4 500
4,5	50	500	5 000
5,0	56	560	5 600
5,5	63	630	6 300
6,0	71	710	7 100
7,0	80	800	8 000
8,0	90	900	9 000
9,0	100	1 000	10 000

Anexa 3

Greutăți specifice ale unor materiale curent utilizate

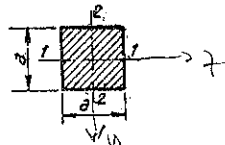
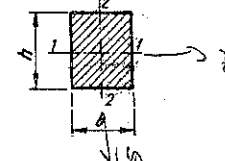
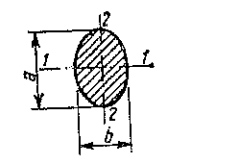
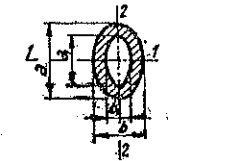
Materialul	γ daN/dm ³
Oțel	7,85
Fontă	7,25
Cupru	8,9
Aluminiu	2,56...2,75
Lemn de brad	0,45
Lemn de stejar	0,69
Căramidă	1,8...2,1
Beton	2,2

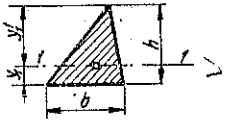
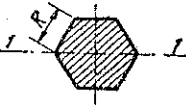
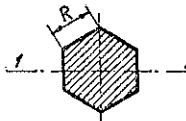
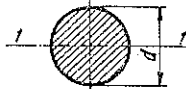
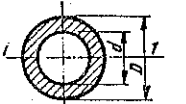
Anexa 4

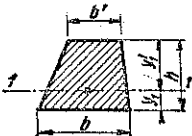
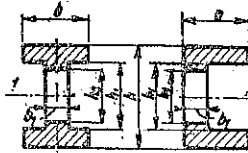
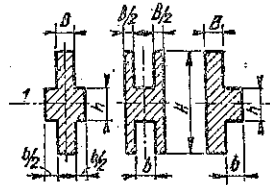
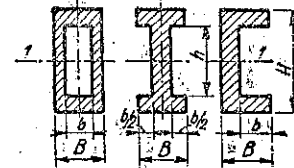
Coeficienți de dilatare termică liniară

Materialul	α
Oțel, oțel turnat, fontă	(11...13)·10 ⁻⁶
Cupru	17·10 ⁻⁶
Bronz	18·10 ⁻⁶
Alamă	19·10 ⁻⁶
Aluminiu	24·10 ⁻⁶

Momente de inerție și module de rezistență pentru secțiuni simple

Nr. curent	Forma, dimensiunile și axele secțiunii (axele notate cu 1-1 și 2-2 trec prin centrul de greutate)	Momente de inerție I_1 și I_2 și module de rezistență W_1 și W_2
1	Pătrat 	$I_1 = I_2 = \frac{a^4}{12}$ $W_1 = W_2 = \frac{a^3}{6}$
2	Dreptunghi 	$I_1 = \frac{bh^3}{12}$ $I_2 = \frac{hb^3}{12}$ $W_1 = \frac{bh^2}{6}$ $W_2 = \frac{hb^2}{6}$
3	Elipsă 	$I_1 = \frac{\pi a^3 b}{64}$ $I_2 = \frac{\pi a b^3}{64}$ $W_1 = \frac{\pi a^2 b}{32}$ $W_2 = \frac{\pi a b^2}{32}$
4	Coroană eliptică 	$I_1 = \frac{\pi}{64} (a^3 b - a_1^3 b_1)$; $I_2 = \frac{\pi}{64} (b^3 a - b_1^3 a_1)$ $W_1 = \frac{\pi}{32a} (a^3 b - a_1^3 b_1)$; $W_2 = \frac{\pi}{32b} (b^3 a - b_1^3 a_1)$

Nr. curent	Forma, dimensiunile și axele secțiunii (axele notate cu 1-1 și 2-2 trec prin centrul de greutate)	Momente de inerție I_1 și I_2 și module de rezistență W_1 și W_2
5	Triunghi 	$I_1 = \frac{bh^3}{36}$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} = \frac{bh^2}{12} \quad W'_1 = \frac{I_1}{y'_1} = \frac{bh^2}{24}$
6	Hexagon 	$I_1 = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = I_2 \quad W_1 = \frac{5}{8} R^3$
7	Hexagon 	$I_1 = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = I_2 \quad W_1 = 0.5413 R^3$
8	Cerc 	$I_1 = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0.05d^4$ $W_1 = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0.1d^3$
9	Coroană circulară 	$\alpha = \frac{d}{D} \quad I_1 = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$ $W_1 = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$

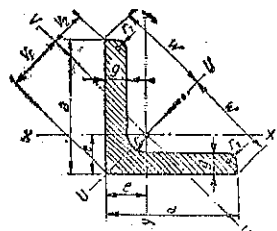
Nr. curent	Forma, dimensiunile și axele secțiunii (axele notate cu 1-1 și 2-2 trec prin centrul de greutate)	Momente de inerție I_1 și I_2 și module de rezistență W_1 și W_2
10	Trapez 	$I_1 = \frac{h^3(b^2 + 4bb' + b'^2)}{36(b + b')}$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} \quad W'_1 = \frac{I_1}{y'_1}$
11		$I_1 = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{12}$ $W_1 = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{6h}$
12		$I_1 = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$ $W_1 = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$
13		$I_1 = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $W_1 = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$

Aneza 5 (continuare)

Nr. curent	Forma, dimensiunile și axele secțiunii (axe notate cu 1-1 și 2-2 trec prin centrul de greutate)	Momente de inerție I_1 și I_2 și module de rezistență W_1 și W_2
14		$I_1 = \frac{1}{3} (By_1^3 - bh^3 + ay_1'^3)$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} \quad W_1' = \frac{I_1}{y_1'}$
15		$I_1 = \frac{1}{3} (By_1^3 - B_1h^3 + by_1'^3 - b_1h_1^3)$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} \quad W_1' = \frac{I_1}{y_1'}$
16		$I_1 = 0,00688 d^4; \quad I_2 = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,025 d^4$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1}; \quad W_1' = \frac{I_1}{y_1'}; \quad W_2 = \frac{\pi d^3}{64} = 0,050 d^3$
17	Coroană semicirculară	$I_1 = 0,00688 (D^4 - d^4) - \frac{0,0177 D^2 d^2 (D - d)}{D + d}$ sau la coroană subțire $I_1 = 0,038 t d^3$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1}; \quad W_1' = \frac{I_1}{y_1'}$

Aneza 5 (continuare)

Nr. curent	Forma, dimensiunile și axele secțiunii (axe notate cu 1-1 și 2-2 trec prin centrul de greutate)	Momente de inerție I_1 și I_2 și module de rezistență W_1 și W_2
18		$I_1 = \frac{tr^3}{2} \left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4 \sin^3 \alpha}{\alpha} \right);$ $I_2 = \frac{tr^3}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$ $W_1 = \frac{I_1}{y_1} = \frac{\frac{tr^3}{2} \left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4 \sin^3 \alpha}{\alpha} \right)}{\frac{r \sin \alpha}{\alpha} - \left(\frac{D}{2} - t \right) \cos \alpha}$ $W_1' = \frac{I_1}{y_1'} = \frac{I_1}{\frac{D}{2} - y_c} = \frac{\frac{tr^3}{2} \left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4 \sin^3 \alpha}{\alpha} \right)}{\frac{D}{2} - \frac{r \sin \alpha}{\alpha}}$ unde $r = \frac{D - t}{2}; \quad y_c = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$
19		$I_1 = \frac{A \cdot r^3}{4} \left[1 + \frac{2 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} - \frac{16 \sin^5 \alpha}{9 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)^2} \right];$ $I_2 = \frac{A \cdot r^3}{4} \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right),$ sau $I_2 = \frac{r^4}{48} (12\alpha - 8 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$ unde $A = \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$ $y_c = r \left(\frac{4}{3} \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} - \cos \alpha \right)$



Oțel cornier cu
(după STAS)

I = Moment de inerție

W = Modul de rezistență

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = Rază de inerție

Raportate la axa
de încovoiere
respectivă

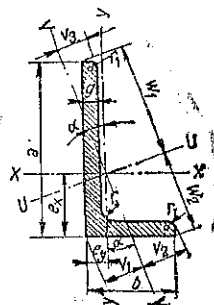
Denumire L	Dimensiunile secțiunii mm				Secțiunea S cm ²	Masa G kg/m	Distanța axelor cm			
	a	g	r	r_1			e	w	v_1	v_2
20 × 20 × 3	20	3	3,5	2	1,12	0,88	0,60	1,41	0,84	0,70
20 × 20 × 4	20	4	3,5	2	1,45	1,14	0,64	1,41	0,90	0,71
25 × 25 × 3	25	3	3,5	2	1,42	1,11	0,72	1,77	1,02	0,87
25 × 25 × 4	25	4	3,5	2	1,85	1,45	0,76	1,77	1,08	0,89
30 × 30 × 4	30	4	5	2,5	2,27	1,78	0,88	2,12	1,24	1,05
35 × 35 × 4	35	4	5	2,5	2,67	2,09	1,00	2,47	1,42	1,24
40 × 40 × 4	40	4	6	3	3,08	2,42	1,12	2,83	1,58	1,40
40 × 40 × 5	40	5	6	3	3,79	2,97	1,16	2,83	1,64	1,42
45 × 45 × 5	45	5	7	3,5	4,30	3,38	1,28	3,18	1,81	1,58
50 × 50 × 5	50	5	7	3,5	4,80	3,77	1,40	3,54	1,98	1,76
50 × 50 × 6	50	6	7	3,5	5,69	4,47	1,45	3,54	2,04	1,77
50 × 50 × 7	50	7	7	3,5	6,56	5,15	1,49	3,54	2,10	1,78
60 × 60 × 6	60	6	8	4	6,91	5,42	1,69	4,24	2,39	2,11
60 × 60 × 8	60	8	8	4	9,03	7,09	1,77	4,24	2,50	2,14
60 × 60 × 10	60	10	8	4	11,1	8,69	1,85	4,24	2,61	2,17
70 × 70 × 7	70	7	9	4,5	9,40	7,38	1,97	4,95	2,79	2,47
70 × 70 × 9	70	9	9	4,5	11,9	9,34	2,05	4,95	2,90	2,50
80 × 80 × 8	80	8	10	5	12,3	9,63	2,26	5,66	3,19	2,82
80 × 80 × 10	80	10	10	5	15,1	11,9	2,34	5,66	3,30	2,85
90 × 90 × 9	90	9	11	5,5	15,5	12,2	2,54	6,36	3,59	3,18
90 × 90 × 11	90	11	11	5,5	18,7	14,7	2,62	6,36	3,70	3,21
100 × 100 × 10	100	10	12	6	19,2	15,0	2,82	7,07	3,99	3,54
100 × 100 × 12	100	12	12	6	22,7	17,3	2,90	7,07	4,11	3,57
120 × 120 × 10	120	10	13	6,5	23,2	18,2	3,31	8,49	4,69	4,23
120 × 120 × 12	120	12	13	6,5	27,5	21,6	3,40	8,49	4,80	4,26
130 × 130 × 12	130	12	14	7	30,0	23,6	3,64	9,19	5,15	4,60
130 × 130 × 14	130	14	14	7	34,7	27,2	3,72	9,19	5,26	4,63
130 × 130 × 16	130	16	14	7	39,3	30,9	3,80	9,19	5,37	4,66
150 × 150 × 14	150	14	16	8	40,3	31,6	4,21	10,6	5,95	5,31
150 × 150 × 16	150	16	16	8	45,7	35,9	4,29	10,6	6,07	5,34

Masa este calculată pentru dimensiunile nominale, pe baza densității de 7,85 kg/dm³

aripi egale
424-71)

Anexa 6

Mărimile statice pentru axele de încovoiere									Denumire L
$x - x = y - y$			$U - U$		$V - V$				
$I_x = I_y$ cm ⁴	$W_x = W_y$ cm ³	$i_x = i_y$ cm	I_u cm ⁴	i_u cm	I_v cm ⁴	W_v cm ³	i_v cm		
0,39 0,41	0,28 0,36	0,59 0,58	0,61 0,77	0,74 0,73	0,16 0,21	0,19 0,23	0,38 0,38	20 × 20 × 3 20 × 20 × 4	
0,80 1,01	0,45 0,58	0,75 0,74	1,26 1,60	0,94 0,93	0,33 0,43	0,32 0,40	0,48 0,48	25 × 25 × 3 25 × 25 × 4	
1,80	0,85	0,89	2,85	1,12	0,75	0,61	0,58	30 × 30 × 4	
2,95	1,18	1,05	4,68	1,33	1,23	0,86	0,68	35 × 35 × 4	
4,47 5,43	1,55 1,91	1,21 1,20	7,09 8,60	1,52 1,51	1,85 2,26	1,17 1,37	0,78 0,77	40 × 40 × 4 40 × 40 × 5	
7,84	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,80	0,87	45 × 45 × 5	
11,0 12,8 14,6	3,05 3,61 4,16	1,51 1,50 1,49	17,4 20,4 23,1	1,90 1,89 1,88	4,54 5,33 6,10	2,59 2,61 2,91	0,97 0,97 0,96	50 × 50 × 5 50 × 50 × 6 50 × 50 × 7	
22,8 29,2 34,9	5,29 6,89 8,41	1,82 1,80 1,78	36,2 46,2 55,1	2,29 2,26 2,23	9,43 12,1 14,8	3,95 4,86 5,67	1,17 1,16 1,16	60 × 60 × 6 60 × 60 × 8 60 × 60 × 10	
42,4 52,6	8,41 10,6	2,12 2,10	67,1 83,1	2,67 2,64	17,6 22,0	6,27 7,59	1,36 1,36	70 × 70 × 7 70 × 70 × 9	
72,2 87,5	12,6 15,4	2,43 2,41	115 139	3,06 3,03	29,8 36,3	9,36 11,0	1,55 1,55	80 × 80 × 8 80 × 80 × 10	
116 138	18,0 21,6	2,74 2,72	184 218	3,45 3,41	47,8 57,1	13,3 15,4	1,76 1,75	90 × 90 × 9 90 × 90 × 11	
177 207	24,6 29,1	3,04 3,02	280 328	3,83 3,80	72,9 85,7	18,3 20,9	1,95 1,94	100 × 100 × 10 100 × 100 × 12	
313 368	36,0 42,7	3,67 3,65	497 584	4,63 4,60	129 151	27,5 31,5	2,36 2,35	120 × 120 × 10 120 × 120 × 12	
472 540 605	50,4 58,2 65,8	3,97 3,94 3,92	750 857 959	5,00 4,97 4,94	194 223 251	37,7 42,4 46,7	2,54 2,53 2,52	130 × 130 × 12 130 × 130 × 14 130 × 130 × 16	
845 949	78,2 88,7	4,58 4,56	1340 1510	5,77 5,74	347 391	58,3 64,4	2,94 2,93	150 × 150 × 16 150 × 150 × 14	



Oțel cormier eu
(după STAS)

I = Moment de inerție

W = Modul de rezistență

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = Rază de inerție

Raportate la axa
de încovoiere
respectivă

Denumire L.L.	Dimensiunile secțiunii în mm					Masa G kg/m	Distanța axelor, cm						
	b	a	g	r	r ₁		e _x	e _y	w _x	w _y	v _x	v _y	v ₃
40 × 60 × 5	40	60	5	6	3	4,79	3,76	1,96	0,97	4,10	3,01	1,68	2,10
40 × 60 × 6			6			5,68	4,46	2,00	1,01	4,08	3,02	1,72	2,10
40 × 60 × 7			7			6,55	5,14	2,04	1,05	4,06	3,03	1,77	2,09
50 × 65 × 7	50	65	7	6,5	3,5	7,60	5,96	2,08	1,33	4,50	3,62	2,19	2,39
50 × 65 × 8			8			8,60	6,75	2,11	1,37	4,49	3,64	2,23	2,39
65 × 80 × 6	65	80	6	8	4	8,41	6,60	2,39	1,65	5,61	4,63	2,69	2,94
65 × 80 × 8			8			11,0	8,66	2,47	1,73	5,59	4,65	2,79	2,94
65 × 80 × 10			10			13,6	10,7	2,55	1,81	5,56	4,68	2,90	2,95
75 × 100 × 7	75	100	7	10	5	11,9	9,32	3,06	1,83	6,96	5,42	3,10	3,61
75 × 100 × 9			9			15,1	11,8	3,15	1,91	6,91	5,45	3,22	3,63
75 × 100 × 11			11			18,2	14,3	3,23	1,99	6,87	5,49	3,32	3,65
80 × 120 × 8	80	120	8	11	5,5	15,5	12,2	3,83	1,87	8,23	5,99	3,27	4,23
80 × 120 × 10			10			19,1	15,0	3,92	1,95	8,18	6,03	3,37	4,21
80 × 120 × 12			12			22,7	17,8	4,00	2,03	8,14	6,06	3,46	4,20
100 × 150 × 10	100	150	10	13	6,5	24,2	19,0	4,80	2,34	10,3	7,50	4,10	5,25
100 × 150 × 12			12			28,7	29,6	4,89	2,42	10,2	7,53	4,19	5,24
100 × 150 × 14			14			33,2	26,1	4,97	2,50	10,2	7,56	4,28	5,23

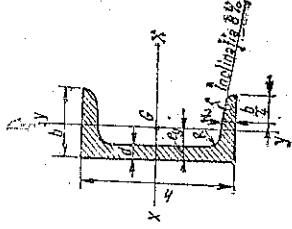
Masa este calculată pentru dimensiunile nominale, pe baza densității de 7,85 kg/dm³

Anexa 7

aripi neegale
425-70)

Unghiul de inclinare a axelor tg α	Mărimile statice pentru axe de încovoiere									
	x - x			y - y			U - U		V - V	
	I_x cm ⁴	W_x cm ³	i_x cm	I_y cm ⁴	W_y cm ³	i_y cm	I_U cm ⁴	I_V cm ⁴	I_P cm ⁴	I_P cm ⁴
0,434	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	2,03	3,54	0,86
0,431	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	2,02	4,15	0,86
0,427	22,9	5,79	1,87	8,07	2,71	1,11	26,3	2,00	4,75	0,85
0,572	31,1	7,03	2,02	15,9	4,34	1,45	38,5	2,25	8,51	1,06
0,569	34,8	7,93	2,01	17,7	4,89	1,44	43,0	2,23	9,57	1,05
0,649	52,8	9,41	2,51	31,2	6,44	1,93	68,5	2,85	15,6	1,35
0,645	68,1	12,3	2,49	40,1	8,41	1,91	88,0	2,82	20,3	1,36
0,640	82,2	15,1	2,46	48,3	10,3	1,89	106	2,79	24,8	1,35
0,553	118	17,0	3,15	56,9	10,0	2,19	145	3,49	30,1	1,59
0,549	148	21,5	3,13	71,0	12,7	2,17	181	3,47	37,8	1,59
0,545	176	25,9	3,11	84,0	15,3	2,15	214	3,44	45,4	1,58
0,437	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,28	260	4,10	46,6	1,73
0,435	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,26	317	4,07	56,8	1,72
0,432	323	40,4	3,77	114	19,1	2,24	371	4,04	66,6	1,71
0,442	552	54,1	4,78	198	25,8	2,86	637	5,13	112	2,15
0,439	650	64,2	4,76	232	30,6	2,84	749	5,10	132	2,15
0,435	744	74,1	4,73	264	35,2	2,82	856	5,07	152	2,14

Opel U
(după STAS 564-71)



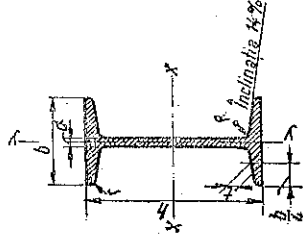
I = Moment de inerție
 W = Modul de rezistență
 $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = Rază de inerție

Raportate la axa de înclinare respectivă

Simbol U	Dimensiuni mm					Aria secțiunii A cm ²	Masa G kg/m	Mărimi statice pentru axele de înclinare						S _x cm ³	e _y cm	Simbol U
								x - x			y - y					
	h	b	d	t	r			I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm			
6,5	65	42	5,5	7,5	4	9,03	7,09	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	—	1,42	6,5
8	80	45	6	8,0	4	11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9	1,45	8
10	100	50	6	8,5	4,5	13,5	10,6	205	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	1,55	10
12	120	55	7	9,0	4,5	17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	1,60	12
14	140	60	7	10,0	5	20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	1,75	14
16	160	65	7,5	10,5	5,5	24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	1,84	16
18	180	70	8	11,0	5,5	28,0	22,0	1 350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	1,92	18
20	200	75	8,5	11,5	6	32,2	25,3	1 910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	2,01	20
22	220	80	9	12,5	6,5	37,4	29,4	2 690	245	8,48	197	33,6	2,30	146	2,14	22
24	240	85	9,5	13,0	6,5	42,3	33,2	3 600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	2,23	24
26	260	90	10	14,0	7	48,3	37,9	4 820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	2,36	26
30	300	100	10	16,0	8	58,8	46,2	8 030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	2,70	30

Masa teoretică este calculată cu densitatea de 7,85 kg/dm³.

Opel I
(după STAS 505-71)



I = Moment de inerție
 W = Modul de rezistență
 $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = Rază de inerție

Raportate la axa de înclinare respectivă

Simbol I	Dimensiuni mm					Aria secțiunii A	Masa G	Mărimi statice pentru axele de înclinare						S _x cm ²	Simbol I
								x - x			y - y				
	h	b	t	d = R	r			I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm		
8	80	42	5,90	3,9	2,3	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	629	3,00	0,91	11,4	8
10	100	50	6,80	4,5	2,7	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	10
12	120	58	7,70	5,1	3,1	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	12
14	140	66	8,60	5,7	3,4	18,3	14,4	573	81,9	5,61	36,2	10,71	1,40	47,7	14
16	160	74	9,50	6,3	3,8	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	16
18	180	82	10,40	6,9	4,1	27,9	21,9	1 450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	18
20	200	90	11,30	7,5	4,5	33,5	26,3	2 140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	20
22	220	98	12,20	8,1	4,9	39,6	31,1	3 060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	22
24	240	106	13,10	8,7	5,2	46,1	36,2	4 250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	24
26	260	113	14,10	9,4	5,6	53,4	41,9	5 740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	26
28	280	119	15,20	10,1	6,1	61,1	48,0	7 590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	28
30	300	125	16,20	10,8	6,5	69,1	54,2	9 800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	30
32	320	131	17,30	11,5	6,9	77,8	61,1	12 510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	32
36	360	143	19,50	13,0	7,8	97,1	76,2	19 610	1 090	14,2	818	114	2,90	638	36
40	400	155	21,60	14,4	8,6	118	92,6	29 210	1 460	15,7	1 160	149	3,13	857	40

Masa teoretică este calculată cu densitatea de 7,85 kg/dm³.

Valoriile coeficienților de flambaj φ pentru oțelul OL 37
(după STAS 763/1-71)

λ	Valoriile coeficienților φ pentru oțelul OL 37									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,000	0,996	0,992	0,987	0,983	0,979	0,975	0,971	0,967	0,963
10	0,960	0,956	0,952	0,948	0,944	0,941	0,937	0,933	0,930	0,926
20	0,922	0,919	0,915	0,912	0,908	0,904	0,901	0,897	0,894	0,890
30	0,886	0,883	0,879	0,876	0,872	0,868	0,865	0,861	0,857	0,853
40	0,850	0,847	0,843	0,839	0,836	0,832	0,828	0,825	0,821	0,817
50	0,814	0,810	0,806	0,802	0,799	0,795	0,791	0,788	0,784	0,780
60	0,776	0,772	0,769	0,765	0,761	0,757	0,753	0,749	0,745	0,741
70	0,737	0,734	0,729	0,725	0,721	0,717	0,713	0,709	0,705	0,701
80	0,696	0,692	0,688	0,683	0,679	0,674	0,670	0,665	0,660	0,656
90	0,651	0,646	0,641	0,636	0,630	0,625	0,619	0,613	0,607	0,600
100	0,593	0,588	0,577	0,567	0,555	0,545	0,535	0,525	0,515	0,506
110	0,496	0,488	0,479	0,470	0,462	0,454	0,446	0,439	0,431	0,424
120	0,417	0,410	0,403	0,397	0,394	0,384	0,378	0,372	0,367	0,361
130	0,355	0,350	0,345	0,340	0,335	0,330	0,325	0,320	0,315	0,311
140	0,306	0,302	0,298	0,294	0,290	0,286	0,282	0,278	0,274	0,271
150	0,267	0,263	0,260	0,257	0,253	0,250	0,247	0,244	0,241	0,238
160	0,235	0,232	0,229	0,226	0,223	0,221	0,218	0,215	0,213	0,210
170	0,208	0,205	0,203	0,201	0,198	0,196	0,194	0,192	0,190	0,187
180	0,185	0,183	0,181	0,179	0,177	0,175	0,174	0,172	0,170	0,168
190	0,166	0,165	0,163	0,161	0,160	0,158	0,156	0,155	0,153	0,152
200	0,150	0,149	0,147	0,146	0,144	0,143	0,142	0,140	0,139	0,137
210	0,136	0,135	0,134	0,132	0,131	0,130	0,129	0,128	0,126	0,125
220	0,124	0,123	0,122	0,121	0,120	0,119	0,118	0,117	0,116	0,115
230	0,114	0,113	0,112	0,111	0,110	0,109	0,108	0,107	0,106	0,105
240	0,104	0,103	0,103	0,102	0,101	0,100	0,099	0,098	0,098	0,097
250	0,096									

Coeficienții de flambaj φ pentru lemn și fontă

λ	Lemn	Fontă	λ	Lemn	Fontă
0			80	0,48	0,26
10	0,99	0,97	90	0,38	0,20
20	0,97	0,91	100	0,30	0,16
30	0,93	0,81	110	0,25	
40	0,87	0,69	120	0,22	
50	0,80	0,57	130	0,18	
60	0,71	0,44	140	0,16	
70	0,61	0,34	150	0,14	

Aneza 10

Aneza 11

Aneza 12

Rezistențe admisibile ale cordonelor de sudură
(după STAS 763/1-71)

Nr. crt.	Tipul cordonului de sudură	Solicetarea	Simbolul	Coeficientul aplicat în raport cu rezistența admisibilă σ_a a materialului pieselor care se sudază	Rezistențele admisibile în daN/cm ² pentru suduri la elemente din oțel marca :									
					OL 37 și OL 35		OL 44		OL 52					
					gruparea de încălzire									
					I	II	I	II	I	II	I	II		
1	Cordon de sudură în adâncime (îmbinări cap la cap)	Compreseune întindere : a) sudură executată automat, semiautomat și sudură electrică executată manual la care se aplică un control 100% cu mijloace perfecționate (Röntgen, gama)	σ_{ds}	1,00	1500	1700	1800	1800	2100	2100	2200	2500		
2		b) sudură executată automat, semiautomat și sudură electrică executată manual la care se aplică un control cu mijloace obișnuite	σ_{ds}	0,80	1200	1350	1450	1450	1700	1700	1750	2000		
3	Cordon de sudură în rețea (de colț)	Forfecare	τ_{ds}	0,65	1000	1100	1050	1200	1200	1400	1400	1600		
4		Forfecare	τ_{ds}	0 65	1000	1100	1050	1200	1200	1400	1400	1600		

BIBLIOGRAFIE

1. Beieș, A. și Voinea, R. P. *Rezistența materialelor*, vol. II, Ed. tehnică, București, 1958.
2. Buzdugan, Gh. *Rezistența materialelor*, Ed. tehnică, București, 1974.
3. Deutsch, I. *Probleme de rezistența materialelor*, Litografiat, Brașov, 1972.
4. Feodosiev, V. I. *Izbrannie zadaci i voprosi po soprotivleniu materialov*, Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1967.
5. Göldner, H. *Übungsaufgaben aus der Technischen Mechanik, Statik-Dynamik-Festigkeitslehre, für Studierende an Technischen Hochschulen*, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1963.
6. Ițkovič, G. M. și Vinokurov, A. I. *Sbornik zadaci po soprotivleniu materialov*, Izdatelstvo „Sudostroenie”, Leningrad, 1965.
7. Ivanov, N. I. *Sbornik zadaci po soprotivleniu materialov*, Gostehteorizdat, Moskva, 1965.
8. Mazilu, P., Posea, N. Iordăchescu, E., *Probleme de rezistența materialelor*, vol. II, Ed. tehnică, București, 1975.
9. Miroljubov, I. ș.a., *Résistance des matériaux — Manuel de résolution des problèmes*, Edition Mir, Moscou, 1973.
10. Mocanu, D. R., și Brateș, M. *Calcul de rezistență cu specifice feroviar*, vol. I și II, Ed. căilor ferate, București, 1957, 1958.
11. Nădășan, St. ș.a., *Probleme de rezistența materialelor*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1968.
12. Ponomarev, S. D., ș.a. *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. I, II, III, Ed. tehnică, București, 1960, 1963, 1964.
13. Stan, A. și Grumăzescu, M. *Probleme de mecanică și rezistența materialelor*, Ed. tehnică, București, 1954.
14. Svetlițkii, A. V. și Stacenko, I. V. *Sbornik zadaci po teorii kolebani, Visșaia Șkola*, Moskva, 1973.
15. Szabo, I. *Repertorium und Übungsbuch der Technischen Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.
16. Timoshenko, S. *Strength of materials*, part I, II, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1956.
17. Umanskii, A. A. ș.a. *Sbornik zadaci po soprotivleniu materialov*, Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1973.
18. Zünker, B., *Übungen zur Festigkeits- und Elastizitätslehre*, Georg Westermann Verlag, Braunschweig, 1965.

CUPRINSUL

Prefața	3
1. Întindere și compresiune	5
2. Momente de inerție ale suprafețelor plane	53
3. Diagrame de eforturi în bare drepte și curbe	73
4. Eforturi unitare în barele drepte solícitate la încovoiere	109
5. Deformațiile barelor drepte solícitate la încovoiere	152
6. Răsucire	197
7. Teoria generală a eforturilor unitare și a deformațiilor specifice	224
8. Solícitări compuse	251
9. Bare curbe	288
10. Calculul deplasărilor prin metode energetice	302
11. Sisteme statice nedeterminate	337
12. Stabilitatea echilibrului elastic al barelor drepte	416
13. Solícitări dinamice	442
14. Solícitări variabile în timp	494
15. Plăci plane	520
16. Învâlușuri de rotație cu pereți subțiri	546
17. Încovoierea și răsucirea profilelor subțiri	567
18. Solícitări în stadiul plastic	595
19. Tuburi cu pereți groși	615
20. Probleme recapitulative	629
Anexe	677
Bibliografie	694

Plan editură 5735. Tiraj: 23 000 + 80 exemplare
legate I/1. Coll tipar 43,50. Bun de tipar 30.06.78.
Apărut 1979.



c. 1531 — I. P. INFORMAȚIA
str. Brezoianu nr. 23 — 25
București